CONGRESSO NAZIONALE MATHESIS

Chieti – Novembre 2007

NEL SORPRENDENTE MONDO DELLE FRAZIONI:
dalla Serie di Farey, ai Cerchi di Ford,
ai periodi con proprietà notevoli

Antonio Salmeri - Mathesis Roma

Premessa

Scopo di questa nota è quello di mostrare alcune proprietà, in verità molto curiose, legate al mondo delle frazioni. Incominciamo con la serie di Farey, per poi parlare dell'albero di Stern-Brocot e dei cerchi di Ford. Infine mostreremo le notevoli proprietà di alcuni periodi generati da frazioni aventi per denominatore un numero primo.

La Serie di Farey

Iniziamo con il definire la Serie di Farey: *"Per ogni intero positivo* n *la Serie di Farey è l'insieme di tutte le frazioni a/b irriducibili con* $0 \le a \le b \le n$*, ordinato in sequenza crescente dove il numero* n *è detto ordine della serie".*
Si riportano qui di seguito le prime serie:

F1 = (0/1, 1/1)
F2 = (0/1, 1/2, 1/1)
F3 = (0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1)
F4 = (0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1)
F5 = (0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1)
F6 = (0/1, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2. 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 1/1)

La Serie di Farey, oltre a permettere la dimostrazione del teorema di Dirichlet e del teorema di Hurwitz, ha molte proprietà:
- *Ogni termine della serie si ottiene dai termini adiacenti a/b e c/d con la relazione (a+ c)/(b+d), eventualmente riducendo ai minimi termini.*
- *Se m/n e p/q sono due termini consecutivi della serie di Farey, vale sempre la relazione:*

$$n \times p - m \times q = 1.$$

- *Il numero dei termini N della Serie di Farey di ordine n è dato da:* $N = 1 + \Sigma_k \Phi(k)$*, con sommatoria estesa da 1 ad n.*

John Farey (1766 – 1826) non era un matematico, ma un geologo. Egli nel 1816 pubblicò un articolo di matematica riguardante questa serie di frazioni concludendo che tale serie aveva delle proprietà curiose. Egli non era al corrente se la proprietà era già nota e se la dimostrazione era facile. La dimostrazione fu data nello stesso anno dal matematico Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)..

L'albero di Stern-Brocot

La Serie di Farey è associata anche all'albero di Stern-Brocot, ideato indipendentemente da entrambi, con scopi completamente diversi. Il matematico Stern succedette a Gauss nella Cattedra di Gottinga e Brocot era un orologiaio inventore dello "scappamento di Brocot" e di una sospensione del pendolo che ne semplifica la regolazione.

Nell'albero di Stern-Brocot (fig. 1) ogni frazione si ottiene dalle due immediatamente sovrastanti

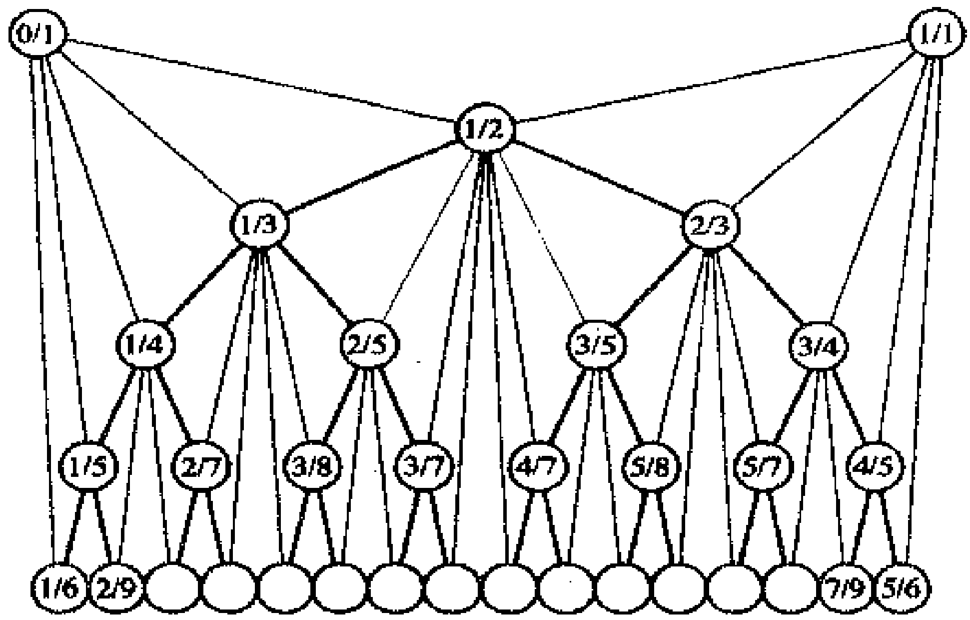

Figura 1 - Albero di Stern-Brocot

sommando i numeratori ed i denominatori che diventano rispettivamente il numeratore ed il denominatore. Ovvero se le frazioni sovrastanti di ordine *n* sono *a/b* e *c/d*, la frazione risultante di ordine *n+1* è *(a+c)/(b+d)*.

Qui di seguito (fig. 2) si ha la proiezione, su una retta di riferimento, delle frazioni dei vari ordini.___

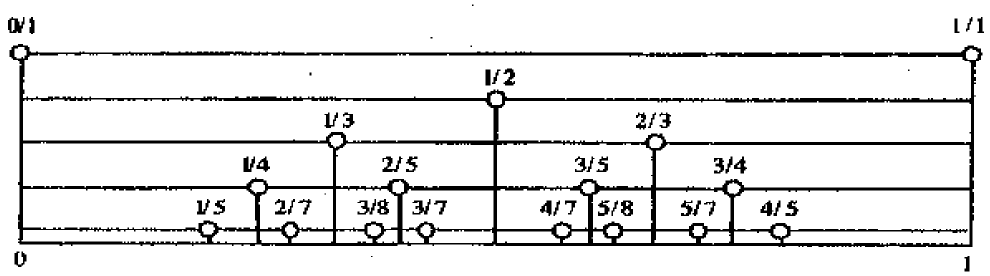

Figura 2 - Proiezione su una retta di riferimento delle generazioni successive.

In questo modo si può quindi generare la totalità dei numeri razionali, le cui proiezioni si succedono in ordine di valore crescente, confermando così il fatto che nessuna frazione può apparire più di una volta sulla linea di riferimento.

I cerchi di Ford
Questa sequenza di frazioni è legata ai cerchi, o circonferenze, di Ford che riportiamo (fig. 3) qui di seguito, ove i punti di contatto delle circonferenze di ordine *n*, tangenti alle due circonferenze adia-

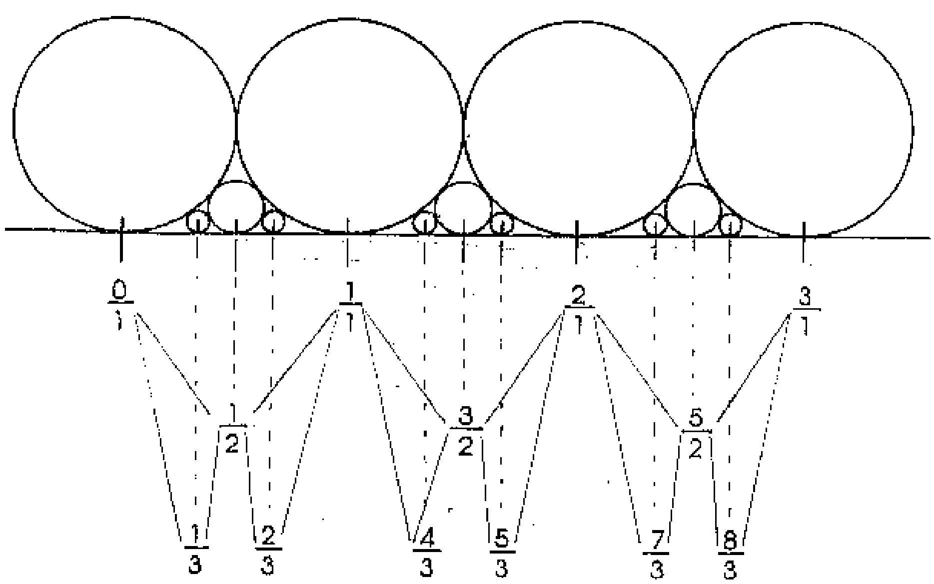

Figura 3 - Cerchi di Ford corrispondenti agli interi, alle metà ed ai terzi.

centi ed alla retta di riferimento, hanno la distanza dall'origine uguale alla frazione di ordine *n*.
Ancora più interessante è la sequenza dei cerchi di Ford, disposti nell'intervallo O - 1/2, dove vengono tracciati soltanto i cerchi C_k tangenti a C_0 ed a C_{k-1} , oltre che alla retta di riferimento (fig. 3).

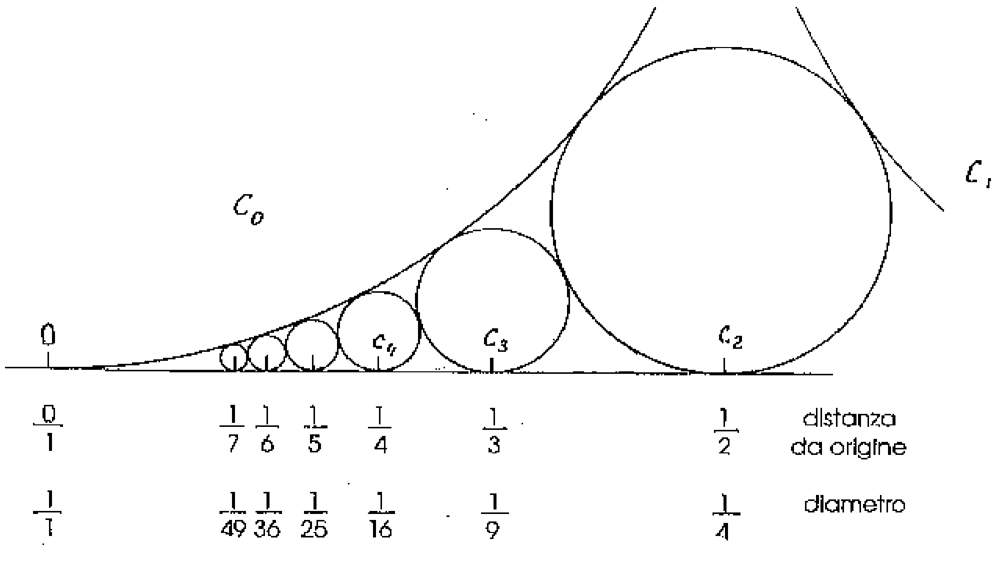

Figura 4 - Sequenza progressiva dei cerchi di Ford.

Si dimostra che il generico cerchio C_k è tangente alla retta in punti le cui distanze dall'origine sono frazioni con numeratore *1* e con denominatore k. E' fra l'altro interessante notare che i diametri di questi cerchi sono ancora frazioni esattamente uguali al quadrato delle corrispondenti distanze, ovvero $1/k^2$.

Frazioni periodiche e primi lunghi
E' noto che una frazione può generare: un numero decimale finito, un numero decimale periodico misto o un numero decimale periodico semplice.
a) La frazione *1/N* genera un *numero decimale finito* quando $N = 2^a \times 5^b$. In questo caso il numero delle cifre significative è uguale al maggiore fra *a* e *b*.
b) La frazione *1/N* genera *un numero decimale periodico misto* quando $N = 2^a \times 5^b \times M$, dove *M* è un numero intero non divisibile né per *2* né per *5*. In questo caso la parte decimale è composta da un gruppo di cifre che non si ripetono, detto *antiperiodo*, e da un gruppo di cifre detto *periodo* che si ripete all'infinito. Il numero di cifre dell'antiperiodo è uguale al maggiore fra *a* e *b*.
c) La frazione *1/N* genera un numero decimale *periodico semplice* quando *N = M*, dove, come già detto, *M* è un numero non divisibile né per *2* né per *5*.
Si dimostra che il numero massimo delle cifre del periodo è uguale a *N-1*: in questo caso *N* è numero primo e prende il nome di *primo lungo*.
Quanto detto vale ovviamente per la *base 10.* Nelle basi generiche *B* questa proprietà continua a valere quando al posto di *2* e *5* si sostituiscono i fattori primi nei quali si scompone il numero *B*.

Nella base *10* i primi lunghi sono: 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 113, 149, 167, …
e le cifre del periodo sono: 6, 16, 18, 22, 28, 46, 58, 60, 96, 112, 148, 166, …

Nella base *10* circa il 37% dei primi sono primi lunghi,. Il matematico austriaco Emil Artin ha ipotizzato che la percentuale dei primi lunghi rispetto al numero dei primi è uguale a:

$$\Pi\ [p^2 - p - 1) / (p^2 - p)] \approx 0{,}3739\ldots,$$

prodotto esteso a tutti i numeri primi, ovvero, eseguendo i prodotti dei singoli termini calcolati per *p=2, p=3, p=5, p=7*, … si ha:

$$1/2 \times 5/6 \times 19/20 \times 109/110 \times \ldots \approx 0{,}3739\ldots\ .$$

Per i primi non lunghi le cifre del periodo sono un sottomultiplo di *N-1.* Per esempio il periodo di *1/31* è di *15* cifre, *(15 × 2 = 30)*, il periodo di *1/41* è di *5* cifre *(5 × 8 = 40)*. Si riportano qui di seguito, per *N* < *100*, la lunghezza (indicata fra parentesi) dei periodi delle frazioni *1/N* quando *N* non è un primo lungo.

N = 3 (1), 11 (2), 13 (6), 31 (15), 37 (3), 41 (5),
43 (21), 53 (13), 67 (33), 71 (35), 73 (8), 79 (13), 83 (41), 89 (44).

Notevoli proprietà di alcuni periodi
Esaminiamo ora i numeri costituiti da periodi, che indichiamo con *P(M)*, generati da *1/M*. Abbiamo le seguenti proprietà:
1) Se si suddivide il numero P - *avente un numero di cifre pari - in due gruppi, le cifre che hanno lo stesso posto nei due gruppi, sono una il complemento a* 9 *dell'altra, ossia la somma dei due gruppi è uguale ad un numero formato da tutti* 9.
Si prendono ad esempio i periodi delle frazioni *1/7, 1/13 e 1/17* e si ha rispettivamente:

1/7 = 0,(142857) - P(7) = 142857 => 142 + 857 = 999,
1/13 = 0,(076923) - P(13) = 076923 => 076 + 923 = 999,
1/17 = 0,(0588235294117647) - P(17) = 0588235294117647 =>
=> 05882352 + 94117647 = 99999999

Questa proprietà vale per tutti i periodi aventi un numero di cifre pari.

Le proprietà 2) e 3) valgono, invece, solamente per i seguenti tre numeri.

a) 105263157894736842
b) 103448275862068965517241379 3
c) 1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966

Essi sono rispettivamente i periodi delle frazioni: *2 / 19 , 3 / 29, 6 / 59* e, come visto, *19, 29 e 59* sono primi lunghi. Infatti i tre numeri *a), b)* e *c)* sono rispettivamente di *18, 28, 58* cifre.
Questi tre numeri godono, oltre della proprietà *1)* già vista per i periodi avente lunghezza espressa da numero di cifre pari, anche delle seguenti proprietà:

2) Moltiplicando il numero a) *o* b) *o* c) *per* 1, 2, 3,…,8, *si hanno numeri tutti di* 18 *o* 28 *o* 58 *cifre, che si possono ottenere dal numero* a) *o* b) *o* c) *operando sulle sue cifre un certo numero di sostituzioni cicliche.*
Per il numero *a)* si ottiene:

a × 1 = 105263157804736842
a × 2 = 210526315780473684
a × 3 = 315780473684210526
a × 4 = 421052631578047368
a × 5 = 526315780473684210
a × 6 = 631578047368421052
a × 7 = 736842105263157804
a × 8 = 842105263157804736

Per il numero *b)* si ottiene:

b × 1 = 1034482758620689655172413793
b × 2 = 2068965517241379310344827586
b × 3 = 3103448275862068965517241379
b × 4 = 4137931034482758620689655172
b × 5 = 5172413793103448275862068975
b × 6 = 6206897551724237931034482758
b × 7 = 7242379310344827586206897551
b × 8 = 8275862068975517242379310344

Analogamente per il numero *c)*.
Come si vede, anche con l'aiuto dello sfalsamento adottato, i risultati delle moltiplicazioni forniscono numeri che si ottengono ognuno dall'altro operando un certo numero di sostituzioni cicliche.

3) Detto P *uno qualsiasi degli otto numeri che si ottengono moltiplicando il numero* a) *o* b) *o* c) *per i numeri* 2, 3, 4,…,9, *e* P' *quello che da esso si ottiene operando sulle sue cifre una sostituzione ciclica, il rapporto* P/P' *è uguale ad un numero intero. Per tutti i numeri che si ottengono da* a) *o* b) *o* c) *questo rapporto è sempre uguale a* 2 *o* 3 *o* 6.

A titolo di esempio si prende il numero *n (a,5) = (a × 5)* e su di esso si opera una sostituzione ciclica consistente nello spostare la prima cifra all'ultimo posto ottenendo il numero *n'(a,5)* e si ha:

$$\frac{n\,(a,5)}{n'(a,5)} = \frac{526315780473684210}{263157804736842105} = 2$$

Analogamente per il numero *n (a,8) = (a × 8)* e si ottiene:

$$\frac{n\,(a,8)}{n'(a,8)} = \frac{842105263157804736}{421052631578047368} = 2$$

Tale risultato si ottiene per tutti i numeri *n (a,k)* con *k* che varia da *1* a *8.*
Ripetiamo la stessa operazione per il numero *b)* ed in particolare per il numero *n (b, 3)*, e si ha:

$$\frac{n\,(b,3)}{n'\,(b,3)} = \frac{3103448275862068965517241379}{1034482758620689655172413793} = 3$$

Analogamente per il numero *n (b,5)* e si ottiene:

$$\frac{n\,(b,5)}{n'\,(b,5)} = \frac{5172413793103448275862068975}{1724137931034482758620689755} = 3$$

Tale risultato si ottiene per tutti i numeri *n (b,k)* con *k* che varia da *1* a *8*.
Ripetiamo la stessa operazione per il numero *c)* ed in particolare per il numero *n (c,2)*, e si ha:

$$\frac{n\,(c,2)}{n'\,(c,2)} = \frac{2033898305084745762711864406779661016949152542372881355932}{0338983050847457627118644067796610169491525423728813559322} = 6$$

Analogamente per il numero *n (c,5)* e si ottiene:

$$\frac{n\,(c,5)}{n'\,(c,5)} = \frac{5084745762711864406779661016949152542372881355932203389830}{0847457627118644067796610169491525423728813559322033898305} = 6$$

Tale risultato si ottiene per tutti i numeri *n (c,k)* con *k* che varia da *1* a *8*.
Questi numeri sono i soli a godere di queste proprietà nella base *10*; nelle altre basi, con queste proprietà, ne esiste uno nella base *3*, uno nella base *6* e due nelle base *7*. Nelle basi *2, 4, 5, 8 e 9* non esiste nessun numero con queste proprietà. Le dimostrazioni possono essere consultate nelle memorie [6], [7] e [8] riportate in bibliografia.

Bibliografia e Riferimenti

[1] J. H. Conway, Richard K. Guy, *Il libro dei Numeri,* Ulrico Hoepli Editore 1999.
[2] Midhat Gazale, *Il Numero - Dalla matematica delle Piramidi all'infinito di Cantor,* Edizioni Dedalo, 2000.
[3] L. R. Ford, *Fractions,* American Mathematical Monthly, N. 45, 1938, pagg. 586-601.
[4] J. Farey, *On a Curious Property of Vulgar Fractions,* London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 47, 385, 1816.
[5] Eulalia Giglio, *La serie di Farey,* Tesi di Laurea, Facoltà di Scienze MM. FF. NN. Università degli Studi di Padova, 2003.
[6] A. Salmeri, *Studio di un'equazione diofantea fratta nel sistema di numerazione B-esimale,* Bollettino U. M. I., Vol. 14, 1959, pagg. 554-562.
[7] A. Salmeri, *Risoluzione in numeri interi di una particolare equazione fratta con un numero indeterminato di variabili,* Periodico di Matematiche, Serie IV, 1956, Vol. XXXIX, pagg. 234-239.
[8] A. Salmeri, *Sulle proprietà dei periodi relativi a particolari frazioni,* Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. XCII 1964, pagg. 234-241.