# GRANDEZZA, QUANTITÀ E NUMERO

1. Il dibattito sollevatosi su questo *Bollettino,* a proposito dell' uso delle parole *grandezza* e *quantità,* mi ha spinto a riflettere alquanto sul valore di esse.

A me pare che male si possa precisare il significato che ha nel linguaggio comune la parola *quantità* nelle domande del tipo: *quanto?* o *quanti, quante?* giacchè le risposte sono di varia specie. Quello che per altro apparisce chiaramente si è che l'oggetto a cui si applica la domanda di quantità è come un termine di paragone che si presenta in questa domanda, acciocchè la risposta dia l'altro termine, che così serve a dare un'idea del primo e che talora è esso stesso un altro oggetto (p. es.: D. Quanto è il grano comprato? R. È un sacco — D. Quanto è il vino che resta? R. Questo recipiente fino al tal... punto, ecc.) talora è un numero associato ad un nome che è o quello stesso a cui si era premesso nella domanda il *quanti* o *quante,* o un altro non ricordato prima (p. es. D. Quanti sono questi libri? R. Sono ventidue (libri) — D. Quanto è questo pane? R. È tre chilogrammi. — D. Che quantità volete d questa stoffa? R. Sei metri, ecc.).

La parola *grandezza* si destina, nel linguaggio comune ad usi simili. Le domande che si fanno con quel nome (o coi derivati) sono del tipo: “ Che grandezza ha quest'oggetto? Quanto è grande? „ Si risponde anche a queste enunciando un secondo termine di paragone, che può essere o il nome di un altro oggetto o l'insieme di un numero e di un nome. P. es. D. Quanto (o come) è grande la persona *tale*? R. Quanto la tale altra — D. Che grandezza ha la tua stanza? R. È di 30 metri quadrati, ecc.

Si osservi bene che tanto il concetto di quantità quanto quello di grandezza non si esplicano *mai* completamente coll'uso di un solo oggetto. essi richiedono ed esprimono il confronto per uguaglianza o disuguaglianza di un oggetto con un altro, che può anche essere quello costituito da un nome fisso al quale si accompagna un numero tale da darci un oggetto che equivalga, in grandezza o in quantità, a quello di cui si parla. Quindi, in sostanza, quando si usano quei nomi si viene a dire che l'oggetto a cui si applicano fa parte di una certa categoria di enti i quali sono paragonabili fra loro per uguaglianza o disuguaglianza, relazioni, queste ultime, che il più di frequente si manifestano mediante l'ordinato uso di uno speciale di essi enti (unità) e dei numeri.

2. Sebbene, come si è ora detto, le due parole *grandezza* e *quantità* si adoprino nell'uso comune per esplicare concetti analoghi, pure mi sembra che non si applichino sempre negli stessi casi. Si suol parlare più spesso di *quantità* quando l'oggetto a cui ci si riferisce è una collezione di oggetti tutti uguali

(unità), che sono o si considerano ordinariamente come separati o separabili l'uno dall'altro: mentre si usa di preferenza la parola *grandezza* per un oggetto quando si considera come un tutto esistente da sè e senza bisogno di ricorrere a suoi componenti, cioè come qualcosa di indivisibile e continuo, o, se divisibile, quando non se ne considerino le divisioni. P. es. di un masso di marmo si dice che è di molta grandezza. Di un sacco di grano, di sale, di farina ecc. si dice che è *molto* o *poco grande*, se si considera come un oggetto senza preoccuparsi della qualità e della struttura della sostanza che vi è contenuta; ma si dice invece che il sacco contiene *poca* o *molta quantità* di sale, o grano ecc. pensando questa seconda volta alla facile disgregazione e divisibilità della sostanza a cui si allude, e alla facile separazione di essa da un mucchio anche maggiore, esprimendo la prima volta l'idea relativa all'ente *sacco*, la seconda volta alla *sostanza* che essa contiene. E si dice p. es. che vedendo il *sacco più o meno grande* si deduce esservi dentro *maggiore* o *minore quantità di sale* o *grano*, e viceversa.

3. Sembra peraltro, a ben riflettere, che il concetto di grandezza apparisca, anche nell'uso comune, alquanto più generale e più vasto di quello di quantità, giacchè si suol parlare anche di *quantità più o meno grandi* e quindi si sogliono classificare per grandezza anche gli oggetti già classificati per quantità, mentre si parla di grandezza anche in oggetti pei quali di quantità non si è soliti parlare. La grandezza è attributo degli enti quando sono, da un conveniente particolar punto di vista, paragonabili, tanto che siano continui quanto che siano discreti o disgregabili, mentre la quantità suol prendersi come attributo in speciali casi, particolarmente quelli in cui è possibile il confronto dell'oggetto con un'unità, di fronte alla quale esso apparisce come collezione.

La grandezza è dunque attributo di confronto più ampio e più libero che non sia la quantità: e dire che un oggetto ha una certa grandezza è dire che esso è paragonabile per uguaglianza o disuguaglianza, per gradazione di maggiore o minore con altri che con esso costituiscono una certa speciale categoria. La quantità, in ogni categoria di oggetti, presuppone, in modo più o meno palese, una certa riduzione all'unità.

4. La domanda: *quanto....?* serve ai due casi, sia a quello in cui si risponde citando, come paragone, la grandezza di un altro oggetto, sia a quello in cui si risponde con un numero che accompagna un nome (espresso o sottinteso). Ciò peraltro non vuol dire, com'altri ha detto, che la quantità sia talora una grandezza talora un numero, giacchè il numero solo non indica nè quantità nè grandezza nell'uso comune, occorrendo invece che egli sia accompagnato da un nome che potrà esser taciuto soltanto se è citato prima, e puramente a titolo di brevità, e a patto che non nascano ambiguità.

5. I nomi di grandezza e di quantità, se si vogliono usare in teoria, devono essere scientificamente definiti, non essendo sufficiente, come si è visto, la nozione assai vaga che se ne ha nella pratica a darne un concetto rigoroso. Teoricamente siamo liberi di definire o no l'uno, o l'altro, o entrambi quei concetti; ma è certo che la non introduzione di essi in teoria impedirebbe lo studio esatto di alcune fra le più importanti proprietà degli oggetti. A rigore basterebbe introdurre il concetto di grandezza, che pare si adatti a rappresentare i casi della pratica, tanto quelli in cui si suole usare il nome di grandezza, quanto gli altri in cui si usa quello di quantità; ma non è contradditorio, volendo, l'introdurre

i due concetti come alquanto distinti, per meglio adattarsi alle esigenze della pratica.

Quanto alle grandezze io credo che siccome di un oggetto si dice che *ha* una grandezza o che *è* una grandezza quando lo si confronta con altre della sua specie, e quindi la qualità di grandezza è non assoluta nell'oggetto ma relativa all'insieme degli oggetti confrontabili, ritengo miglior cosa il definir prima la classe di grandezze, e dir quindi così: " Classe (omogenea) di grandezze è " ogni categoria di enti tali che di due qualunque di essi si debba dire che " sono uguali o disuguali, e se disuguali che uno è maggiore e l'altro minore, " e che per due qualunque di essi ne esista in quella categoria uno da dirsi " loro somma e, se disuguali, uno da dirsi loro differenza; dove l'uguaglianza, " la disuguaglianza, la somma, la differenza sono prese in modo da godere le " ordinarie proprietà „ (1).

Un ente di tale categoria potrà dirsi *una grandezza.*

Tale definizione è ormai accettata quasi generalmente. Forse non ve n'è una, su cui vi sia uguale accordo, per la quantità; ma mi pare che una definizione che si presta assai bene possa essere la seguente (già sotto forma quasi analoga data su questo *Bollettino*):

" *Quantità* è l'insieme di un numero e di un nome a cui quel numero sia applicabile „ (dove è implicitamente inclusa l'idea di numero e quella di corrispondenza fra numeri ed oggetti). In altre parole, quantità è l'insieme della grandezza e del numero che la misura.

6. Con queste definizioni l'uso delle parole grandezza e quantità diviene incensurabile in teoria, dal punto di vista scientifico. Certamente tali concetti non sono da presentarsi in questa forma nelle scuole elementari, ed anzi di essi non è neppure il caso di dare in queste scuole una definizione generale. L'insegnante dovrà limitarsi a portare esempi dei vari casi in cui si usano quei due concetti, dicendo, p. es.: le lunghezze sono grandezze, i pesi sono grandezze, la superficie di una stanza è una grandezza, 5 soldi è una quantità (di soldi) ecc.. tantochè gli allievi imparino piuttosto un elenco di grandezze e di quantità, che la definizione generale di tali idee, la quale dovrà poco a poco nascere spontanea nella mente loro, in base appunto a tali esempi, non restando all'insegnante che il compito di dirigere la mente degli allievi perchè tali concetti nascenti si sviluppino senza errori. Ma perchè l'insegnante non venga meno a

(1) Queste proprietà, che non si sono inserite nella definizione soltanto per brevità, dovrebbero, a rigore, essere enumerate una ad una. Perchè siano verificate tutte basta che lo siano le seguenti, dove A, B, C,.... rappresentano grandezze qualunque della classe:

I. Per l'uguaglianza (=).

$A = A$.

Tutti gli enti uguali ad A (se A è della classe) appartengono alla classe.

Se $A = B$, $B = C$ è $A = C$.

II. Per la disuguaglianza ($>$ e $<$):

Se $A > B$ e $A' = A$, è $A' > B$: e se $B = B'$, è $A > B'$:

Se $A > B$ e $B > C$, è $A > C$:

Se A non è $= B$, sarà $B > A$, o $A > B$.

III. Per la somma ($+$):

Qualunque siano A e B, esiste $A + B$:

Se $B = C$, è $A + B = A + C$:

$A + B = B + A$.

$A + (B + C) = (A + B) + C$.

questo compito, è necessario che abbia egli l'idea chiara di ciò che valgono quei concetti. Perciò se ne è data prima la definizione.

7. Resta la questione se, peraltro, sia utile ed opportuno introdurre nell'insegnamento elementare tutte due le parole *grandezza* e *quantità* oppure una sola di esse, e quale. E qui dichiaro come sia possibile aver diversi pareri, e sia difficile dare un giudizio a cui tutti si acquetino.

A mio credere, il concetto di grandezza prima o poi dev'essere dato, essendo esso il concetto informatore di larga parte dell'edifizio matematico ed essendo quello che, in sostanza, assorbe poi quello di quantità; ma siccome nella realtà i primi esempi di grandezze (almeno sottoponibili a questioni di matematica, e perciò ben precisate e facilmente paragonabili) sono dati per mezzo di nomi uniti a numeri interi, ossia, secondo la definizione ora suggerita per mezzo di quantità, così io trovo opportuno che come idea preparatoria si parli anche della quantità, e di essa prima che della grandezza. Si dirà dunque dapprima: 8 soldi, 3 lire, 4 metri.... sono altrettanti esempi di quantità. Dopo un certo tempo, che i pratici potranno valutare meglio di me, si potrà cominciare ad usare il nome di grandezza, dicendo p. es. che le due quantità della stessa specie 8 soldi e 5 soldi *hanno* diversa grandezza, o *sono* grandezze diverse, e 8 soldi *ha* o *è* maggior grandezza che 5 soldi, e 14 soldi sono *uguali in grandezza* all'insieme di 10 soldi e 4 soldi. Intanto si porteranno esempi di oggetti che sono grandezze ma non si sogliono dire quantità, (secondo l'idea data in generale) e si dirà quindi: un segmento è una grandezza, una superficie è una grandezza ecc., e dopo vari esempi si finirà coll'enumerare tutto ciò di cui si dica che ha una grandezza, e si dirà: tutte le collezioni di oggetti, qualunque quantità essi ne contengano, sono grandezze, tutti i segmenti, le superficie sono grandezze ecc., e perciò anche 8 soldi è una grandezza, 3 lire è una grandezza ecc. Si finirà coll'usare da ultimo il solo nome di grandezza, e si potrà abbandonare addirittura quello di quantità.

In questo modo mi pare che si prenda alla pratica, e subito, quello che utilmente essa può darci e che è meglio accessibile alla mente del bambino, servendocene per preparare il concetto più completo di grandezza, che è quello che dovrà informare tante delle applicazioni della matematica.

Ripeto che quanto ho detto in questo paragrafo è personale opinione mia; ma da questo *Bollettino* veggo con piacere che essa concorda con quella di altri insegnanti.

8. Le grandezze e le quantità si esprimono mediante numeri, ma non sono numeri, essendo il numero soltanto il segno del rapporto di due quantità o grandezza. È errore dunque il confondere le grandezze e le quantità col numero; ma è errore, si badi, non già perchè il numero *non* sia esso stesso grandezza o quantità, o perchè il concetto di numero ripugni a quello di grandezza, bensì perchè il numero è solo un caso particolare della grandezza: cioè il numero è grandezza, senza che ogni grandezza sia un numero. Insisto su quest'asserzione, giacchè se da taluni si crede che possa dirsi che la quantità è un numero (e secondo me, ciò restringe l'idea di quantità) da altri invece si crede che il numero non sia una grandezza, e questo è un vero errore. La classe dei numeri è una speciale classe di grandezze, la più semplice di tutte, nel senso che i numeri godono le proprietà che per definizione abbiamo imposto alle grandezze, e nessun'altra: cosicchè si può dire anzi che il numero sia la grandezza per eccellenza.

Per i numeri, qualunque sia il modo con cui essi si definiscono, i concetti di uguali, di maggiore e di minore, di somma vengono sempre definiti in modo che siano verificate (o per dimostrazione o per teorema, a seconda del modo di introduzione dei numeri) quelle proprietà che nella nota al § 5 abbiamo dato come necessarie per quei concetti: talchè, per la definizione di grandezza, occorre concludere che anche i numeri sono grandezze. Anzi sono altrettante classi di grandezze separatamente, la classe dei numeri interi, la classe dei razionali, e la classe completa dei numeri reali, sia col segno, sia senza.

I numeri si distinguono dalle altre grandezze in quanto per essi si introducono altre operazioni, oltre quelle di cui si parla per la grandezza in generale (addizione col suo derivato sottrazione, multipli, summultipli) cioè la moltiplicazione, la divisione, l'elevazione a potenza, l'estrazione di radice e di logaritmo: il che fa sì che il maneggio dei numeri (calcolo) sia più spedito e facile che non quello delle altre grandezze e che il numero sia (per mezzo della misura) un prezioso ausiliario nello studio delle altre grandezze.

9. Nel precedente paragrafo abbiamo usato la frase: " qualunque sia il modo con cui si definiscono i numeri ". È vero infatti che sono diversi i modi di introdurre il numero, il quale può intendersi sia come ente da sè senza nessun legame necessario con altre grandezze sia come rappresentante le grandezze delle altre classi. Non intendo di esporre qui le particolarità dei due modi di definizione: solo voglio accennare come, a parer mio, nell'insegnamento elementare, ed anche nel secondario, sia da darsi la preferenza al numero che nasce dal concetto di grandezza, e come inoltre, qualunque sia il suo modo di definizione, il numero apparisca sempre un ente tale che rappresenta la grandezza di una classe qualunque, in quelle sole proprietà per le quali si dicono grandezze, in maniera che

1.° ad ogni grandezza di una classe corrisponde un numero ed uno solo.

2.° a grandezze uguali corrispondono numeri uguali.

3.° se per le grandezze A, B, C, si ha che $A = B + C$, fra i numeri a, b, c, corrispondenti si ha la relazione $a = b + c$.

Tantochè si ha poi (o provandolo direttamente, o dimostrandolo come conseguenza di queste proprietà ora citate) che per qualunque relazione fra grandezze che si esprima con qualcuno dei concetti di uguale, maggiore, minore, somma, differenza, multiplo, summultiplo, variabili, convergenti, limiti, sempre si hanno per i numeri le proprietà espresse colle stesse parole. Risiede in questo fatto l'importanza del numero, usato nello studio delle grandezze [1].

Prof. Rodolfo Bettazzi.

[1] Si possono trovare svolte queste varie introduzioni del numero, fra le altre, nelle opere seguenti: Bettazzi. Teoria delle Grandezze. Pisa, Spoerri, 1890. — Peano. Arithmetices principia, nova metodo exposita. Torino, Bocca, 1889. — Burali-Forti. Les propriétés formales des opérations algébriques. (Estratto dalla Revue de Mathématiques, 1899). — Formulaire de Mathématiques. Tome II. N 3.