CASUALITA' o LEGGE MATEMATICA ?

$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$

Antonio Salmeri

Il fatto che una successione di numeri interi consecutivi elevati al quadrato possa scomporsi in due parti nelle quali la somma dei primi termini è uguale alla somma dei secondi membri, sorprende alquanto.
Ma se poi si scopre che vale anche la relazione:

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

è lecito chiedersi se trattasi ancora di casualità, oppure esiste una legge che genera queste sequenze.
* Ne esistono altre?
* Se esistono, come si costruiscono?
* Il numero dei termini del primo membro deve sempre superare di uno i termini del secondo membro?
Cercheremo di rispondere a queste domande con gradualità e iniziamo col fare alcune semplici considerazioni.
L' ipotesi di partenza è:
I termini di questa successione sono quadrati di numeri interi consecutivi, pertanto il numero di termini nei due membri non può essere uguale, né il numero dei termini del secondo membro può essere maggiore del numero dei termini del primo membro.
Quindi possiamo iniziare esaminando il caso in cui il numero dei termini del primo membro supera di uno i termini del secondo membro, pertanto il numero totale dei termini è dispari.
Cominciamo da $m = (n + 1) + n = 3$, ovvero con $n = 1$ e quindi il primo termine è 1.
Sulla sinistra scriviamo fra parentesi la somma dei quadrati dei primi $n+1$ termini della successione ed a destra la somma dei rimanenti n termini.

Per m = 3 si ha:

$$(5 =)\ 1^2 + 2^2 < 3^2\ (= 9)$$
$$(13 =)\ 2^2 + 3^2 < 4^2\ (= 16)$$
$$\mathbf{(25 =)\ 3^2 + 4^2 = 5^2\ (= 25)}$$
$$(41 =)\ 4^2 + 5^2 > 6^2\ (= 36)$$
$$(61 =)\ 5^2 + 6^2 > 7^2\ (= 49)$$

Quindi per m = 3 si ha eguaglianza fra i due membri per n = 1 ed il primo termine della progressione è 3.

Per m = 5 , si ha:

$$(14 =)\ 1^2 + 2^2 + 3^2 < 4^2 + 5^2\ (= 41)$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$(302 =)\ 9^2 + 10^2 + 11^2 < 12^2 + 13^2\ (= 313)$$
$$\mathbf{(365 =)\ 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2\ (= 365)}$$
$$(434 =)\ 11^2 + 12^2 + 13^2 > 14^2 + 15^2\ (= 421)$$
$$(434 =)\ 12^2 + 13^2 + 14^2 > 15^2 + 16^2\ (= 481)$$

Quindi per m = 5 si ha eguaglianza fra i due membri per n = 3 ed il primo termine della progressione è **10**.
Per m = 7 , si ha:

$$(30 =)\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 < 5^2 + 6^2 + 7^2\ (= 110)$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$(1854 =)\ 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 < 24^2 + 25^2 + 26^2\ (= 1877)$$
$$\mathbf{(2030 =)\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2\ (= 2030)}$$
$$(2214 =)\ 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 > 26^2 + 27^2 + 28^2\ (= 2189)$$

Quindi per m = 7 si ha uguaglianza fra i due membri per n = 4 ed il primo termine della progressione è **21**.

Per m = 9, si ha:

$$\mathbf{36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 \quad (= 7230)}$$

con n = 3 ed il primo termine della progressione è 36.

Per m = 11, si ha:

$$\mathbf{55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2 \quad (= 19855)}$$

con n = 4 ed il primo termine della progressione è **55**.

Ma ovviamente questo procedimento non dimostra l'esistenza o meno di infinite *n-ple* che soddisfano la relazione di uguaglianza, e diventa estremamente laborioso nel caso si voglia conoscere a mezzo tentativi quale progressione, ad esempio di 35 termini o anche più, soddisfa la condizione richiesta. Ciò equivale a ricercare per quali valori di n l'equazione seguente:

(1) $x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = (x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \ldots + (x+2n)^2$

ammette radici intere e positive.
Ora, sviluppiamo i quadrati, e riducendo si perviene all'equazione

$$x^2 - 2n^2x - n^2(2n + 1) = 0.$$

la quale ammette, qualunque sia n, le radici: $\boldsymbol{n(2n + 1)}$ e $\boldsymbol{-n}$.
La prima soluzione prova che la surriferita serie può continuarsi indefinitamente. Facendo invece nella (1) $x = - n$ si cade nell'identità

$$(-n)^2 + (-n + 1)^2 + \ldots + (-1)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 .$$

Applicando il valore $n(2n + 1)$, che possiamo scrivere anche $n \cdot m$, dove:
- n sono i termini del secondo membro
- m, ovvero (n +1) + n = 2n + 1, sono i termini totali della progressione

per n = 1 si ha il numero 3 che è il primo dei 2 + 1 = 3 termini
per n = 2 si ha il numero 10 che è il primo dei 3 + 2 = 5 termini
per n = 3 si ha il numero 21 che è il primo dei 4 + 3 = 7 termini
per n = 4 si ha il numero 36 che è il primo dei 5 + 4 = 9 termini
per n = 5 si ha il numero 55 che è il primo dei 6 + 5 = 11 termini

Adesso possiamo trovare, per via analitica, anche qual è la successione di 35, o anche più, termini!

Se m = 35, allora n = 17 ed il primo termine è 595.
Si ha la seguente uguaglianza:

$$(\mathbf{6\,556\,305} =) \; \mathbf{595^2 + \ldots + 612^2 = 613^2 + \ldots + 629^2} \; (= \mathbf{6\,556\,305})$$

(18 termini) (17 termini)

Sarebbe stato abbastanza laborioso trovarlo a tentativi.

Passiamo a calcolare il valore *S(n)* della somma comune ai due membri in funzione di *n*. Prendiamo in esame gli *n* termini del secondo membro della (1). Si ha successivamente, tenendo presente che

$x = n(2n + 1)$ e quindi $x + n = 2n(n + 1)$:

$$S(n) = [2n(n+1) + 1]^2 +[2n(n+1) +2]^2+[2n(n+1) + 3]^2+ \dots + [2n(n+1) + n]^2=$$

$$= n\, 4n^2 (n+1)^2 + 4n(n+1)(1 + 2 + 3 +\dots+ n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) =$$

$$= 4n^2 (n+1)^2 + 2n^2 (n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)/6 =$$

$$= n(n+1)(24n^3 + 36n^2 + 14n + 1)/6 = n(n + 1)(2n + 1)(12n^2 + 12n + 1)/6,$$

(2) $$\mathbf{S(n) = n(n + 1)(2n + 1)(12n^2 + 12n + 1)/6}$$

Quindi con la relazione (2) si possono calcolare i valori già trovati sperimentalmente:

$S(1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 25 / 6 =$ **25**
$S(2) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (12 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 1) / 6 =$ **365**
S(3) = **2030**;
S(4) = **7230**;
S(5) = **19 855**;
. . . . .
S(17) = **6 556 305**

Abbiamo quindi visto che la relazione mostrata nel titolo non è casuale ma è conseguente a un preciso procedimento matematico.
La stessa cosa non può dirsi per le relazioni (presenti in *Matematica dilettevole e curiosa* di Italo Ghersi) qui di seguito riportate:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 10^2 + 11^2,$$

essa non deriva da procedimento matematico, ma è casuale, così come

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 14^2 ,$$

In entrambe le successioni i termini non sono consecutivi.

Desideriamo vedere se possiamo estendere il procedimento trovato alle successioni aventi un numero dispari di termini a quelle aventi un numero pari di termini, ovvero a quelle in cui il primo gruppo ha due termini più del secondo. Seguiamo lo stesso procedimento iniziando con la successione avente come primo termine il numero 1 e come numero di termini totali m = 4:

$$(14 =)\ 1^2 + 2^2 + 3^2 < 4^2\ (= 16)$$
$$(29 =)\ 2^2 + 3^2 + 4^2 > 5^2\ (= 25)$$
$$(50 =)\ 3^2 + 4^2 + 5^2 > 6^2\ (= 36)$$

Quindi per n = 1 ed m = 1 + 3 = 4 non troviamo nessuna uguaglianza per interi consecutivi, ma se modifichiamo l'ipotesi iniziale ed al posto di interi consecutivi cerchiamo più in generale "*numeri che differiscono di una unità*", forse possiamo trovare una uguaglianza dove il primo numero è compreso fra 1 e 2.
Cercare questa successione implica trovare la soluzione di questa equazione:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2$$

Sviluppando si perviene all'equazione $x^2 = 2$ e quindi $x = \sqrt{2}$, che è compreso fra 1 e 2. La successione è pertanto la seguente:

$$(11 + 6\sqrt{2} =)\ \mathbf{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} + 2)^2 = (\sqrt{2} + 3)^2}\ (= 11 + 6\sqrt{2})$$

Esaminiamo il caso di m = 6, l'equazione da risolvere è la seguente:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 = (x + 4)^2 + (x + 5)^2$$

Sviluppando si perviene all'equazione:

$$2x^2 - 6x - 27 = 0 \quad \text{e quindi} \quad x = (3 + \sqrt{63})/2 \approx 5{,}4686\ldots$$

Si può continuare così indefinitivamente.

Riferimenti

1. **Atti della Società Italiana "Mathesis"**. Adunanza del 18 marzo 1938 – XVI. In un'aula del R. Istituto Tecnico Vittorio Emanuele II di Genova, la Sezione Ligure della Mathesis si riunisce alle ore 17 per lo svolgimento del seguente o. d. g.*:*
- *Proposta di un concorso .*
- *Varie.*

Sono presenti il Presidente prof. Loria e i Soci proff. Bonistalli, Burnengo, Civinini, Lamberti, Mulè, Nannei, Pretti, Quarleri, Ricci, Segre, Serra, Severini, Traversa, Zicavo.

. . . . .

A questo punto il Presidente, osservando che l'ordine del giorno della seduta e l'ora lo consentono, richiama l'attenzione dei convenuti sopra le seguenti identità numeriche:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 , \quad 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$
$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$
$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2 ,$$

ottenute quasi sperimentalmente, di recente, da un collaboratore degli *Scripta mathematica*, estendendo la nota relazione $3^2 + 4^2 = 5^2$.

L'oratore si è chiesto se la serie riferita non ammetta continuazione ed ha fatto osservare che tale domanda equivale a ricercare per quali valori di n l'equazione seguente:

(1) $x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = (x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \ldots + (x+2n)^2$

ammetta radici intere e positive.

2**. IL BOLLETTINO DI MATEMATICA**. *Giornale scientifico didattico per l'incremento degli studi matematici nelle scuole medie con una sezione storico-bibliografica. Fondato nel 1902 e diretto fino al 1939 dal prof. ALBERTO CONTI. Continuato dai proff. Enrico Nannei ed Enrico Grassi. Fasc. II – Marzo 1940 – XVIII.*

Sull'estensione della relazione pitagorica $3^2 + 4^2 = 5^2$

L'illustre prof. Loria, in una comunicazione da lui fatta nel 1938alla sezione liguredi *Mathesis* e pubblicata poi sugli atti di questa Associazione a pag. 33, dimostrò che, dato un intero-positivo n qualsiasi, esistono 2n + 1 interi consecutivi tali che la somma dei quadrati dei primi n+1 numeri eguaglia quella dei quadrati degli n rimanenti; ma egli non disse quale era il valore comune delle due somme. Orbene io mi permetto di colmare qui tale lacuna con l'effettuare una delle due somme, ad esempio quella dei quadrati degli ultimi n numeri.

. . . . .

Napoli, 27 gennaio 1940 – XVIII Prof. Enrico Ducci