Anno IX 15 settembre 1958 Numero 3

Estratto dal

BOLLETTINO DELLA SOCIETA' MATEMATICA CALABRESE

ANTONIO SALMERI

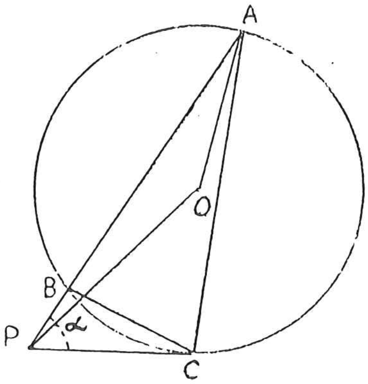
UN PROBLEMA DI MASSIMO

Tipografia Matematica « Biroccio »

Reggio Calabria

Sia data una circonferenza di centro O *e raggio* r, *e sul piano di questa sia dato un punto* P *tale che* $OP = r\sqrt{2}$. *Si conducano per* P *una tangente, e sia* C *il punto di contatto, e una segante e siano* A *e* B *le sue intersezioni con la crf.. Dire come deve essere condotta la segante affinchè l'area del triangolo* ABC *sia massima.*

E' evidentemente $CPO = 45°$ e $\overline{PC} = r$; onde se è $APC = \alpha$, sarà $APO = \alpha - 45°$. Per il teorema del coseno, applicato al triangolo AOP, se si indica con x il segmento AP, si ha:



$$r^2 = x^2 + 2r^2 - 2rx\sqrt{2}\cos(\alpha - 45°),$$

onde

$$x^2 - 2rx\sqrt{2}\cos(\alpha - 45°) + r^2 = 0,$$

da cui

$$x = r\sqrt{2}\cos(\alpha - 45°) \pm \sqrt{2r^2\cos^2(\alpha - 45) - r^2} =$$
$$= r\sqrt{2}\cos(\alpha - 45°) \pm r\sqrt{\cos(2\alpha - 90°)} =$$
$$= r\sqrt{2}\cos(\alpha - 45°) \pm r\sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha}.$$

Per $0° < \alpha \leq 90°$, le due soluzioni sono reali positive; una fornisce la misura di AP, e l'altra la misura di BP, quindi:

$$AB = AP - BP = 2r\sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha}.$$

Si ha in definitiva:

$$S(ABC) = S(APC) - S(BPC) = \frac{1}{2} AP.PC \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} PB.PC \operatorname{sen}\alpha =$$
$$= \frac{1}{2} CP(AP - BP)\operatorname{sen}\alpha = r^2 \operatorname{sen}\alpha\sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha}.$$

L'area di ABC è dunque una funzione di α, ed essa è massima o minima pei valori di α che rendono massima o minima l'espressione

$$y = \operatorname{sen}\alpha\sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha},$$

cioè pei valori di α che annullano la derivata prima di y e attraverso i quali la y' cambia di segno. Ora la derivata prima di y è

$$y' = \operatorname{sen}\alpha \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha}} + \cos\alpha \sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \cos\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha}} = \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha}},$$

ed uguagliata a zero dà l'equazione

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 0,$$

le cui soluzioni sono fornite da $3\alpha = h \, . \, 180°$, con h intero relativo qualsivoglia, e perciò da $\alpha = h \, . \, 60°$. Un valore di α è però accettabile se sodisfa alla condizione $0° < \alpha \leq 90°$, ed allora si vede sùbito che bisogna prendere $h = 1$, e quindi $\alpha = 60°$. Siccome y' cambia di segno attraverso il punto $\alpha = 60°$, passando da $+$ a $-$, si conclude che y è massimo, e quindi lo è S, per $\alpha = 60°$.

Il triangolo ABC di area massima si costruisce sùbito. Basta disegnare le due crf. di raggio r aventi i centri in C e P. Se H è l'intersezione di tali crf. interna alla data, la retta PH è la segante che interseca la crf- data nei p.ti A e B tali che ABC sia di area massima. Infatti l'angolo $\alpha = \text{HPC}$ è evidentemente di 60°.