Centenario della nascita del matematico ungherese Paul Erdős

Antonio Salmeri *(a cura di…)*

Paul Erdős nacque il 26 marzo 1913 a Budapest. È stato uno dei matematici più prolifici ed eccentrici della storia, ha scritto 1485 articoli di matematica tutti di grande levatura e importanza. Ha lavorato e risolto problemi legati alla teoria dei grafi, combinatoria, teoria dei numeri, analisi, teoria dell'approssimazione, teoria degli insiemi e probabilità. Si riporta qui di seguito una pagina di *Mathematical Rewiews* del 1964 dove sono presenti la recensione di un lavoro di Erdős, fatto insieme ad altri tre matematici, e la recensione fatta da Erdős per un lavoro di un matematico ungherese.

Sebbene la sua grandezza come matematico fosse riconosciuta e confermata dai numerosi premi ricevuti, Erdős divenne famoso per il suo stile di vita "vagabondo": tra una conferenza e l'altra girovagava tra i continenti presentandosi alla porta dei suoi colleghi matematici annunciando "la mia mente è aperta". Questa frase significava che egli era pronto a lavorare con il collega e si aspettava che questi lo ospitasse a casa sua durante la loro collaborazione. Erdős era in grado di lavorare anche per venti ore al giorno e ciò spesso metteva a dura prova la capacità di ospitalità dei padroni di casa, che non erano abituati a tali ritmi.

Erdős era una persona ossessionata dalla matematica e non desiderava soldi o fama. Infatti la maggior parte del denaro che riceveva per le conferenze lo donava per cause benefiche, tenendo per sé solo quanto era sufficiente a soddisfare il suo frugale stile di vita. Dava soldi a tutti i mendicanti. Si può dire che semplicemente non si curava affatto di ciò che non era matematica. Non aveva una casa, né moglie, né figli, né lavoro, né hobby e tutte le sue proprietà materiali erano stipate in due logore valigie che portava sempre con sé.

Dai suoi contributi allo sviluppo della teoria di Ramsey e all'applicazione dei metodi probabilistici alla teoria stessa è nata una nuova branca dell'analisi combinatoria derivata in parte dalla teoria analitica dei numeri. Forse il più importante di questi problemi matematici è la congettura di Erdős sulle progressioni aritmetiche: *“Se la somma dei reciproci di una sequenza di numeri interi diverge, allora la sequenza contiene progressioni aritmetiche di lunghezza arbitraria.”* Se fosse dimostrata, risolverebbe molti altri problemi aperti nella teoria dei numeri (anche se l'implicazione principale della congettura, ossia che l'insieme dei numeri primi contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe, è stato dimostrato indipendentemente nel Teorema di Green-Tao).

Erdős è sicuramente il matematico che ha collaborato di più con i suoi colleghi, cambiando il modo di lavorare di molti matematici, e rendendo la matematica una scienza sociale da sviluppare ed elaborare in gruppo. Ha pubblicato lavori con ben 509 matematici diversi. È morto di un attacco di cuore il 20 settembre 1996 durante un congresso a Varsavia.

Mathematical Reviews

Volume 26, 1964

(Part A)

Sponsored by

The American Mathematical Society
The Mathematical Association of America
The Institute of Mathematical Statistics
The Edinburgh Mathematical Society
Société Mathématique de France
Dansk Matematisk Forening
Het Wiskundig Genootschap te Amsterdam
The London Mathematical Society
Polskie Towarzystwo Matematyczne
Unión Matemática Argentina
Indian Mathematical Society
Unione Matematica Italiana
The Society for Industrial and Applied Mathematics

Rényi, A. 3414

On the distribution of values of additive number-theoretical functions.

Publ. Math. Debrecen **10** (1963), 264–273.

Let $f(n)$ be an additive number-theoretic function. Put

$$f^*(p) = f(p) \quad \text{if} \quad |(fp)| \leqq 1,$$
$$f^*(p) = 1 \quad \text{if} \quad |f(p)| > 1.$$

The reviewer proved that if

$$(1) \qquad \sum_p f^*(p)/p \quad \text{and} \quad \sum_p (f^*(p))^2/p$$

both converge, then $f(n)$ has a distribution function [J. London Math. Soc. **13** (1938), 119–127].

The author gives a new analytic proof of this theorem. He uses a method developed by the author and Turán [Acta Arith. **4** (1958), 71–84; MR **20** #3112]. (The reviewer and Wintner proved [Amer. J. Math. **61** (1939), 713–721; MR **1**, 40] that the existence of the distribution function implies the convergence of the two series (1).)

P. Erdős (Budapest)

Rotkiewicz, A. 3415

Sur les nombres premiers p et q tels que $pq|2^{pq}-2$.

Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **11** (1962), 280–282.

L'auteur démontre trois théorèmes sur les nombres pseudo-premiers dont le plus intéressant est le suivant: Pour tout nombre premier p il existe une infinité de nombres composés n, tels que $n\,|\,2^n-2$ et $p\,|\,n$.

A. Schinzel (Columbus, Ohio)

Rotkiewicz, A. 3416

Sur les formules donnant des nombres pseudopremiers.

Colloq. Math. **12** (1964), 69–72.

The positive integer n is pseudoprime if n is composite and n divides 2^n-2. The author presents several formulas which give directly an infinite number of pseudoprimes. Thus, if p is a prime, then $2^{2p-1}/3$ is pseudoprime for $p>3$ and $2^{2p+1}/5$ is pseudoprime for $p>5$. If $F_n=2^{2^n}+1$, then the integer $M=(2^{F_{n_1}}-1)(2^{F_{n_2}}-1)\cdots(2^{F_{n_k}}-1)$ is pseudoprime if $n_1<n_2<\cdots<n_k$ and $n_k<2^n$. Using these results, it is shown that each of the progressions $8k+1$, $8k+3$, $8k+5$ and $8k+7$ contains an infinite number of pseudoprimes. The author has proved, in a less elementary fashion, the corresponding theorem for progressions $ak+b$, where $(a,b)=1$ [C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 2601–2604; MR **29** #61].

J. B. Kelly (Tempe, Ariz.)

Erdős, P.; Gordon, B.; Rubel, L. A.; Straus, E. G. 3417

Tauberian theorems for sum sets.

Acta Arith. **9** (1964), 177–189.

Let $K=\{k_0, k_1, k_2, \cdots\}$ be any sequence of real numbers, $0<k_0\leqq k_1\leqq k_2\leqq\cdots$. Let, for $x>0$, $S(x)$ be the number of solutions of $\varepsilon_0k_0+\varepsilon_1k_1+\cdots\leqq x$, with $\varepsilon_i=0$ or 1 for each i. Put

$$A = \liminf S(x)/x, \qquad B = \limsup S(x)/x,$$
$$\alpha = \liminf 2^n/k_n, \qquad \beta = \limsup 2^n/k_n.$$

The authors show that $A=\alpha$ and $B\geqq 2\alpha-\alpha^2/\beta$. Moreover, they show that for any α, β with $0<\alpha<\beta<2\alpha$, it is possible to find a sequence K such that $B=2\alpha^2-\alpha^2/\beta$.

A direct consequence is that if $A=\alpha>0$, then $B=\beta=A=\alpha$; this was previously obtained by Gordon and Rubel [Illinois J. Math. **4** (1960), 367–369; MR **22** #12084]. It is also shown that $A=\alpha=0$ need not imply $B=\beta=0$.

A further theorem states that if $S(x)-x$ is bounded, then $\sum|k_n-2^n|<\infty$; if the k_n are integers, this means that $k_n=2^n$ for all large n. An extension is given to the case that $S(x)-x$ lies between $-f_1(x)$ and $f_2(x)$, where f_1 and f_2 are positive and non-decreasing, and such that $x-f_1(x)$ and $x+f_2(x)$ are increasing.

A final theorem states that $S(x)$ cannot be asymptotically equivalent to $x^af(x)$, where $0<a<1$, f is continuous, positive, slowly oscillating, and $x^af(x)$ is strictly increasing.

N. G. de Bruijn (Eindhoven)

Sastry, K. P. R. 3418

On the generalised type Möbius functions.

Math. Student **31** (1963), 85–88 (1964).

Let n and k denote rational integers, and let $\prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$ denote the standard form of n. The author defines a function $\mu_k(n)$ as follows: $\mu_k(1)=1$, $\mu_k(n)=0$ if n has a kth power divisor, and otherwise $\mu_k(n)=(-1)^{\Sigma a_i}$. When $k=2$, this function coincides with the Möbius function $\mu(n)$. The author proves six theorems concerning $\mu_k(n)$, all of which are immediate generalizations of theorems valid for $\mu(n)$.

W. Ljunggren (Oslo)

Salmeri, Antonio 3419

Introduzione alla teoria dei coefficienti fattoriali. (English summary)

Giorn. Mat. Battaglini (5) **10** (**90**) (1962), 44–54.

If n and k are positive integers, and if $n>k$, the factorial coefficient $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ is defined as the sum of all products of k different integers chosen from $1, 2, \cdots, n$. Thus in particular $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}n(n+1)$, $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}=n!$; also conventionally $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}=1$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=1$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=0$ $(n<k)$. There is some analogy with binomial coefficients. Properties obtained include the following:

$$\prod_{k=1}^{n}(a+kb) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}a^{n-k}b^k;$$

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n+1)!, \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0;$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} = \sum_{s=k}^{n}s\begin{bmatrix} s-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\binom{n+1-s}{k+1-s}\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}.$$

(The last formula is not proved.) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ is a polynomial in n of degree $2k$, which from examples seems always to contain the factors $(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

I. M. H. Etherington (Edinburgh)

Togashi, Akiyo; Uchiyama, Saburô 3420

On the representation of large even integers as sums of two almost primes. I.

J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I **18** (1964), 60–68.