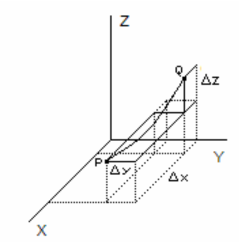
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 122 – dicembre 2007



Nel mondo sorprendente delle frazioni

Antonio Salmeri [3]

[*Segue dal numero* 121] Qui di seguito (fig. 2) si ha la proiezione, su una retta di riferimento, delle frazioni dei vari ordini. In questo modo si può quindi generare la totalità dei numeri razionali, le cui proiezioni si succedono in ordine di valore crescente, confermando così il fatto che nessuna frazione può apparire più di una volta sulla linea di riferimento.

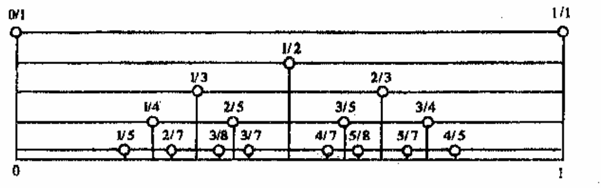


Fig. 2

I cerchi di Ford

Questa sequenza di frazioni è legata ai cerchi, o circonferenze, di Ford che riportiamo (fig. 3) qui di seguito, ove i punti di contatto delle circonferenze di ordine n, tangenti alle due circonferenze adiacenti ed alla retta di riferimento hanno la distanza dall'origine uguale alla frazione di ordine n.

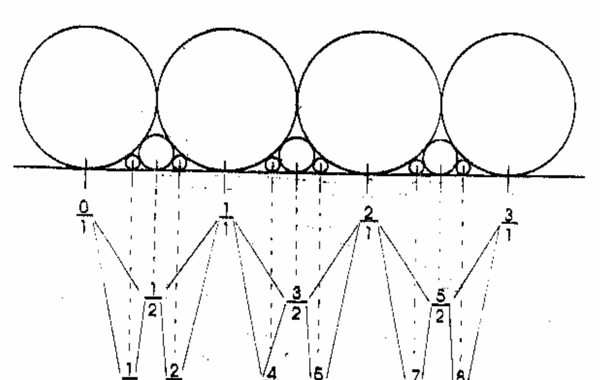


Fig. 3

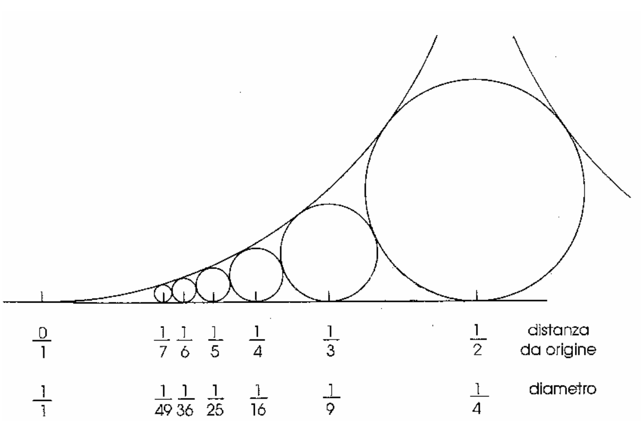


Fig. 4

Ancora più interessante è la sequenza dei cerchi di Ford (fig. 4) dove tutte le circonferenze sono tangenti alla retta in punti le cui distanze dall'origine sono frazioni con numeratore 1 e con denominatori costituiti dalla serie naturale dei numeri da 1 all'infinito.
È fra l'altro interessante notare che i diametri di queste circonferenze sono ancora frazioni esattamente uguali al quadrato delle corrispondenti distanze.

Frazioni periodiche e primi lunghi

È noto che una frazione può generare un numero decimale finito, un numero decimale periodico misto o un numero decimale periodico semplice.
a) La frazione $1/N$ genera un *numero decimale finito* quando $N = 2^a \times 5^b$. In questo caso il numero delle cifre significative è uguale al maggiore fra a e b.
b) La frazione $1/N$ genera *un numero decimale periodico misto* quando $N = 2^a \times 5^b \times M$, dove M è un numero intero non divisibile né per *2* né per *5*. In questo caso la parte decimale è composta da un gruppo di cifre che non si ripetono, detto *antiperiodo*, e da un gruppo di cifre detto periodo che si ripete all'infinito. Il numero di cifre dell'antiperiodo è uguale al maggiore fra a e b.
c) La frazione $1/N$ genera un numero decimale periodico semplice quando $N = M$, dove M è un numero non divisibile né per *2* né per *5*.
Si dimostra che il numero massimo delle cifre del periodo è uguale a $N - 1$: in questo caso N è numero primo e prende il nome di *primo lungo*.
Quanto detto vale ovviamente per la *base* 10, nelle basi generiche B quanto detto continua a valere quando al posto di *2* e *5* si sostituiscono i fattori primi nei quali si scompone il numero B. Nella base 10 i primi lunghi sono: 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 113, 149, 167, …
e le cifre del periodo sono: 6, 16, 18, 22, 28, 46, 58, 60, 96, 112, 148, 166, …
Nella base 10 circa il 37% dei primi sono primi lunghi, il matematico austriaco Emil Artin ha ipotizzato che la percentuale dei primi lunghi rispetto al numero dei primi è uguale a:
$\Pi\,[p^2 - p - 1) / (p^2 - p)] \approx 0{,}3739\ldots,$
prodotto esteso a tutti i numeri primi, ovvero:
1/2 × 5/6 × 19/20 × 109/110 × …
Per gli altri primi, primi non lunghi, le cifre del periodo hanno una lunghezza uguale ad un sottomultiplo di $N - 1$, per esempio il periodo di 1/31 è di 15 cifre, (15 × 2 = 30), il periodo di 1/41 è di 5 cifre (5 × 8 = 40). Si riportano qui di seguito, per $N < 100$, la lunghezza (indicata fra parentesi) dei periodi delle frazioni $1/N$ quando N non è un primo lungo.
N = 3 (1), 11 (2), 13 (6), 31 (15), 37 (3), 41 (5), 43 (21), 53 (13), 67 (33), 71 (35), 73 (8), 79 (13), 83 (41), 89 (44).

Notevoli proprietà di alcuni periodi

Esaminiamo ora i numeri costituiti da periodi, che indichiamo con *P*(*M*), generati da $1/M$. Abbiamo le seguenti proprietà:
1) *Se si suddivide il numero P, avente un numero di cifre pari in due gruppi, le cifre che hanno lo stesso posto nei due gruppi, sono una il complemento a* 9 *dell'altra, ossia la somma dei due gruppi è uguale ad un numero formato da tutti* 9.
Si prendono ad esempio i periodi delle frazioni *1/7, 1/13 e 1/17* e si ha rispettivamente:

1/7 = 0,(142857) – P(7) = 142857 $\Rightarrow$ 142 + 857 = 999,
1/13 = 0,(076923) – P(13) = 076923 $\Rightarrow$ 076 + 923 = 999,
1/17 = 0,(0588235294117647) – P(17) = 0588235294117647 $\Rightarrow$ 05882352 + 94117647 = 99999999

Questa proprietà vale per tutti i periodi avente una lunghezza con numero pari di cifre. Le due proprietà che seguono valgono, invece, solamente per i seguenti tre numeri.

Si prendono in esame i numeri:

a) 105263157894736842
b) 1034482758620689655172413793
c) 1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966 ;

essi sono rispettivamente i periodi delle frazioni: 2 / 19*,* 3 / 29, 6 / 59.

E, come visto, 19, 29 e 59 sono primi lunghi e quindi i tre numeri *a), b)* e *c)* sono rispettivamente di 18, 28, 58 cifre. Questi tre numeri godono, oltre della proprietà 1) già vista per i periodi avente lunghezza espressa da numero di cifre pari, anche delle seguenti proprietà:

2) *Moltiplicando il numero* a) *o* b) *o* c) *per* 1, 2, 3,…,8, *si hanno numeri tutti di* 18 *o* 28 *o* 58 *cifre, che si possono ottenere dal numero* a) *o* b) *o* c) *operando sulle sue cifre un certo numero di sostituzioni cicliche.*

Per il numero *a)* si ottiene:

a × 1 = 105263157804736842
a × 2 = 210526315780473684
a × 3 = 315780473684210526
a × 4 = 421052631578047368
a × 5 = 526315780473684210
a × 6 = 631578047368421052
a × 7 = 736842105263157804
a × 8 = 842105263157804736

Come si vede, anche con l'aiuto dello sfalsamento adottato, i risultati delle moltiplicazioni forniscono numeri che si ottengono ognuno dall'altro operando un certo numero di sostituzioni cicliche.

3) *Detto* P *uno qualsiasi degli otto numeri che si ottengono moltiplicando il numero* a) *o* b) *o* c) *per i numeri* 2, 3, 4,…,9, *e* P' *quello che da esso si ottiene operando sulle sue cifre una sostituzione ciclica, il rapporto P/P' è uguale ad un numero intero; per tutti i numeri che si ottengono da* a) *o* b) *o* c) *questo rapporto è sempre uguale a* 2 *o* 3 *o* 6.

A titolo di esempio si prende il numero $n(a,5) = (a \times 5)$ e su di esso si opera una sostituzione ciclica consistente nello spostare la prima cifra all'ultimo posto ottenendo il numero $n'(a, 5)$ e si ha:

$$\frac{n(a,5)}{n'(a,5)} = \frac{526315780473684210}{263157804736842105} = 2$$

Mostriamo la stessa operazione per il numero *n (a,8) = (a × 8)* e si ottiene:

$$\frac{n(a,8)}{n'(a,8)} = \frac{842105263157804736}{421052631578047368} = 2$$

Tale operazione può essere ripetuta per tutti i numeri $n(a,1;\ldots;a,8)$, $n(b,1;\ldots;b,8)$, $n(c,1;\ldots;c,8)$, ed avremo: $n(a) / n'(a) = 2$, $n(b) / n'(b) = 3$, $n(c) / n'(c) = 6$. Questi numeri sono i soli a godere di queste proprietà nella base 10; nelle altre basi, con queste proprietà, ne esiste uno nella base 3, uno nella base 6 e due nelle base 7. Nelle basi 2, 4, 5, 8 e 9 non esiste nessun numero con queste proprietà. Le dimostrazioni possono essere consultate nelle memorie riportate in bibliografia.

Bibliografia e Riferimenti: [1] J. H. Conway, Richard K. Guy, *Il libro dei Numeri,* Ulrico Hoepli Editore 1999. [2] Midhat Gazale, *Il Numero – Dalla matematica delle Piramidi all'infinito di Cantor,* Edizioni Dedalo, 2000. [3] L. R. Ford, *Fractions,* American Mathematical Monthly, N. 45, 1938, pagg. 586-601. [4] J. Farey, On a Curious *Property of Vulgar Fractions,* London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 47, 385, 1816. [5] Eulalia Giglio, *La serie di Farey,* Tesi di Laurea, Facoltà di Scienze MM. FF. NN. Università degli Studi di Padova, 2003. [6] A. Salmeri, *Studio di un'equazione diofantea fratta nel sistema di numerazione B-esimale,* Bollettino U. M. I., Vol. 14, 1959, pagg. 554-562. [7] A. Salmeri, *Risoluzione in numeri interi di una particolare equazione fratta con un numero indeterminato di variabili,* Periodico di Matematiche, Serie IV, 1956, Vol. XXXIX, pagg. 234-239. [8] A. Salmeri, *Sulle proprietà dei periodi relativi a particolari frazioni,* Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. XCII 1964, pagg. 234-241.

Questo articolo è un "estratto" della comunicazione che l'autore ha fatto al Congresso nazionale Mathesis di Chieti il 2 novembre 2007. Per gentile concessione della Mathesis Nazionale.

[3] Socio Mathesis sezione di Roma:
e-mail: *a-salmeri@mclink.it*

Gauss-Riemann: la confutazione del concetto di spazio kantiano

di Luciano Corso

Immanuel Kant sostiene, in *Critica della ragion pura* [B.5], che la conoscenza umana dipende da due classi distinte di elementi: le categorie e le idee regolatrici. Le categorie formano il nostro intelletto in quanto se ragioniamo lo dobbiamo a loro. La razionalità, quindi, dipende da loro e non si può prescindere da queste categorie. Le idee regolatrici, invece, non possono costituire conoscenza. Esse sono, per esempio, l'infinito, l'eterno, Dio. D'altra parte, le categorie da sole non possono esaurire la conoscenza, cioè non è possibile con le sole categorie, arrivare alla completezza logica. Purtroppo, per far ciò sono necessarie le idee regolatrici. Ma, allora, rimane aperto il cerchio: se, cioè, vogliamo completare rigorosamente le nostre argomentazioni sul mondo, abbiamo bisogno di ricorrere alle idee regolatrici, ma d'altra parte, queste idee regolatrici, non sono rigorosamente interpretabili e ciò comporta impossibilità di conoscere compiutamente quanto è frutto della nostra esperienza. Tra queste categorie kantiane troviamo anche lo spazio e il tempo. Kant afferma che le categorie sono un *a priori* nella mente degli uomini e che il mondo non può essere interpretato senza fare riferimento a loro. Inoltre, esse non sono propriamente legate all'esperienza; sono piuttosto innate, le portiamo dentro dall'origine. Le categorie darebbero il senso della conoscenza. In particolare, il concetto di spazio rappresenterebbe una entità significativamente importante e ben nota, non solo perché innata negli uomini, ma anche perché molto studiata e ben assestata dalla geometria. Il riferimento alla geometria, in quel tempo, era implicitamente corrispondente al pensiero di Euclide; Kant dava per certa la forza esplicativa della geometria euclidea in riferimento allo studio delle figure e dei corpi presenti nello spazio [B.4]. Tranne pochi studiosi del tempo, la maggioranza delle persone colte identificava il concetto di spazio con quello di geometria. Così fece anche Kant.

Carl Friedrich Gauss, quasi contemporaneo di Kant, però non ebbe mai da condividere tale tesi. Gauss pubblicò poco nella sua vita, ma scrisse e, secondo gli storici della matematica, arrivò per primo a capire i limiti della geometria euclidea, come risulta dai suoi manoscritti. Egli era molto noto non solo come matematico teorico, ma anche come matematico applicato. In quel tempo, infatti, fu il più famoso geodeta d'Europa. Ricevette molte commissioni da signori e prìncipi per la stesura di mappe e carte geografiche di territori del centro Europa. L'accuratezza delle sue misurazioni e le tecniche matematiche che usava lo convinsero che la geometria euclidea applicata alle superfici sferiche era inadeguata. Era il famoso 5° postulato di Euclide il punto debole della costruzione euclidea. Gauss si rese conto che una triangolazione topografica sperimentale fatta con alta precisione non rispettava il 5* postulato. Infatti, sommando gli angoli interni del triangolo "sferico" ABC sperimentale la loro somma risultava maggiore di 180°. Dal 5° postulato, invece, si sarebbero dovuti ottenere 180° (Fig. 1.1).

Poco dopo, ma con pubblicazioni che precedettero quelle di Gauss, Jànos Bolyai e Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, indipendentemente, scoprirono che, abbandonando il 5° postulato, si potevano avere geometrie diverse da quella euclidea e ugualmente coerenti [B.1]. [*Segue al n.* 123]