Federigo Enriques e la didattica della matematica
Parte 1 di 2

Paolo Bussotti

1. ***Inquadramento del problema***

Federigo Enriques (1871-1946) fu uno dei più grandi matematici italiani; i suoi contributi alla geometria algebrica, soprattutto nel periodo 1890-1920, furono fondamentali e la sua figura divenne una delle più rispettate ed ammirate dai matematici europei. Egli fu un illustre rappresentante di quel clima cosmopolitico tipico di molti ambienti colti in Europa tra la fine dell'Ottocento e la prima guerra mondiale, insieme a matematici e fisici quali – solo per menzionarne alcuni molto noti - Mach, Poincaré, Hilbert, Painlevé[1]. Quanto ai matematici italiani, Giuseppe Veronese, Vito Volterra, Tullio Levi-Civita, Giuseppe Peano, Guido Castelnuovo, Corrado Segre, Cesare Burali Forti, Beppo Levi, e altri ne potrebbero essere menzionati, fecero parte, insieme ad Enriques, di questo clima. Tutti questi personaggi, pur con vedute molto diverse della loro disciplina, tanto che non mancarono polemiche anche molto aspre tra di loro, avevano comunque l'idea che fosse loro dovere contribuire a rendere l'Italia un paese all'avanguardia sul piano scientifico e parte di un contesto europeo in cui la cultura scientifica potesse e dovesse svolgere un ruolo progressivo. Invero già i matematici della generazione precedente erano stati impegnati,

[1] A Enriques come figura europea è specificamente dedicato il volume collettaneo Bussotti, 2008.

in seguito all'unificazione dell'Italia, nell'organizzazione delle istituzioni culturali e scientifiche italiane. Si pensi a un personaggio quale Luigi Cremona, che dette contributi molto importanti alla geometria proiettiva, ma fu anche senatore, ministro e impegnato in studi di didattica della geometria[2]. Questa quindi è la situazione socio-culturale che la generazione di Enriques ereditò ed il clima in cui lavorò il matematico livornese. Oltre a ciò, è necessario ricordare che Enriques fu appassionato di problemi scientifici ed epistemologici fin dagli anni della sua formazione universitaria e che le sue conoscenze nell'ambito della filosofia scientifica e della gnoseologia erano quelle di un esperto ricercatore[3]; le sue idee furono innovative e, anche in questo caso, si inserirono in un dibattito europeo a fianco di nomi come quelli di Ernst Mach ed Henry Poincaré. Enriques scrisse un testo fondamentale su quest'ordine di questioni, *Problemi della scienza* (1906). Siamo quindi in presenza di un intellettuale la cui formazione e i cui interessi vanno al di là dell'attività di ricerca matematica e convergono a creare un quadro complesso ed articolato. Ed è all'interno di questo quadro che può esser compresa la concezione che Enriques aveva della didattica della matematica e, di conseguenza, la sua attività in questo senso. Benché certe schematizzazioni siano in qualche modo sempre arbitrarie, l'impegno didattico di Enriques può essere ricondotto a quattro tipi di attività:

---

[2] Sull'attività didattica di Luigi Cremona, si veda Di Sieno, 2006; Brigaglia, 2006. I due lavori presentano anche una cospicua bibliografia sull'argomento.

[3] Al rapporto che in Enriques sussiste tra matematica e filosofia è dedicata gran parte di Bussotti, 2006 e Nastasi, 2010. Per ulteriori indicazioni bibliografiche, rimandiamo ai due lavori citati.

1) impegni di tipo politico-istituzionale, cioè ruolo svolto da Enriques nell'università, nelle associazioni di insegnanti e nei rapporti col mondo politico per promuovere: a) estensione delle ore dedicate alle materie scientifiche nelle scuole superiori italiane; b) formazione degli insegnanti; c) strutturazione dei corsi scientifici nelle scuole e nelle università;

2) teoria della didattica: il contributo fondamentale di Enriques in questo settore fu l'articolo del 1921 *Insegnamento dinamico*[4], un vero classico nel suo genere;

3) composizione di manuali scolastici ed universitari. Enriques scrisse due manuali che sono pietre miliari rispettivamente per l'insegnamento della geometria euclidea nelle scuole superiori e della geometria proiettiva all'università: si tratta degli *Elementi di geometria*, scritti nel 1903 con Ugo Amaldi e di *Lezioni di geometria proiettiva* (1898, seconda edizione con importanti aggiunte, 1903). Questi però non furono certo gli unici manuali scritti dal matematico livornese: in genere insieme ad Amaldi, compose molti libri per le scuole superiori, differenziando la materia trattata a seconda della scuola a cui il manuale era rivolto. Redasse inoltre il testo *Lezioni di geometria descrittiva* per l'università[5];

4) cura di testi utilizzabili come supporti didattici. In questa categoria rientra un vero capolavoro che è *Questioni riguardanti le matematiche e-*

---

[4] L'articolo fu pubblicato sul "Periodico di Matematiche", s. IV, I, 1921, pp. 6-16. Oggi è consultabile anche in Enriques, 2003, pp. 1-14 e in "*Euclide.Giornale di matematica per i giovani*", Documenti di Storia della Didattica.

[5] L'elenco di tutte le opere di Enriques è presente (col materiale già ripartito secondo il piano editoriale) sul sito dell'Edizione Nazionale delle Opere di Federigo Enriques: enriques.mat.uniroma2.it/. Il sito riporta anche un buon elenco dei lavori scritti su Enriques.

lementari, in varie edizioni[6]. Enriques è il curatore dell'ingente opera ove compaiono, con la firma di diversi autori, articoli che affrontano problemi classici quali l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di quinto grado, le questioni legate alla costruibilità con riga e compasso, il problema dei massimi e dei minimi, i problemi isoperimetrici, ecc. Tutto questo materiale storico viene riproposto in una forma spendibile sul piano didattico, mostrando così la valenza educativa della storia della matematica e la sua importanza per apprendere i concetti fondanti della disciplina. Pur con un'accentuazione in parte diversa, nella stessa direzione delle *Questioni*, va l'*Euclide*, edizione commentata degli *Elementi*, curata da Enriques insieme ad altri collaboratori. .

Anche altre opere hanno un grande valore didattico, quali per esempio il fondamentale Enriques-Chisini[7], usabile come testo di geometria algebrica per gli studenti dei corsi più avanzati di matematica. Tuttavia in opere come questa gli aspetti di ricerca si affiancano a quelli didattici e, in qualche caso, sono preponderanti. Quindi la quadripartizione proposta sembra esauriente quanto all'impegno di Enriques nel settore didattico. Il suo lavoro, in questo come in altri campi, fu enorme.

Nel presente articolo, daremo alcune notizie relative all'attività istituzionale di Enriques, accenneremo ai fondamenti teorici del suo pensiero didattico e concentreremo l'attenzione su un aspetto specifico del punto 3): gli *Elementi di geometria* di Enriques-Amaldi.

[6] Si veda in bibliografia Enriques, 1900; Enriques, 1912, Enriques, 1924-27.
[7] Enriques-Chisini, 1915, 1918, 1924, 1934.

2. *Gli impegni istituzionali di Enriques per la didattica*

Enriques cominciò la propria attività didattica il 20 gennaio 1894 quando tenne la prima lezione per il corso di geometria proiettiva e descrittiva all'università di Bologna, quale professore incaricato, ruolo che ricoprì per due anni, dopo i quali, vinto il concorso con scadenza 25 settembre 1896, conseguì il posto di professore straordinario per tali materie. Entrò in ruolo il primo gennaio 1897[8]. A partire dagli anni iniziali del '900, Enriques cominciò a interagire attivamente col mondo della scuola: nel 1902 era stata fondata da Giuseppe Kirner e Gaetano Salvemini la Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media, FNISM, all'interno della quale il matematico livornese fu attivo fin dall'inizio: in occasione del primo congresso nazionale (Firenze, 1902) intervenne su problemi giuridici ed organizzativi e nel quinto congresso, quello di Bologna del 1906, presentò la relazione *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze*. Come ricorda Moretti, in attesa di una auspicabile riforma generale dell'università (come vedremo tra breve) "Enriques prospettava un'articolazione in due bienni del corso universitario della facoltà di Scienze, la distinzione tra laurea 'scientifica' e laurea 'pedagogica', il rafforzamento dei corsi di magistero […] con apposito tirocinio didattico"[9]. Solo in questo modo sarebbe stato possibile

---

[8] Per seguire le vicende che portarono Enriques a vincere il concorso per la cattedra di geometria proiettiva e descrittiva a Bologna, è possibile consultare Nastasi, 2010, pp. 72-84.

[9] Moretti, 2003, pp. 15-91. Citazione p. 29. Per i rapporti tra Enriques e la FNISM, si veda anche Tomasi, 1982, pp. 223-245, in particolare pp. 236-239. Quanto al contributo dato dai geometri algebrici italiani alla formazione degli insegnanti, si può consultare il sintetico e chiaro contributo Giacardi, 2010.

formare un corpo docente degno di una paese all'avanguardia sul piano culturale-scientifico. Enriques ebbe incarichi ufficiali in seno alla FNISM. Furono anni intensi in cui il dibattito sulla scuola e sull'educazione fu assai vivace, gli anni della Commissione reale per la riforma della scuola secondaria, nominata nel 1905 dal ministro Leonida Bianchi, presieduta da Paolo Boselli. Responsabile per la riforma dei programmi di matematica fu Giovanni Vailati, personalità molto vicina ad Enriques. Il lavoro della Commissione, pur con discussioni e divergenze di opinioni sulle idee di Vailati relative all'insegnamento della matematica, portò negli anni 1909-1910 (dopo la prematura scomparsa di Vailati) a una proposta di riforma, che però non fu mai attuata[10]. Il dibattito sull'insegnamento della matematica era uno dei temi "all'ordine del giorno" nella comunità matematica internazionale, tanto che, in seguito a un'idea di Davide Eugene Smith, al congresso internazionale dei matematici svoltosi a Roma dal 6 all'11 aprile 1908, fu creata la CIEM, Commissione internazionale per l'insegnamento della matematica. Presidente fu Felix Klein, delegati per l'Italia furono Castelnuovo, Enriques e Vailati (Scorza, dopo la morte di Vailati nel maggio 1909). Severi ricorda che il cospicuo lavoro della Commissione dal 1908 al 1914 fu messo per iscritto in vari volumi, di contenuto molto analitico, non si fu però in grado di curare una visione sintetica d'insieme a causa della guerra. Soprattutto grazie all'opera di Castelnuovo, alcuni delle idee elaborate dalla Commissione, furono comunque alla base

[10] Il lettore in proposito può consultare, Giacardi, 2006, pp. 1-63, in particolare, pp. 26-38.

dell'insegnamento della matematica del Liceo Moderno, istituito nel 1911 dal Ministro Luigi Credaro[11].

In quegli anni, gli interessi di Enriques per la didattica universitaria non furono inferiori rispetto a quelli che egli ebbe per le scuole superiori: nel 1906 fu fondata la Società Filosofica Italiana, di cui Enriques fu presidente dal 1907 al 1912[12]. Nel 1907 il matematico livornese fondò una delle più importanti riviste pubblicate in Italia "Rivista di scienza", dal 1910 "Scientia". Egli ne fu direttore dalla fondazione al 1915 e poi di nuovo dal 1930 al 1938. La rivista fu per eccellenza interdisciplinare, su di essa scrissero articoli scientifici ed epistemologici i massimi scienziati mondiali e può davvero essere vista come una della massime espressioni della concezione enriquesiana: 1) connessione tra i vari rami del sapere; 2) importanza della storia della scienza in chiave educativa; 3) artificiosità della separazione tra storia della scienza e scienza; 4) rilevanza della filosofia scientifica. Sempre nel 1906 fu fondata l'Associazione nazionale fra i professori universitari. La partecipazione del matematico livornese alla vita della Associazione fu estremamente attiva, tanto che dal 1913 al 1915 ne fu presidente. Al 1907 e 1908 risalgono quattro importanti contributi di Enriques alla riforma della università italiana, due scritti nel 1907 e due nel 1908[13]. In estrema sintesi si trattava di questo, per le facoltà scientifiche e

[11] In proposito si veda Giacardi, 2006, pp. 38-47.

[12] Un testo pionieristico sui rapporti tra Enriques e i filosofi italiani, in particolare su quelli con Benedetto Croce, è Pompeo Faracovi, 1984. Per le questioni specifiche degli anni in cui Enriques fu presidente della Società Filosofica Italiana, si veda anche Nastasi, 2010, pp. 139-150, che riporta anche una buona bibliografia sull'argomento.

[13] Si veda Enriques, 1907 (1), Enriques, 1907 (2), Enriques, 1908 (1) e Enriques 1908 (2).

letterarie: Enriques riteneva negativa la totale mancanza di libertà di scelta da parte dello studente, messo di fronte a programmi di studio obbligatori, negativa era anche l'eccessiva frammentazione disciplinare che impediva di cogliere i nessi comuni tra le varie discipline della matematica. Pericoloso l'eccesso di tecnicismo e di astrattismo che minacciava di oscurare l'autentico nucleo concettuale dei vari rami delle scienze. A tutto ciò aveva contribuito anche il metodo dei concorsi universitari, basati sulla artificiosa e, al contempo, rigida suddivisione nella varie cattedre e classi di concorso. Enriques vedeva come soluzione auspicabile la creazione di una facoltà filosofica, che non fosse certo la mera giustapposizione delle vecchie facoltà letterarie e scientifiche, ma che formasse le giovani generazioni, stabilendo un numero minimo obbligatorio di corsi e poi dando libertà allo studente di scegliere il proprio percorso. Il coesistere di libertà di scelta, di serio impegno e di una preparazione incentrata sulla comprensione dei concetti piuttosto che su tecniche specifiche sarebbe stata la necessaria propedeutica per un buon letterato, per un buon fisico e per un buon matematico. Scrive Enriques:

> Stabilita un'unica laurea filosofica, che sancisce con un esame complessivo il coronamento di studii diversi, si può permettere allo studente di accedervi per una via qualsiasi, scegliendo egli stesso i corsi da frequentare. Sia fissato soltanto in generale un numero minimo di corsi, e consentito ad ogni singola Facoltà filosofica di giudicare la serietà del programma che lo studente si propone, ed in certi casi di prescrivere l'ordine in cui gli studii scelti dallo studente debbano essere percorsi.[14]

[14] Moretti, 2003, p. 50. Gran parte dell'articolo di Moretti è una precisa disamina delle posizioni di Enriques sulla didattica e la struttura dell'università (in particolare pp. 30-63). Enriques entrò anche nel problema relativo al modo migliore di reclutare i docenti universitari, per questo argomento rimandiamo al più volte citato articolo di Moretti.

A fianco della facoltà filosofica avrebbero dovuto esistere lauree tecniche per le professioni: politecnici per ingegneri, per medici e le scuole normali di magistero per insegnanti. Anche in seguito alla legge del 1909 che stabiliva un aumento degli stipendi dei professori universitari, regolamentava le ore minime di lezione e l'età pensionabile (rispettivamente 50 lezioni annue e 75 anni), sanciva in maniera definitiva la differenza tra materie fondamentali e complementari e stabiliva una quota parte di professori scelti per nomina parlamentare, le discussioni sull'assetto dell'università furono accese nell'ambito della Associazione nazionale tra professori universitari[15]. L'intervento di Enriques in occasione della assemblea generale della Associazione tenuta a Roma nel gennaio 1911 fu estremamente critico: sul sistema dei concorsi che favoriva il particolarismo, sulla crisi della libera docenza, sulla struttura delle facoltà e sulla mancanza di autonomia delle università. La posizione di Enriques risultò però minoritaria e tra l'altro fu del tutto accantonata l'idea di istituire la facoltà filosofica[16].

Gli impegni didattico-istituzionali di Enriques dopo la prima guerra mondiale furono legati in modo essenziale alla Mathesis, Società italiana di scienze matematiche e fisiche, fondata nel 1895, grazie all'iniziativa di Rodolfo Bettazzi (che ne fu il primo presidente dal 1896 al 1900), di Aurelio Lugli e di Antonio de Zolt. La Mathesis è stata la più importante associazione che riunisce insegnanti di scuola superiore. La Società aveva già avuto un ruolo significativo nel dibattito sull'insegnamento della matematica svoltosi subito prima della grande guerra; Enriques ne divenne presi-

[15] Moretti, 2003, p. 38.
[16] Moretti, 2003, pp. 57-59.

dente nel 1919 e rimase in carica per ben 13 anni, fino al 1932. Inoltre per 17 anni, dal 1921 al 1938 fu direttore del "Periodico di Matematiche", organo della Mathesis. Come era già accaduto con "Scientia", le concezioni di Enriques segnarono in maniera fondamentale l'orientamento del "Periodico" in quegli anni. Subito dopo la guerra, vi fu il problema di uniformare i programmi di matematica delle province redente, Trento e Trieste, programmi che erano in gran parte diversi da quelli delle scuole italiane. Il congresso Mathesis nel 1919 si tenne a Trieste e fu specificamente dedicato al suddetto problema: tramite un intenso lavoro, il neopresidente Enriques riuscì ad aumentare notevolmente in numero degli iscritti alla Mathesis che, in quel periodo, triplicarono e, al discorso inaugurale del congresso, sottolineò il problema dei programmi di matematica delle province redente, ma soprattutto insistette sulla valenza formativa ed educativa della matematica e sulla necessità di accrescere il numero di ore dedicate alle materia scientifiche nella scuola italiana[17]. Fu un periodo di grande impegno e speranze, di lì a due anni Enriques pubblicò *Insegnamento dinamico*. Come si è accennato, il primo decennio del '900 aveva visto un ampio movimento, in cui possono essere annoverati molti scienziati, matematici e docenti, tendente a rendere l'Italia un paese scientificamente evoluto. In sostanza però la maggior parte delle speranze erano andate deluse. Il periodo post-bellico rinvigorì queste speranze che subirono però un duro ed emblematico colpo d'arresto con la riforma Gentile. Il tema è molto studiato, rimandiamo quindi alla letteratura spe-

[17] Come riferimento al problema dei programmi di matematica per le province redente, rimando a Giacardi, 2006, pp. 47-54.

cialistica[18]. Ci limitiamo a ricordare che la cosiddetta riforma Gentile è costituita da cinque decreti, il primo emanato il 31.12.1922 e l'ultimo l' 1.10. 1923, vi sono inoltre decreti integrativi. Come ricorda Livia Giacardi[19], la Mathesis, per bocca del presidente Enrques reagì a una riforma che penalizzava in maniera pesante e definitiva la formazione scientifica nella scuola italiana. In particolare:

1) l'abbinamento dell'insegnamento della matematica e della fisica nelle scuole superiori non doveva implicare una riduzione del monte-ore complessivo dedicato alle due materie; 2) nel liceo classico il programma di matematica era stato eccessivamente ridotto, così gli studenti che dal liceo classico si fossero iscritti alle facoltà scientifiche, avrebbero avuto notevoli difficoltà, almeno iniziali; 3) il programma di matematica del neonato liceo scientifico era stato ridotto rispetto a quello del soppresso liceo moderno e della sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico; 4) nel liceo femminile non si insegnavano né matematica, né fisica, né scienze naturali. Come noto, nessuna delle richieste della Mathesis, che si era riunita in congresso a Livorno nel settembre del 1923, fu accolta. Enriques, che dal 1922 si trasferì all'università di Roma, prima come docente di matematiche superiori, poi, dal 1923, di geometria superiore, ebbe relazioni piuttosto articolate con Gentile: ovviamente non condivideva il

[18] In appendice a Giacardi 2006, pp. 325-370 sono riportati gli estratti inerenti, all'istruzione scientifica, dei provvedimenti legislativi emanati in Italia a partire da Decreto Coppino (10.10.1867) per giungere alla riforma Gentile (estratto R. D. 14.10.1923). Segue un confronto tra le ore dedicate all'istruzione scientifica nelle scuole di vari stati e tavole sull'organizzazione scolastica italiana. Il testo presenta anche un'abbondante elenco di pubblicazioni sull'argomento.

[19] Giacardi, 2006, pp. 54-63.

ruolo assegnato da Gentile alla istruzione scientifica, ma ne condivideva la venerazione per il mondo antico (in particolare greco) e per una educazione classica delle future classi dirigenti; quindi le sue prese di posizione nei confronti di Gentile, pur spesso critiche, non furono mai intransigenti. D'altronde Enriques, nel 1926, fu scelto da Gentile per redigere le voci matematiche dell'*Enciclopedia Italiana*.

Negli anni '20 Enriques lavorò alacremente per diffondere in Italia la storia della scienza, materia la cui valenza didattica era, per il matematico livornese, rilevante. Sul piano istituzionale, egli fu in grado di creare a Roma l'Istituto nazionale per la storia delle scienze fisiche e matematiche, che divenne attivo dal 1923 (prima riunione 30 maggio) e che all'inizio ebbe finanziamenti notevoli. Anche la Mathesis partecipò attivamente all'aspetto finanziario. Compiti dell'istituto erano, tra gli altri: 1) raccolta di documenti; 2) divulgazione di idee e ricerche scientifiche; 3) istituzione di una biblioteca; 4) pubblicazione di testi rilevanti per la storia della scienza. Enriques fu il presidente del Comitato scientifico dell'Istituto. Nel 1925-26 nasce, per iniziativa di Enriques la Scuola di perfezionamento nella storia delle scienze presso l'Università di Roma, con corsi tenuti da vari docenti sulla storia della matematica, fisica, medicina, chimica, geografia, teoria cellulare e concetti scientifici. Nel 1926 venne fondato l'Istituto nazionale di Storia della Scienza, con l'attiva partecipazione di Enriques. Nell'Istituto nazionale si fondevano l'Istituto di Enriques e la Federazione Nazionale tra le Società, gli Enti, gli Insegnanti e i Cultori di Storia delle Scienze di Mieli. A causa dei forti disaccordi tra Enriques e Mieli, disaccordi che erano già di vecchia data e che si auspicava superati, e i finanziamenti sempre più ridotti, il lavoro dell'Istituto non decollò[20]. Con le leggi razziali Enriques fu allontanato dall'insegnamento. Fu reintegrato in ruolo solo nel 1944, due anni prima della morte.

3. Insegnamento dinamico *e idee correlate*

A partire dalla seconda metà dell'Ottocento il problema della didattica della matematica fu avvertito in tutta la sua importanza: si pensi a movimenti quali il fusionismo (di cui parleremo nel prossimo paragrafo) e all'impegno profuso sulla questione da grandi matematici, anche in Italia[21]. Enriques non fu quindi un'eccezione in questo senso. Egli non fornì solo specifici contributi alla didattica della matematica, ma espose un'idea educativa generale che mirava alla formazione della persona, prima ancora che all'apprendimento della matematica. L'articolo *Insegnamento dinamico* è lo scritto in cui Enriques espose la propria concezione. Come sottolinea egli stesso all'inizio del contributo, non sono nuove le singole idee esposte, ma piuttosto il quadro generale prospettato. L'assunto iniziale da cui muove Enriques è che l'insegnamento deve essere di tipo maieutico, non deve cioè consistere di una serie di nozioni che il

---

[20] Per i rapporti tra Enriques e Mieli, si veda Abbri, 2008. Specificamente per i problemi legati ai rapporti Enriques-Mieli e all'Istituto di Enriques, si rimanda a Nastasi, 2010, pp. 150-173.

[21] A proposito del fusionismo, si veda; Bolondi, 2005, pp. 145-176, in particolare pp. 160-166; Borgato, 2006, pp. 125-157. Sui manuali di geometria in Italia tra unificazione e inizio del '900, segnaliamo, oltre ai due succitati contributi: Giacardi, 2003, pp. XCVII-CXXIII; per il periodo precedente, Pepe, 2006, pp. 1-63. Sull'impegno didattico di Guido Castelnuovo, si veda: Gario, 2006, in Giacardi, pp. 239-262. Tutti questi articoli presentano anche un'abbondante bibliografia.

docente impartisce all'allievo, ma il discente deve partecipare in modo attivo e l'insegnante deve aiutarlo a conquistare il sapere, non imporgli passivamente l'apprendimento di concetti e tecniche presentate come già complete e immodificabili. Il tema su cui poi ruota tutto il ragionamento di Enriques è quello del rapporto tra intuizione e logica nell'insegnamento della matematica, ma la sua argomentazione, con poche modifiche, può essere estesa anche ad altre materia: il matematico livornese sostiene che è un errore separare intuizione e logica come facoltà distinte dell'intelletto, si tratta piuttosto "[…] di due aspetti inscindibili di un medesimo processo attivo, che si richiamano l'un l'altro"[22]. Criticando quegli insegnanti e teorici che ritengono la mente dei giovani più intuitiva che logica, e, quindi, bisognosa di ricevere un insegnamento rigoroso sui fondamenti dell'aritmetica e della geometria, Enriques risponde, in sostanza, che chi la pensa in questo modo cade in un grave errore: credere che l'intuizione che serve in matematica si identifichi con una sorta di confusa fantasia. Tutto il contrario: l'intuizione o intuito matematico è intuizione logica. Enriques porta in proposito due esempi molto chiari: 1) la costruzione di una figura geometrica che risolva un problema – per esempio, la comprensione che per risolvere un dato problema di geometria sintetica piana, occorre tracciare certe linee – richiede un'intuizione guidata dalla logica perché anzitutto occorre comprendere come riportare i dati del problema su una figura iniziale, poi bisogna sapere quali metodi e procedure si possono usare, e anche questa è una questione legata alla logica del ragio-

[22] Enriques, 1921, 2003, p. 3.

namento e alla comprensione della logica interna dell'universo in cui ci stiamo muovendo - in questo caso "il mondo piano euclideo" determinato dai cinque assiomi -, occorre poi senz'altro una intuizione che porta a comprendere quali figure tracciare, oltre a quelle fornite dai dati, al fine di risolvere il problema. Si tratta però di una intuizione che è incanalata nell'alveo di una determinata logica. Poi certo non si può pretendere che si giunga alla soluzione tramite operazioni già meccanizzate in partenza, né questo sarebbe auspicabile per educare la mente del giovane al ragionamento; 2) nel passaggio dalla geometria sintetica a quella analitica, molti studenti hanno difficoltà a comprendere cosa significhi tradurre i dati di un problema in equazioni. Poi sanno ripetere la spiegazione e risolvere l'equazione, ma il nucleo concettuale del procedimento spesso rimane oscuro e messi davanti a problemi simili, non sanno come affrontarli, infatti "[…] comprendere significa divenir atti ad applicare"[23]. Ora, continua Enriques, da un certo punto di vista sembra di avere a che fare con un mera questione logica: trascrivere certi dati in equazioni; tuttavia se manca una comprensione del senso generale della trascrizione, diviene difficile eseguire un'operazione che sembrerebbe puramente logica. Ecco quindi che anche qui entra insieme all'aspetto logico quello intuitivo: dinamicamente. Enriques ha così mostrato che per risolvere problemi, come quelli di geometria presentati in forma sintetica, per i quali si pensa comunemente che serva solo l'intuizione, è invece indispensabile anche un grande lavoro logico, e, viceversa, l'aspetto intuitivo (legato alla com-

---

[23] Ivi, p. 4.

prensione) è importante anche in geometria analitica, ove invece sembra prevalere un mero meccanismo di tipo logico. Questo non significa che logica ed intuizione siano la stessa cosa, ma che sono due facoltà dell'intelletto interrelate e che non si può pensare di educare l'una a scapito dell'altra. Correlato alla malintesa separazione tra logica ed intuizione, vi è una analisi non abbastanza raffinata di cosa si intenda per logica: in genere, sostiene Enriques, non viene fatta una distinzione che invece è fondamentale: esiste una "logica in piccolo" e una "logica in grande"[24]: la logica in piccolo è: 1) l'analisi del processo del pensiero che ha portato ad enucleare gli elementi-base di una certa disciplina; 2) l'analisi di questi elementi-base. Mentre la logica in grande è lo studio delle connessioni tra le varie proposizione, primitive e derivate, del sistema e lo studio dei rapporti di un dato sistema con altri sistemi. Così, per esempio, è solo la logica in grande che fa comprendere quali siano le proposizioni realmente basilari della geometria euclidea (somma degli angoli di un triangolo, teorema di Pitagora ecc.), mentre la presentazione di una mera catena deduttiva che da un teorema fa passare all'altro, cosa che è tipica della logica in piccolo, non fa comprendere la vera natura dell'intero perché mette tutte le proposizioni su un piano di parità, e rischia quindi di oscurare quelle proposizione che forniscono le proprietà essenziali. Enriques continua asserendo che egli è ben lontano dal criticare la logica in piccolo (tanto che ha dedicato studi ai fondamenti della matematica ed a questioni logiche), ma in corsi preuniversitari, è indispensabile anzitutto fornire un

[24]Ivi, p. 5.

corretto quadro d'insieme della struttura che si sta trattando. Ora Enriques si pone un altro problema: quale è il modo corretto di insegnare la logica in piccolo: come sempre, facendo vedere come essa viene applicata e il modo migliore per conseguire questo scopo è l'applicazione nella pratica matematica. Vi è un metodo dimostrativo in cui l'aspetto intuitivo è davvero ridotto al minimo: si tratta della dimostrazione per assurdo. Allora l'allievo potrà comprendere l'importanza e l'uso della logica in piccolo analizzando dimostrazioni per assurdo e il modo migliore per introdurre l'argomento è quello di capire come e perché nel corso della storia si è ricorsi alle dimostrazioni per assurdo. In questo modo si comprende il contesto in cui si inserisce la logica in piccolo, come strumento della logica in grande del sistema studiato (geometria euclidea, o algebra o geometria proiettiva, ecc.). Si giunge qui ad un altro dei *topoi* del pensiero enriquesiano: l'importanza della storia della scienza (della matematica, in questo caso). La storia (intesa come storia dei concetti e delle tecniche matematiche) è fondamentale perché pone lo studente di fronte a come erano i problemi quando nacquero e come li affrontarono uomini di genio in epoche in cui le tecniche divenute standard per un dato settore della matematica non erano ancora nate. Quindi la storia della matematica è un mezzo importante, non il solo ovviamente, che pone il giovane di fronte alle proprie capacità di affrontare un problema ed indicarne possibili vie di soluzione. Tanto più che problemi fondamentali affrontati in passato dai grandi matematici non sono mai "lettera morta". Scrive anzi Enriques: "infatti non è possibile che ripensiamo una difficoltà che una volta abbiamo vinto, senza scoprire nello stesso problema qualche altra difficoltà, che si risolve in una comprensione nuova e più alta”[25]. Quindi l’approccio storico aiuta a contestualizzare e comprendere molti concetti e procedure matematiche e la piena comprensione dei fondamenti concettuali della disciplina è il passo fondamentale e, probabilmente, il più difficile. Scrive infatti Enriques: “[…] perché è falso che le cose elementari su cui torniamo per insegnarle, sieno facili al confronto della scienza superiore il cui possesso ci rende oggi orgogliosi davanti ai nostri scolari […]. Non vi è iato o scissura tra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell’albero dalla tenera pianticina”[26].

Infine: il maggior ostacolo che molti vedono all’insegnamento dinamico (in cui non viene insegnata alcuna tecnica senza che ne siano comprese le basi concettuali) concerne la memoria ed il suo uso. Molte tecniche, le cui basi concettuali sono complesse, devono essere insegnate in tenera età in modo che, intanto, siano apprese meccanicamente, e poi, quando l’alunno sarà più grande siano richiamate e ne siano capiti i concetti-base. Enriques, riferendosi ad alcuni studi fisiologici (pp. 9-10), afferma anzitutto che la memoria non è immagazzinamento e ricezione passiva di dati, ma implica un coordinamento attivo per essere usata. Quindi l’insegnamento dinamico è ben lungi dal negare l’importanza della memoria. La soluzione viene prospettata in questi termini: una tecnica matematica complessa non può esser pienamente compresa in tenera età, quindi – ri-

[25] Ivi, p. 13.
[26] Ivi, p. 13.

conosce Enriques – è fisiologico che vengano insegnate tecniche non del tutto comprese. I concetti fondamentali devono però esserne spiegati e chiariti. L'autore di *Insegnamento dinamico* fa l'esempio del calcolo algebrico (p.10): egli riconosce utile insegnare tale calcolo prima che l'allievo possa comprendere i vasti usi dell'algebra; tuttavia il significato delle lettere messe al posto dei numeri e le regole di combinazione dei segni devono essere fatti comprendere. Occorre cioè "far lavorare" il ragazzo, anche in questo caso, attivamente e non imporgli una tecnica in modo passivo.

Questi i fondamenti del pensiero didattico enriquesiano. Benché sia qui impossibile ripercorrere l'intero itinerario del pensiero di Enriques, è interessante fare un cenno alle profonde connessioni che vi sono tra le concezioni didattiche di Enriques e le sue idee in altri settori: il matematico livornese si occupò – oltre che, ovviamente, di geometria algebrica e proiettiva – di fondamenti della geometria, del ruolo della logica entro la matematica, di gnoseologia ed epistemologia, del ruolo della storia della scienza nel pensiero, del rapporto tra struttura della mente e partizione delle discipline matematiche. Quali sono le connessioni tra questo nucleo concettuale e le idee enriquesiane nel settore della didattica? Il problema relativo al ruolo da attribuire alla logica entro la matematica ed al rapporto tra logica ed intuizione è stato uno dei temi cui Enriques ha dedicato maggiore attenzione. È opportuno sgombrare il campo da eventuali equivoci: Enriques è stato sostanzialmente estraneo alla logica matematica ed è stato del tutto estraneo allo sviluppo che questa disciplina ha avuto da quando la ricerca si è orientata al tentativo di dimostrare la coerenza dell'aritmetica[27]. Sarebbe però un grave errore credere che la logica della matematica si esaurisca nella logica matematica: vi sono una pluralità di aspetti che riguardano la struttura della matematica e il modo in cui sono ideati ed insegnati i concetti matematici. È a questi temi che si è dedicato Enriques. In *Problemi della scienza*, vi è un lungo capitolo, il terzo, interamente dedicato alla logica, ove Enriques tratta in modo diffuso il tema della definizione in matematica, il ruolo degli assiomi e il problema della reciproca compatibilità ed indipendenza degli assiomi. Estende poi il discorso alla logica filosofica affrontando questioni quali la valenza del principio di causa, il ruolo e la validità del principio di continuità e il rapporto tra logica ed esperienza, fino a toccare, sia pur per sommi capi, nella sezione conclusiva del capitolo, la fisiologia della logica, cioè il modo in cui la mente umana forma i concetti ed esegue le operazioni logiche. Del resto i rapporti relativi alla genesi psicologica dei postulati della geometria erano già stati affrontati da Enriques nel 1901 in quello che è uno dei suoi primi articoli di carattere gnoseologico, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati in geometria*. E il legame tra intuizione e logica nei fondamenti della matematica è chiarito nel modo migliore da questo passo che leggiamo nella prima pagina di *Lezioni di geometria proiettiva*: "La scelta degli elementi fondamentali della geometria non è *a priori* determinata; si scelgono come tali gli elementi più semplici rispetto alla *intuizione psicologica*, cioè quelli di cui la nozione si trova formata nella nostra mente

[27] Sui rapporti tra Enriques e gli sviluppi della logica matematica più legati ad Hilbert, il lettore può consultare Bussotti, 2008, pp. 69-100.

come contenuto del concetto di spazio: tali sono p. e. il punto, la retta e il piano"[28]. Quindi l'intuizione psicologica fornisce gli assiomi, dà cioè forma e contenuto all'aspetto logico della geometria. Pertanto logica ed intuizione psicologica sono legate fin dall'inizio del processo conoscitivo. In seguito il ragionamento continuerà in modo logico, ma l'intuizione, si direbbe in questo caso costruttiva più che psicologica, serve comunque "[…] a lumeggiare concetti e ragionamenti più astrusi[…]"[29], così che l'intuizione diviene un supporto della logica. Del resto, per Enriques, vi sono diversi tipi di intuizione legati alle nostre facoltà sensorie, in particolare ai muscoli è legata l'intuizione che porta agli assiomi della geometria metrica e alla vista quella che porta agli assiomi della geometria proiettiva[30]. Quindi l'apparato assiomatico (cioè la base logica) delle diverse geometrie dipende dalle nostre facoltà cognitive. Data questa concezione generale a cui si è accennato, si comprende come, per Enriques, sul piano didattico sia assurda una separazione netta tra logica ed intuizione: se le nostre facoltà psicologico-intuitive forniscono i principi logici base della matematica e la nostra capacità intuitivo-costruttiva diviene poi supporto fondamentale per la comprensione della logica interna del discorso matematico, ne consegue che una distinzione draconiana tra aspetti logici ed intuitivi è deleteria sul piano didattico. Ciò non implica affatto che non debba essere insegnato il concetto perspicuo di dimostrazione, anzi su questo Enriques è decisamente rigorista, ma che sul piano didattico gli aspetti in-

---

[28] Enriques, 1904 (prima edizione 1898), 1996, p. 1.
[29] Ivi, pp. V-VI.
[30] Sulla questione, si può consultare Bussotti, 2006, pp. 63-69.

tuitivi e contenutistici sono fondamentali per la corretta comprensione dei concetti, proprio in virtù della psicogenesi dei concetti matematici. Quindi la concezione del ruolo didattico della intuizione e della logica è comprensibile nell'alveo della concezione generale enriquesiana, è cioè un tassello di un intero modo di pensare di cui la didattica è un aspetto. Quanto si è visto mette in correlazione il pensiero educativo di Enriques con le sue idee sulla logica, i fondamenti della matematica, la gnoseologia e la fisiologia. L'altro elemento essenziale della didattica enriquesiana è il ruolo della storia della scienza. Anche in questo caso si tratta di un tassello di una concezione più generale relativa al valore attribuito dal matematico livornese alla storia della matematica e della scienza. Enriques ha sempre avuto interesse per la storia della matematica e della scienza, ma, nel corso degli anni questo si è andato ampliando ed approfondendo. Già nella seconda edizione delle *Lezioni di geometria proiettiva*, una breve ma interessante appendice storica era stata posposta alla trattazione, gran parte degli articoli pubblicato da Enriques sulle *Questioni riguardanti le matematiche elementari* sono, come vedremo, di tipo storico-didattico. Significativamente nella "prefazione alla ristampa della seconda edizione" di *Problemi della scienza*, egli scrive, riferendosi alle proprie concezioni: "Infatti, se le idee non sono sostanzialmente mutate, pure la naturale evoluzione di esse ha generato in me una nuova coscienza filosofica, che tende soprattutto ad approfondire l'aspetto storico dei problemi: al lume della quale molti sviluppi dovrebbero qui essere illuminati con nuovo studio"[31]. In seguito Enriques scriverà con Santillana la *Storia del pensiero scientifico* (1932, il mondo antico) e il *Compendio di storia del pensiero scientifico* (1937) ed approfondirà le concezioni filosofiche di Parmenide, interpretandole come basate su concetti geometrici. È noto che egli sostenne sempre una storia concettuale della scienza piuttosto che una di tipo filologico. Per cui ben si comprende il valore dell'elemento storico per la didattica quale tassello di una concezione più generale entro cui esso si inserisce: Enriques introdusse cioè l'elemento storico in una concezione fondamentalmente trascendentale fino a giungere a concepire la storicità della nozione di verità che una teoria scientifica può esprimere[32]. Risulta a questo punto chiaro come la didattica rientri in quella che potremmo chiamare filosofia enriquesiana, come ne sia una parte e una parte importante. Mi sembra quindi che, giustamente, Tina Tomasi sottolinei come, quanto alla didattica, non si possa parlare di una dottrina sistematica di Enriques, ma di un indirizzo educativo che privilegia l'uso della ragione[33]. Ciò dipende appunto dal fatto che l'indirizzo educativo rientra all'interno di una concezione complessiva e che non era interesse di Enriques creare una specifica e dettagliata dottrina didattica, ma indicare uno sfondo educativo. Tutto ciò è coerente con gli inviti di Enriques agli insegnanti a "rendere più filosofica la vostra scienza" e sulla sua insistenza sulla necessità di istituire la facoltà filosofica di cui si è parlato nel paragrafo precedente.

[31] Enriques, 1925, seconda edizione (prima edizione 1906), p. XI.
[32] In proposito si veda le "Conclusioni" in Bussotti, 2006, pp. 103-116.
[33] Tomasi, 1982, pp. 244-245.

Dopo la pubblicazione di *Insegnamento dinamico* e dopo l'avvento del fascismo, vi sono almeno altri due scritti di Enriques concernenti la didattica che devono essere ricordati: 1) *Il significato umanistico della scienza nella cultura nazionale*, 1924 e 2) *La riforma Gentile e l'insegnamento della matematica e della fisica nella scuola media*, 1927. Il quadro di fondo non cambia rispetto a quello descritto, ma alcune considerazioni devono esser fatte: nel lavoro del 1924 Enriques sostiene che il vero valore delle teorie scientifiche non deve esser ricercato nelle tecniche a cui poi queste si applicano, ma la scienza deve esser coltivata per se stessa, come l'arte. In questo è il suo vero valore. L'esperienza poi in parte conferma e in parte corregge la teoria. Invero Enriques ha sempre sostenuto il valore umanistico della matematica e della scienza e della loro didattica – lo si è visto nel paragrafo precedente ed in questo - , tuttavia il tono usato in questo contributo sembra in qualche modo un adeguamento all'imperante idealismo, forse per evitar polemiche in funzione di quanto poi scrive Enriques nella seconda parte dell'articolo e cioè che l'insegnamento delle discipline fisiche e matematiche è una necessità della cultura umanistica e non deve esser trascurato nella scuola italiana, come insegna proprio l'esempio del naturalismo e del Rinascimento italiano. Più profondo e sofferto l'articolo del 1927, epoca in era ormai chiaro che la riforma Gentile sarebbe stata immodificabile o modificabile in tempi molto lunghi: Enriques premette che la scuola non è informativa, ma formativa e che egli, coerentemente con lo spirito che anima la riforma Gentile, si è sempre mantenuto fedele a questa idea anche nelle proprie lezioni universitarie. Tuttavia, se è discutibile l'accorpamento delle cattedre di matematica e fisica nei licei, senz'altro sbagliata è la riduzione di ore subita dagli insegnamenti scientifici: proprio perché la scienza ha una valenza umanistica fondamentale, tale ruolo non può esser né insegnato né compreso con poche ore a disposizione; è proprio l'educazione umanistica in senso complessivo che esige una seria educazione scientifica. Come sostiene Gentile stesso, il giovane deve essere abituato a lavorare per conto proprio, ma questo risultato può esser conseguito solo con un numero sufficiente di ore a disposizione. Enriques conclude che lo spirito della riforma Gentile è buono, ma che occorrono piccole modifiche affinché la scuola esprima al meglio questo spirito. Tali modifiche dovrebbero anzitutto consistere in un incremento delle ore dedicate alle materie scientifiche. Sappiamo come è andata a finire.

Passiamo, nella seconda parte, ad analizzare in concreto come Enriques applicava le sue idee educative nelle redazione dei manuali scolastici.

Bibliografia

Abbri, F., 2008, *Mieli, Enriques e la storia della scienza*, in Bussotti, P. (a cura di), pp. 101-119, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Bolondi, G., 2005, *Geometria proiettiva, geometria descrittiva e geometria dello spazio nella scuola italiana*, in Franciosi, M., (a cura di), *Prospettiva e geometria dello spazio*, pp. 145-176, Sarzana, Agorà, 2005.

Borgato, M. T., 2006, *Il fusionismo e i fondamenti della geometria*, in Giacardi (a cura di), pp. 125-157, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Brigaglia, A., 2006, *Da Cremona a Castelnuovo. Continuità e discontinuità nella visione della scuola*, in Giacardi (a cura di), pp. 159-179, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Bussotti, P., 1997, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della matematica*, Pisa, ETS.

Bussotti, P., 2006, *Un mediocre lettore. Le letture e le idee di Federigo Enriques*, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Bussotti, P. (a cura di), 2008, *Federigo Enriques e la cultura europea*, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Bussotti, P., 2008, *Enriques e Hilbert: fondamenti della matematica e questioni conoscitive*, in Bussotti, P. (a cura di), 2008, pp. 69-100, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Cantù, P., 1999, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Milano, Unicopli.

Cauterio, M.-Gerla, G., 1988, *Un testo scolastico del 1897, gli "Elementi di geometria" di Giuseppe Veronese*, in "Periodico di matematiche", 1-2, 1988, pp. 17-32.

De Paolis, R., 1884, *Elementi di geometria*, Torino, Loescher.

Di Sieno, S., 2006, *Luigi Cremona e la formazione tecnica pre-universitaria nella seconda metà dell'Ottocento* in Giacardi (a cura di), pp. 99-124, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Enriques, F, 1898, seconda edizione 1904, *Lezioni di geometria proiettiva*, Bologna, Zanichelli, ristampa anastatica della seconda edizione, Bologna, Zanichelli, 1996.

Enriques, F. (a cura di), 1900, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna, Zanichelli

Enriques, F., 1900, *Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principi della geometria*, in Enriques, F. (a cura di), 1900, pp. 1-31, Bologna, Zanichelli.

Enriques, F., 1906, seconda edizione 1925, *Problemi della scienza,* Bologna, Zanichelli.

Enriques, F., 1907 (1), *L'ordinamento delle università in rapporto alla filosofia*, in *Atti del I Convegno della Società Filosofica Italiana (Milano, 20-21 settembre 1906)*, Bologna, Cuppini.

Enriques, F., 1907 (2), *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze*, in *Atti del V Congresso della FNISM (Bologna, 25-28 settembre 1906)*, Pistoia, Sinibuldiana.

Enriques, F., 1908 (1), *L'Università italiana. Critica degli ordinamenti in vigore*, in "Rivista di Scienza", a. II, vol. III, pp. 133-147.

Enriques, F., 1908 (2), *L'Università italiana. La riforma dell'Università italiana*, in "Rivista di Scienza", a. II, vol. III, pp. 362-372.

Enriques, F. (a cura di), 1912, seconda edizione 1924-27, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Bologna, Zanichelli. Ristampa anastatica della seconda edizione, Bologna, Zanichelli, 1983.

Enriques, F., 1912, *Sull'insegnamento della geometria razionale,* in Enriques, F. (a cura di), 1912, pp. 19-35, Bologna, Zanichelli.

Enriques, F.-Chisini, O, 1915, 1918, 1924, 1934, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna, Zanichelli. Ristampa anastatica, Bologna, Zanichelli, 1985.

Enriques, F., 1921, *Insegnamento dinamico*, consultato in Enriques, *Insegnamento dinamico*, pp. 1-14, 2003, La Spezia, Agorà.

Enriques, F., 1924, *Il significato umanistico della scienza nella cultura nazionale*, in "Periodico di matematiche", s. IV, vol. IV, pp. 1-6.

Enriques, F., 1927, *La riforma Gentile e l'insegnamento della matematica e della fisica nella scuola media*, in "Cultura fascista", a.II, n.8, s, II, pp.3-5.

Enriques, F-Amaldi, U., 1903, *Elementi di geometria*, Bologna, Zanichelli.

Gario, P., 2006, *I corsi di Guido Castelnuovo per la formazione degli insegnanti*, in Giacardi (a cura di), pp. 239-268, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Euclide, 1970, *Elementi,* a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino, UTET.

Giacardi, L., 2003, *I manuali per l'insegnamento della geometria elementare in Italia tra Otto e Novecento*, in Chiosso, G (diretto da), *TESEO. Tipografi e editori scolastico-educativi dell'Ottocento*, pp. XCVII-CXXIII, Milano, Editrice Bibliografica.

Giacardi, L. (a cura di), 2006, *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Giacardi, L., 2006, *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità all'avvento del Fascismo*, in Giacardi, 2006, pp. 1-63, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Giacardi, L., 2010, *Il contributo della Scuola italiana di geometria algebrica alla formazione degli insegnanti nella prima metà del Novecento*, consultabile al sito http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/gasca/LGiacardiFormazioneIns.pdf.

Guarducci, A., 1912, *Della congruenza e del movimento*, in Enriques, F. (a cura di), 1912, pp. 93-122, Bologna, Zanichelli.

Moretti, M., 2003, *"Insegnamento dinamico". Appunti sull'opera scolastica di Federigo Enriques (1900-1923)*, in Enriques, 2003, pp. 15-91, La Spezia, Agorà.

Nastasi, T., 2010, *Federigo Enriques e la civetta di Atena*, Pisa, PLUS.

Pepe, L., 2006, *Insegnamenti matematici e libri elementari nella prima metà dell'Ottocento. Modelli francesi ed esperienze italiane*, in Giacardi, 2006, pp. 65-98, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Pompeo Faracovi, O. (a cura di), 1982, *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, Livorno, Belforte.

Pompeo Faracovi, O., 1984, *Il caso Enriques*, Livorno, Belforte.

Salmeri, A., 2009, *Abbinamento della matematica e della fisica. I commenti nel tempo,* Periodico di matematiche, n. 3, pp. 15-21.

Tomasi, T., 1982, *La questione educativa nell'opera di Enriques*, in Pompeo Faracovi (a cura di), *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, pp. 223-250, Livorno, Belforte.

Veronese G., 1891, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padova, Tipografia del Seminario.

Veronese, G., 1897, *Elementi di geometria a uso dei licei e istituti tecnici (I biennio)*, Padova, Drucker.

Sito dell'Edizione Nazionale delle opere di Federigo Enriques: http://enriques.mat.uniroma2.it/

Federigo Enriques e la didattica della matematica
Parte 2 di 2

Paolo Bussotti

4. *La didattica della geometria: gli* Elementi di geometria *di Enriques-Amaldi*

4.1. *Il quadro generale*

La seconda metà dell'Ottocento vide in Europa un intenso dibattito sulla didattica della geometria: i matematici italiani furono tutt'altro che insensibili al problema, ed ebbero anzi un ruolo importante nel complesso quadro concettuale che si delineò all'epoca. Convergevano infatti nella didattica della geometria non solo questioni educative, ma anche problemi fondazionali interni alla geometria stessa; in estrema sintesi: dopo un periodo iniziale che va dall'opera di Desargues alla fine del Settecento, il pieno sviluppo della geometria proiettiva, prima con Monge e poi con Poncelet, poneva in termini nuovi il problema del rapporto tra geometria dello spazio e geometria del piano; se tradizionalmente la geometria spaziale veniva presentata come un'estensione di quella piana, la geometria proiettiva sembrava rovesciare il rapporto tra le due: è la geometria piana che risulta una particolarizzazione di quella dello spazio ed è lo spazio a risultare l'ambiente fondante della geometria e non più il piano. Già la dimostrazione di teoremi fondamentali della geometria piana, come quello di Desargues, risulta molto semplice se si ricorre allo spazio e molto complessa se ci si limita al piano, ma soprattutto la legge di dualità nello spazio consente una particolarizzazione "naturale" al piano, così che l'ambiente-base della geometria proiettiva è lo spazio. Questi risultati furono conseguiti, oltre che grazie ai lavori di Monge e Poncelet, in virtù dei profondi studi dei geometri tedeschi Steiner, Moebius e, soprattutto von Staudt, il quale fondò la geometria proiettiva in forma puramente sintetica e in modo rigoroso. Tutto ciò portò a pensare che, anche per quanto riguarda la geometria elementare, la trattazione della geometria dello spazio potesse, per certi argomenti, esser condotta di pari passo con quella della geometria piana, e che fosse legittimo usare concetti e costruzioni spaziali per dimostrare teoremi di geometria piana e non solo il viceversa. Il movimenti didattico che sosteneva questa tesi fu chiamato *fusionismo* (fusione di geometria piana e spaziale) e in Italia furono pubblicati alcuni manuali fusionisti, il più importante dei quali è la grande opera *Elementi di geometria* di Riccardo De Paolis[34]. La fusione tra geometria del piano e dello spazio non fu certo l'unico tema didattico all'ordine del giorno: in Italia era stata influente la tradizione didattica che risale agli *Elementi di geometria* di Legendre, testo stimolante per molti versi, ma in cui è cospicuo il ricorso all'algebra, in cui, in pratica viene eliminata la teoria delle proporzioni – vero e proprio cuore degli *Elementi* di Euclide – e in cui, per scelta e ammissione dello stesso autore, il rigore viene spesso sacrificato alla semplicità argomentativa. Dopo l'unità d'Italia era stato fatto un serio tentativo di ritorno a Euclide, voluto da Luigi Cremona e il cui ri-

[34] Per i manuali di geometria in Italia tra unificazione e inizio secolo e per un esame del fusionismo, rimandiamo alla letteratura di nota 21.

sultato più importante furono l'edizione degli *Elementi* di Betti-Brioschi, testo che però era in pratica una riproposizione del capolavoro euclideo. Alcuni tra i maggiori matematici di fine Ottocento erano tuttavia insoddisfatti di una mera riproposta di Euclide: molti ritenevano che comunque alcune delle acquisizioni più moderne sui fondamenti della geometria, sul problema del continuo e su come presentare la teoria delle grandezze potessero essere sfruttati anche in chiave didattica, inoltre la similitudine e l'uso delle proporzioni rappresentavano spesso un grande problema per gli studenti e se ne cercava una riproposizione che potesse, in qualche modo, mitigare le difficoltà di una pura presentazione alla Euclide. Né va sottovalutata l'importanza di quei concetti dell'assiomatica astratta che da diversi anni erano in discussione nell'ambiente matematico e che trovarono una presentazione e, in buona parte, una collocazione definitiva nei *Fondamenti di geometria* di David Hilbert. In questo periodo in Italia furono pubblicati molti buoni manuali, ma il più originale fu, oltre al già citato testo di De Paolis, l'opera di Giuseppe Veronese *Elementi di geometria*, seguiti da un'Appendice, testo profondo in cui convergono molte delle ricerche condotte da Veronese sulla teoria delle grandezze e che avevano trovato esposizione sistematica nella monumentale opera del geometra italiano *Fondamenti di geometria*[35]. Inoltre, per definire l'ugua-

[35] I *Fondamenti di geometria* (Veronese, 1991) sono un testo estremamente complesso in cui le idee di Veronese sono esposte in modo completo. La trattazione geometrica è preceduta da una introduzione di circa 250 pagine inerente ai concetti di gruppo, serie, numero e grandezza. Veronese introduce un sistema numerico non archimedeo e, nel prosieguo, tratta la geometria non archimedea. Come lavori sui *Fondamenti*, segnalo Bussotti, 1997 e Cantù, 1999.

glianza, De Paolis basa il proprio testo sulla nozione di movimento e Veronese su quella di corrispondenza. Il movimento rigido senza deformazione è implicito nella geometria euclidea, ma Euclide lo usa solo in tre dimostrazioni (I, 4, il cosiddetto primo criterio di uguaglianza dei triangoli, I, 8, terzo criterio di uguaglianza – il secondo in realtà in Euclide – e III, 24: segmenti circolari simili posti su rette uguali sono uguali); tutte le altre sue dimostrazioni sono condotte in modo indipendente dal concetto di movimento, analogamente non è usato il concetto di corrispondenza per stabilire l'uguaglianza tra figure. Veronese poi, pur rifiutando complessivamente l'approccio fusionista, per molti argomenti tratta insieme geometria piana e spaziale. Quindi questi due manuali presentano la geometria euclidea in una forma parecchio diversa da quella di Euclide. Enriques conosce molto bene la situazione e nel 1903, con la collaborazione di Ugo Amaldi, pubblica i suoi celebri *Elementi di geometria* i quali, pur tenendo conto delle esperienze didattiche che abbiamo brevemente descritto, sono *sostanzialmente* di stile euclideo, *sostanzialmente*, perché in realtà Enriques si guarda bene dal riproporre in maniera pedissequa Euclide; ristruttura anzi gli argomenti in modo da creare un quadro unitario con un proprio stile ben preciso, ma si mantiene in sostanza fedele a Euclide. Nella seconda sezione di questo paragrafo analizzeremo la struttura del manuale di Enriques e faremo dei brevi confronti con le trattazioni di De Paolis e Veronese. L'Enriques-Amaldi, affiancato da una serie di scritti sulla didattica della geometria pubblicati nelle *Questioni riguardanti la geometria elementare*, ebbe un enorme successo e segnò l'impostazione di gran parte dei manuali che furono pubblicati in seguito, anche se questi ultimi furono ben lontani dal livello del capostipite.

Il matematico livornese aveva in precedenza dato un altro contributo fondamentale alla didattica della geometria: le *Lezioni di geometria proiettiva*. Il testo va molto al di là del normale intento dei manuali universitari e rappresenta un manifesto di un ben preciso modo di affrontare i problemi della geometria proiettiva: quello che risale a von Staudt. Corrado Segre, quando Enriques presentò le *Lezioni* in un concorso ebbe addirittura a dire che il volume doveva essere considerato un titolo scientifico e non didattico. Uno studio esauriente della didattica della geometria in Enriques imporrebbe quindi anche l'analisi delle *Lezioni*, tuttavia qui per motivi di spazio non possiamo affrontare l'argomento[36].

4.2. Gli *Elementi di geometria* di Enriques-Amaldi e le questioni connesse

I principi direttivi che informano l'Enriques-Amaldi sono chiari: 1) la geometria euclidea con le sue costruzioni, i suoi problemi specifici e le sue procedure dimostrative legate alle costruzioni fornisce "[…] il più efficace strumento educativo delle intelligenze, più conforme al senso della realtà geometrica, fino a che un esercizio opportuno abbia reso le menti capaci di scernere nei concetti astratti l'immagine di una realtà più generale"[37]. Del resto però: 2) l'insegnamento della geometria, pur restando conforme a Euclide può "[…] avvantaggiarsi dei progressi portati, anche nel campo degli elementi da una critica più matura e dagli sviluppi recenti delle alte

[36] Su ciò rimando a Bussotti, 2006, pp. 30-56.
[37] Enriques, 1900, p. I.

matematiche”[38]; 3) benché il rigore delle dimostrazioni sia necessario, la critica logica dei fondamenti non deve risultare eccessiva: è necessario che il giovane prima comprenda tramite problemi e teoremi quali siano le proprietà essenziali dell’universo geometrico e solo in un secondo tempo, per chi prosegue gli studi matematici all’università, si potranno porre questioni fondazionali. Così, in chiave didattica, non vi è inconveniente a moltiplicare il numero di assiomi. In altri termini: il problema dell’indipendenza assiomatica trascende l’insegnamento della geometria nelle scuole superiori, mentre è importante evitare il ricorso a ipotesi sottintese perché, oltre ad essere potenziali fonti di contraddizioni, impediscono al discente di lavorare solo con i dati a disposizione, il che è un aspetto fondamentale del lavoro del matematico. Scrive Enriques: “una difficoltà si presenterebbe solo quando di essi [gli assiomi] volessero ricercarsi, con critica minuta, i rapporti logici, in omaggio al criterio d’indipendenza, mentre un più ampio esercizio dell’osservazione intuitiva, tendente a rimuovere ogni ipotesi sottintesa, sembra altamente educativo”[39]; 4) a proposito del fondamentale concetto di uguaglianza o congruenza, De Paolis e altri geometri, seguendo l’indirizzo di Helmholtz hanno definito due figure uguali o congruenti se sono sovrapponibili col movimento[40]. Enriques, nel 1900[41], afferma che, se di per sé questa scelta può essere accettabile, nondimeno le proprietà del movimento, assunto come concetto fondamentale dovrebbero essere formulate in modo logicamente

---

[38] Ivi, p. II.
[39] Ivi, p. II
[40] Si veda, per esempio, De Paolis, 1884, p. 8.
[41] Enriques, 1900, p. V.

ineccepibile, il che non è stato fatto limitandosi ai concetti della geometria elementare, ma solo ricorrendo all'algebra astratta, grazie alla teoria dei gruppi di Sophus Lie[42]. D'altronde Veronese introduce in altro modo il concetto di uguaglianza: prima definisce la nozione di corrispondenza univoca e del medesimo ordine per un gruppo di oggetti (*Elementi*, p. 8), successivamente, con l'assioma relativo all'esistenza della retta (postulato II, pp. 10-11), caratterizza come primitiva la relazione di uguaglianza e congruenza tra segmenti, enucleandone come caratteristiche: a) se due segmenti sono uguali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine i segmenti stessi e le relative parti corrispondenti, b) un segmento non è uguale a una sua parte, c) un segmento AB è uguale a BA. Veronese definisce poi in questo modo l'uguaglianza generale tra figure riferendosi al concetto di corrispondenza univoca e del medesimo ordine e a quello di uguaglianza tra segmenti: "Due figure rettilinee *F* e *F'* si dicono *eguali* quando si può stabilire tra i loro punti una corrispondenza univoca e del medesimo ordine tale che ai segmenti dell'una corrispondono i segmenti dell'altra. E si dicono *eguali* due figure non rettilinee quando sono figure corrispondenti di figure rettilinee eguali. Questa corrispondenza tra due figure eguali chiamasi *corrispondenza di eguaglianza*"[43]. Quindi l'ugua-

[42] Scrive Enriques: "[…] si dovrebbero formulare logicamente le proprietà del movimento stesso, assunto come concetto fondamentale, il che non sembra siasi fatto fino ad ora negli elementi, in modo esente da critiche" (Ivi, p, V). La questione "[…] ha ricevuto oggi una risposta più precisa e soddisfacente nella trattazione gruppale di Sophus Lie" (Enriques, 1900, pp. 1-31. Citazione, p. 22). Una chiara e sintetica analisi di questo problema si ha in Guarducci, 1912, pp. 93-122, in particolare, pp. 99-100.
[43] Veronese, 1897, p. 23. Sugli *Elementi* di Veronese, si veda l'articolo Cauterio-Gerla, 1988, pp. 17-32.

glianza viene ricondotta al concetto più generale ed astratto di corrispondenza. Enriques fa una scelta diversa: non definisce in generale il concetto di uguaglianza. Quanto ai segmenti e agli angoli parla senz'altro di uguaglianza, limitandosi a considerare la sovrapponibilità come un criterio sperimentale per stabilire se due segmenti sono uguali, ma niente che abbia a che fare con la definizione[44]. Si legge infatti esplicitamente: "Noi adoperiamo il movimento per spiegare che cosa sia l'uguaglianza tra segmenti ed angoli, e verificarne le prime proprietà. Il movimento è per noi un'operazione fisica; e perciò l'uguaglianza non viene così definita logicamente, ma assunta come un concetto ricavato dall'osservazione (*concetto fondamentale*)"[45]. Definisce poi l'uguaglianza caso per caso, così, per esempio due triangoli sono definiti uguali se hanno uguali ordinatamente i lati e gli angoli (pp. 47-48). Questa scelta, che potremmo definire "minimalista", è del tutto coerente con l'idea di fondo che ha Enriques: in didattica, specialmente nelle scuole superiori, non serve un'analisi raffinata dei concetti fondamentali, come quello di uguaglianza; come si è detto, per Enriques è importante che si prenda confidenza e pratica con l'oggetto di studio, la critica dei principi e dei concetti verrà in un secondo tempo. La soluzione si rivela azzeccata perché, senza perdere in perspicuità, il testo enriquesiano è molto più fruibile e semplice dei manuali di De Paolis e Veronese. Le difficoltà che il discente deve affrontare riguarderanno gli esercizi e la "pratica geometrica", non ciò che Enriques ritiene raffinatezze logiche poco adatte ad esser presentate in una scuola supe-

[44] Enriques-Amaldi, 1903, pp. 9-11 per i segmenti, pp. 33 per gli angoli.
[45] Ivi, p. IV.

riore; 5) riguardo alla fusione tra geometria piana e geometria spaziale, l'Enriques-Amaldi non è un testo fusionista: nella prefazione viene sottolineata la fecondità della fusione "nelle regioni alte della scienza" (p. X. Evidentemente riferendosi alla geometria proiettiva) e si parla con grande stima dei lavori fusionisti di De Paolis e, più tardi di Lazzeri e Bassani, nonché di Veronese[46], però la facilità di rappresentare le figure piane in confronto a quelle spaziali, fa propendere gli autori per una scelta non fusionista (p. XI). In sostanza, per Enriques, fedele in questo a Euclide, a livello di geometria elementare metrica, l'ambiente in cui si sviluppano i concetti-base (parallelismo, perpendicolarità, relazioni di equivalenza e di similitudine) è il piano e non lo spazio. Tuttavia, in maniera assai originale e interessante, Enriques e Amaldi propongono nella prefazione (p. XI, nota 1) un possibile ordine dei capitoli del loro libro diverso da quello esposto nel testo e coerente con un approccio fusionista; 6) nell'Enriques-Amaldi la trattazione segue il modello deduttivo euclideo, tuttavia vi sono numerose osservazioni empiriche e sperimentali che tendono a mostrare anche l'euristica di certe acquisizioni, il che è sempre auspicabile sul piano didattico. Scrive infatti Enriques: "La nostra critica si riassume in questo giudizio: la trattazione euclidea presentando coordinati in un sistema deduttivo dei risultati lungamente analizzati nei loro rapporti, nasconde sotto forma dommatica il cammino della scoperta"[47]. A parte questo, la scelta didattica di Enriques è chiara e mi piace sintetizzarla così: "nessuno può

[46] Veronese non fu un fusionista nel senso comunemente dato a questa espressione. Si veda in proposito Veronese, 1897, p. XIV. Egli accoglie comunque per alcuni argomenti la concezione fusionista e la sviluppa nel proprio testo.
[47] Enriques, 1912, pp. 19-35. Citazione, p. 24.

fare Euclide meglio di Euclide", quindi con le opportune modifiche, necessarie a una presentazione più fruibile della geometria euclidea, l'Enriques-Amaldi si mantiene in sostanza fedele ai dettami e ai metodi del grande geometra greco. D'altronde Enriques aveva scritto nel 1900: "L'opera geometrica dei Greci, a noi tramandata col nome d'Euclide, è in sé così bella ed armoniosa che, dopo venti secoli, non sapremmo ad essa sostituire, nella scuola secondaria, qualche altro insegnamento di geometria meglio rispondente alle esigenze delle coltura e dell'educazione intellettuale"[48].
Riguardo al contenuto, il testo è suddiviso in 17 capitoli, i primi otto di geometria piana e gli altri di geometria dello spazio. I capitoli relativi alla geometria piana occupano ben 432 delle 650 pagine complessive. Alla fine di ogni capitolo vi è un buon numero di esercizi. Il capitolo I è dedicato agli enti fondamentali: punto, retta, angoli, piano; il II ai poligoni, con i criteri di uguaglianza per i triangoli e gli altri poligoni; il III è dedicato al cerchio; il IV alla teoria delle parallele e alle sue applicazioni; il V alla teoria dell'equivalenza, col teorema di Pitagora e il teorema dello gnomone; il VI riguarda la teoria delle proporzioni; il VII la lunghezza della circonferenza e la superficie del cerchio; l'VIII, l'ultimo di geometria piana è dedicato alla teoria della misura. La geometria spaziale inizia col IX capitolo concernente rette e piani nello spazio; il X è dedicato agli angoloidi e ai poliedri; l'XI alla sfera; il XII alle rette e piani paralleli e ai prismi; il XIII al cono e al cilindro; il XIV alle superficie e ai volumi dei poliedri; il XV alle proporzioni

[48] Enriques, 1900, p. I.

e similitudini; il XVI alle superficie e volumi del cono e della sfera e, infine, il XVII alla misura.

Rispetto alla trattazione di Euclide vi sono delle differenze di contenuto e di metodo: quanto al contenuto, il primo capitolo dell'Enriques-Amaldi è introduttivo; il secondo capitolo corrisponde in parte al primo libro di Euclide anche se vi sono una serie di proposizioni caratterizzanti i triangoli che sono frutto dell'indagine logica sui fondamenti della geometria e che non compaiono in Euclide: si tratta in particolare delle proprietà caratterizzanti i punti interni ed esterni ad un triangolo in proposizioni quali: "un punto comune a due angoli di un triangolo è comune al terzo" (Teorema 109, p. 44), "Il segmento che congiunge un punto interno ad un punto esterno di un triangolo sega il contorno in un punto e in uno solo" (T. 112, p. 45). Seguono i criteri di uguaglianza dei triangoli. Il primo criterio (Euclide I, 4) viene introdotto come postulato (117, p. 49). Sono poi dimostrati i fondamentali teoremi: uguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele, possibilità di bisecare un angolo, secondo criterio di uguaglianza dei triangoli, terzo criterio di uguaglianza (rispettivamente 119, p. 50; 121, p. 51; 130, p. 55; 137, p. 59). In Euclide queste proposizioni sono rispettivamente le I, 5; I, 9; I, 26; I, 8. Il testo continua con le disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo: teorema dell'angolo esterno (139, p. 61, Euclide I, 16); proprietà che a lato maggiore è opposto angolo maggiore e viceversa (143, 144, pp. 64, 65, Euclide I, 18, 19); in ogni triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due (145, p. 65, Euclide I, 20). Segue la trattazione della perpendicolarità in cui, tra l'altro si dimostra che la somma di due angoli di un triangolo è minore di due retti (155, p. 70, Euclide, I, 17). Seguono altri criteri di uguaglianza dei triangoli e un'interessante sezione sui luoghi geometrici (pp. 82) che è assente in Euclide. Sulla falsariga di quanto visto per i triangoli, l'Enriques-Amaldi estende la trattazione ai poligoni, sviluppando in particolare la teoria dell'eguaglianza per i quadrilateri (pp. 89-94). Si ha poi la trattazione dei poligoni concavi, convessi e intrecciati e delle poligonali (pp. 95-104). In Euclide tutta questa parte sui poligoni, che però è in sostanza riconducibile alle proprietà dei triangoli manca. Un aspetto estremamente interessante viene affrontato alla conclusione del primo libro, nel paragrafo sulle costruzioni (pp. 104-108): la geometria euclidea è la geometria della riga e del compasso; quest'ultimo come strumento costruttore è, come ben noto, introdotto fin dalla prima proposizione degli *Elementi* (costruire un triangolo equilatero di lato assegnato). Enriques fa una scelta diversa: dal momento che il cerchio come entità geometrica non è ancora stata introdotta, egli preferisce non ricorrere al compasso e, nel primo libro usa come strumenti costruttori la riga, la riga graduata e la squadra e insegna a risolvere una serie di problemi con questi strumenti, ad esempio bisecare un angolo o un segmento dati (217, 218, pp.107-108). Strumenti come la squadra portano al di là di ciò che è eseguibile con riga e compasso perché consentono di inserire due medie proporzionali tra due segmenti dati, quindi in senso proprio l'uso della squadra non rientra nella geometria di Euclide ma Enriques si attiene a sole costruzioni eseguibili anche con riga e compasso e usa questi strumenti perché probabilmente ritiene utile a livello didattico introdurre il compasso come strumento costruttore solo dopo aver esplicitato le proprietà del cerchio. Nel primo capitolo dell'Enriques-Amaldi non è affrontato il problema del parallelismo, e la trattazione del problema è rimandata al quarto capitolo, dopo aver parlato del cerchio, mentre in Euclide a partire dal cosiddetto "teorema inverso delle parallele" (I, 29), il parallelismo è affrontato nel primo libro. Questa scelta dipende probabilmente dal fatto che Enriques giudica la teoria del parallelismo un argomento particolarmente delicato sul piano logico, che introduce la parte più avanzata della teoria euclidea e ritiene più opportuno enucleare prima le proprietà del cerchio che si possono dimostrare senza ricorrere al parallelismo.

Il secondo capitolo dell'Enriques-Amaldi fa già comprendere in che cosa il testo sia fedele agli *Elementi* euclidei e in che cosa se ne distacchi: buona parte del secondo capitolo presenta i teoremi esposti nel primo libro di Euclide con dimostrazioni simili o identiche a quelle del geometra greco. Tuttavia le proposizioni iniziali sui triangoli, da me riportate, mostrano proprio cosa intendeva dire Enriques affermando che occorre tener conto "dei progressi portati, anche nel campo degli elementi da una critica più matura e dagli sviluppi recenti delle alte matematiche". Oltre alla diversa collocazione della teoria del parallelismo e del problema della costruibilità, vi è poi la questione dei postulati: Euclide espone all'inizio della propria opera i famosi cinque assiomi, mentre nell'Enriques-Amaldi, i postulati sono introdotti nel corso della trattazione, quando le esigenze didattiche sembrano richiederlo, senza preoccuparsi della loro indipendenza o

del loro numero. Enriques voleva presentare un testo rigoroso, ma maneggevole e fruibile dallo studente e la scelta di introdurre i postulati, per così dire nel corso della narrazione, era funzionale a questa esigenza.
Per motivi di spazio, non sarà possibile analizzare gli altri capitoli dell'Enriques-Amaldi così dettagliatamente come abbiamo fatto col secondo, ci concentreremo quindi su due argomenti particolarmente significativi: il parallelismo e la teoria delle proporzioni, accennando poi ad alcune questioni di geometria dello spazio e concludendo con un breve confronto con le impostazioni di De Paolis e Veronese.
Il postulato delle parallele viene introdotto da Enriques nella forma che sembra più intuitiva e cioè che, data una retta, per un punto esterno ad essa passa una e una sola parallela (331, p. 175); data questa proposizione come postulato, viene dimostrato quello che è il quinto postulato di Euclide come teorema (334, p. 176), segue poi il teorema dell'angolo esterno di un triangolo, secondo cui un angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti e la somma degli angoli interni di un triangolo equivale e due retti (337, p. 177, Euclide, I, 32). Viene quindi trattata la somma degli angoli interni di un poligono; si passa poi alle proprietà dei parallelogrammi (pp. 180-187), senza però toccare il problema dell'equivalenza. Segue un paragrafo di estremo interesse concettuale e che non ha un corrispettivo nella trattazione di Euclide, quello della distanza tra due parallele (pp. 187-193): nella proposizione 363 (p. 187) viene dimostrato che se una retta è parallela ad un'altra, tutti i punti dell'una hanno uguale distanza dall'altra e nella 366 (p. 188) che il luogo

dei punti che distano di un segmento assegnato da una retta data e giacciono rispetto ad essa da una banda prefissata è la parallela alla retta data avente da essa distanza uguale al segmento assegnato. Ora, sostiene Enriques, i teoremi sulla distanza di due parallele possono essere basati empiricamente sull'osservazione relativa allo strisciamento di un piano su se stesso senza ricorrere al postulato delle parallele. Questa osservazione è di carattere finitario nel senso che il campo ristretto della nostra esperienza ci consente di far strisciare un piano di un certo segmento finito dato, mentre il postulato delle parallele ha carattere infinitario perché, come sostengono Enriques e Amaldi "Per la sua stessa natura non è possibile di porgerne una verifica sperimentale (sia pure approssimata) nel campo ristretto accessibile ai nostri mezzi di osservazione" (p. 189). Ciò suggerisce allora l'idea di poter sfruttare come postulato delle parallele la proposizione "I punti di un piano che sono da una parte di una retta e hanno da essa una distanza data, appartengono ad una retta" (p. 190). Questa annotazione di Enriques è una piccola finestra aperta allo studente per problemi che poi sarebbero stati affrontati nei corsi universitari, quali le formulazioni equivalenti del postulato delle parallele e l'assiomatica delle geometrie non euclidee. Segue la trattazione dei punti notevoli di un triangolo (notoriamente assente in Euclide) e quella relativa agli angoli del cerchio e all'inscrittibilità dei poligoni regolari, così che i risultati conseguiti da Euclide nel terzo e nel quarto libro sono riportati nel terzo e alla fine del quarto capitolo del testo enriquesiano.

La teoria delle parallele proposta da Enriques si presenta come un corpo compatto e ben strutturato. Come già visto per il secondo capitolo, anche questa trattazione è vicina a Euclide, ma è tangibile l'influenza di alcuni risultati ottocenteschi sulla teoria delle parallele e notevole lo sforzo di trovare un riferimento all'esperienza per dar conto di un concetto così complesso come quello di parallelismo. Anche in questo caso quindi lo sforzo è notevole: 1) far comprendere la materia trattata secondo lo spirito euclideo; 2) fornire un'euristica che renda più semplice la comprensione; 3) estendere alcuni argomenti con osservazioni critiche derivate da studi più recenti. Nel complesso un affresco mirabile.

Di grande interesse è anche il capitolo quinto sulla teoria dell'equivalenza, dove, tra l'altro, viene dimostrato il teorema di Pitagora e riferiti alcuni risultati conseguiti da Euclide già alla fine del primo libro. Quindi anche qui si ha una modificazione, senza sconvolgimento, della trattazione euclidea.

Passiamo quindi alla teoria delle proporzioni (capitolo VI), cuore della geometria euclidea, perché da essa deriva il fondamentale concetto di similitudine. Qui, per motivi di spazi, analizzeremo solo i fondamenti della teoria perché saranno utili per un confronto con Veronese. Le dimostrazioni dei teoremi concernenti la similitudine sono poi, in Enriques, molto vicine a quelle euclidee.

Dopo l'introduzione del concetto di grandezze omogenee (475, p. 280) e le relazioni fondamentali di uguaglianza e disuguaglianza tra grandezze, con la legge commutativa ed associativa della somma (476, pp. 281, 282). Al punto 482 (pp. 283, 284) viene data la definizione di grandezze proporzionali: date quattro grandezze *A, B, C, D* di cui la prima e la terza omogenee rispettivamente alla seconda e alla quarta e due numeri interi positivi *m* ed *n*, si dice che esse sono in proporzione o hanno lo stesso rapporto qualora si abbia:

1) $mC>nD$ se $mA>nB$; oppure 2) $mC=nD$ se $mA=nB$; oppure 3) $mC<nD$ se $mA<nB$.

La definizione euclidea di proporzione, riproposta da Enriques, può sembrare complicata perché data per astrazione; si definisce infatti il rapporto di grandezze definendo l'uguaglianza di rapporti. Tuttavia questa definizione è la più adatta a trattare anche il caso delle grandezze incommensurabili e la definizione euclidea di eguaglianza tra rapporti è, in sostanza, analoga alla definizione di identità di due numeri reali data tramite sezioni di Dedekind[49]. Seguono i classici teoremi sulle proporzioni a cominciare dal teorema di Talete (488, pp. 287-288), dal teorema della bisettrice (495, 496, pp. 290-292, Euclide VI, 3) e dalla proposizione secondo cui se due triangoli hanno gli angoli uguali, i lati che comprendono angoli uguali sono in proporzioni (498, pp. 292-293, Euclide VI, 4). Enriques pone poi il confronto tra due proporzioni arrivando ai classici teoremi relativi al rapporto tra antecedenti e conseguenti di una proporzione, il più importante dei quali è quello relativo all'unicità del quarto proporzionale (511, p. 302). Riguardo al fondamentale teorema della permutazione dei medi, dimostrato da Euclide in V, 16, ma la cui complessa prova, data in forma astratta, senza cioè ricorrere a figure geometriche, bensì solo tramite

[49] La letteratura sulla definizione di proporzione è molto estesa. Qui segnaliamo Vailati, *Sulla teoria delle proporzioni*, consultato in Enriques, 1924-27, 1983, parte prima, tomo primo, pp. 143-191 e la nota 3 di Attilio Frajese alla definizione euclidea in Euclide, 1970, pp. 299-302.

proprietà delle proporzioni, richiede ben tre proposizioni introduttive (VI, 12-15), Enriques fa una scelta diversa: dimostra che se due parallelogrammi sono equivalenti ed hanno un angolo uguale a un angolo, i lati che comprendono gli angoli uguali formano una proporzione in cui sono estremi e medi due lati di uno stesso parallelogramma e che vale anche il viceversa (532, pp. 318). Applicando questo teorema ai rettangoli ne consegue che se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo degli estremi è equivalente a quello dei medi e viceversa (534, p. 319). Da qui seguono facilmente i teoremi sulla permutazione dei medi e degli estremi (540, p. 322). Sono poi dimostrati tutti i classici teoremi euclidei relativi al comporre, scomporre, alle proprietà ex aequo e alla proporzione perturbata. C'è un problema: quanto ha dimostrato Enriques a partire dalla permutazione dei medi non vale per le grandezze in generale, ma solo per i segmenti perché si basa su una dimostrazione relativa ai lati dei rettangoli. Ma il matematico livornese afferma esplicitamente: "Esse [le proprietà delle proporzioni relative ai segmenti] valgono pure per le grandezze in generale; ma le dimostrazioni astratte e piuttosto laboriose, che a tale scopo si richiedono, saranno da noi rimandate in una nota in fine al capitolo (pag. 341)"[50]. La nota di tre pagine, pur precisa, è comunque piuttosto concisa rispetto alle dimostrazioni date da Euclide.

Enriques espone poi i teoremi sulla similitudine, ma qui non abbiamo spazio per analizzarli.

[50] Enriques-Amaldi, p. 322.

La teoria delle proporzione esposta da Enriques, conferma la sua scelta didattica: seguire Euclide nella misura in cui è possibile coniugare perspicuità e semplicità, quando la teoria euclidea diviene eccessivamente astratta e le dimostrazioni risultano pesanti, Enriques preferisce una semplificazione che, senza perdere di vista il quadro generale, consenta una maggior fruibilità da parte del discente e del docente. Ecco allora la scelta di non trattare, per certe proprietà, le grandezze in generale, ma di riferirsi ai segmenti, in modo da rendere più semplice la trattazione. Anche la teoria delle grandezze incommensurabili è esposta in modo chiaro e semplice (pp. 383-398), senza addentrarsi nei meandri del decimo libro degli *Elementi* euclidei e senza riferirsi alle questioni fondazionali sorte alla fine del XIX secolo e concernenti i numeri reali.

Riguardo alla geometria dello spazio, la trattazione enriquesiana comincia con le rette perpendicolari, prosegue con i diedri e le loro sezioni normali e i criteri di uguaglianza dei diedri (parte assente in Euclide), il capitolo si chiude con le proprietà dei piani perpendicolari e delle sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali. Segue, nel capitolo decimo la trattazione dei triedri con l'introduzione del fondamentale concetto di triedro polare di un triedro dato (def. 79, p. 467): dato un triedro, dal vertice si innalzi la semiretta perpendicolare a ciascuna faccia nella parte di semispazio delimitato dalla faccia in cui cade il terzo spigolo del triedro. Il triedro così ottenuto è *polare* del dato. Il concetto di triedro polare è sfruttato nello studio dell'uguaglianza dei triedri (tutta questa parte manca in Euclide). Segue la trattazione degli angoloidi e dei poliedri. L'XI capitolo riguarda la sfera e, coerentemente con quanto fatto per la geometria piana, il parallelismo tra rette e piani nello spazio è affrontato solo nel XII capitolo, mentre Euclide lo affronta già nell'XI libro, il primo dedicato alla geometria dello spazio. Dopo aver affrontato, nel capitolo tredici gli argomenti legati al cilindro e al cono, viene trattato nel capitolo XIV la teoria dell'equivalenza: è un capitolo estremamente interessante. Enriques ripropone in maniera chiara e con diverse applicazioni il metodo di esaustione: notevole il modo in cui è proposta la dimostrazione del teorema secondo cui tetraedri di base ed altezze uguali hanno lo stesso volume. Enriques propone due applicazioni del metodo di esaustione: la prima utilizzando i concetti di scaloide iscritto e circoscritto alla piramide e la seconda riproponendo la dimostrazione di Euclide (XII, 5, ove Euclide dimostra che piramidi a base triangolare e uguale altezza hanno il volume proporzionale alle basi). Il matematico livornese propone due dimostrazioni perché la prima, quella in cui è usato lo scaloide, non ricorre alla teoria delle proporzione, mentre la seconda sì. Altre interessanti applicazioni del metodo di esaustione si trovano nel capitolo XIV in cui sono tra l'altro fornite la dimostrazioni per esaustione relative all'area e al volume della sfera che, come è noto, non si trovano in Euclide, ma in Archimede. Nel complesso quindi la geometria dello spazio è notevolmente sviluppata nell'Enriques-Amaldi, è presente un quadro esauriente dei problemi e dei metodi tipici di questa parte della disciplina, sempre seguendo un approccio che sia il più semplice e preciso possibile per docente e discente.

Passiamo ora ad un succinto confronto tra l'impostazione che Enriques dette al proprio manuale e a quelle date da De Paolis e Veronese ai rispettivi testi. Cominciamo con quest'ultimo.

Veronese, nella prefazione dedicata agli insegnanti caratterizza così le maggiori novità della propria impostazione: Cominciamo con quest'ultimo.

Veronese[51], nella prefazione dedicata agli insegnanti, caratterizza così le maggiori novità della propria impostazione: 1) introduzione di un principio di dualità generale che non riguarda solo le relazioni grafiche (come il principio di dualità della geometria proiettiva) ma anche certe relazioni metriche e corrispondenze. Così si esprime Veronese: "[…] data una figura *A* mediante alcuni postulati e un'altra *B*, in tale corrispondenza con *A* che collo scambio di alcune parole valgono per *B* le proposizioni contenute nei postulati di *A*; per *B* si deduce che collo scambio di quelle parole, valgono anche colle stesse dimostrazioni tutte le proposizioni dedotte per *A*" (*Elementi*, pp. XI-XII). Così per esempio, afferma Veronese (p. XIII) non è necessario ridimostrare per le figure simili molti teoremi dimostrati per le figure uguali, basta sostituire alla corrispondenza di uguaglianza quella di proporzionalità; 2) introduzione di punto, retta e piano all'infinito per rendere più semplici e generali le dimostrazioni di alcuni teoremi (p. XIII); 3) non è possibile una fusione della geometria piana e solida finché non siano stati costruiti il piano e lo spazio. Nell'insegnamento è bene procedere dal particolare al generale, quindi prima geometri piana e poi geo-

[51] In seguito, se non specificato diversamente con *Elementi* mi riferirò a Veronese, 1897.

metria dello spazio; 4) tuttavia, una volta introdotte le proposizioni fondamentali del piano e dello spazio è utile una trattazione simultanea di teorie particolari quali la teoria della congruenza e simmetria, della equivalenza, delle proporzioni e similitudini e della misura (p. XV).

L'impostazione di Veronese è davvero innovativa: è molto interessante il principio di dualità esteso, che giustamente è stato visto in chiave strutturalista[52]. Ci sono però alcuni problemi: 1) il principio di dualità in geometria proiettiva vale in generale, mentre in geometria metrica, l'applicazione di tale principio non è affatto garantita a priori e, per ogni argomento, occorre specificare se il principio valga o meno; 2) sul piano didattico questa scelta, insieme a quella già vista relativa alla definizione di uguaglianza sembra porre la trattazione a un livello molto astratto per un libro di testo dedicato alle scuole superiori.

Dal punto di vista dei contenuti, il testo è diviso in nove libri. Tuttavia prima dell'inizio della trattazione vera e propria vi è un capitolo introduttivo, dal titolo "Nozioni generali" in cui Veronese introduce i concetti di gruppo (niente a che vedere col concetto di gruppo dell'algebra) e di serie per giungere poi a quello di corrispondenza tra gruppi. Egli fornisce qui le nozioni base che aveva sviluppato in maniera ben più dettagliata nei *Fondamenti di geometria*. Il primo libro è dedicato alle proprietà della retta con l'introduzione del concetto di uguaglianza tra segmenti, tra figure rettilinee e tra coppie di raggi. Segue la definizione di rette parallele e sono enucleate le principali proprietà del parallelismo. Si tratta di un libro

[52] Cautiero-Gerla, 1988, paragrafo 3: fusionismo e strutturalismo.

complesso: prima viene introdotto il concetto di sistema lineare, come gruppo di punti dotato di due ordini l'uno inverso dell'altro (p. 8) e viene postulata (pp. 10-11) l'esistenza di un sistema lineare che si chiama retta e che ha certe caratteristiche. Nel primo teorema Veronese dimostra che la retta non ha nodi (pp. 12-13). Riguardo alle rette parallele, la definizione è la seguente: "le rette di una coppia diconsi parallele, se sono opposte rispetto a un punto fuori di esse" (p. 29) e l'assioma delle parallele è dato in questa forma: "due rette parallele sono opposte rispetto al punto di mezzo di ogni loro segmento trasversale". Questa definizione di parallelismo va incontro all'esigenza avvertita da Veronese di mantenere i postulati nell'ambito dell'esperienza possibile, mentre la classica definizione di rette parallele come rette che, comunque prolungate non si incontrano, è chiaramente infinitaria. Inoltre la definizione è coerente coll'idea di riportare i concetti geometrici a relazioni, in questo caso relazione di simmetria. Il postulato è conseguenza della definizione.

Nel secondo libro sono enucleate le prime proprietà del piano con teoremi in realtà di geometria spaziale come quello secondo cui un piano è determinato da una retta e un punto fuori di essa o da tre punti non allineati (pp. 37-38). Vengono poi forniti in forma piuttosto astratta alcuni elementari teoremi sugli angoli (per esempio: a partire da una retta data esiste un solo angolo uguale a un angolo dato in ciascuno dei due versi di un fascio, p. 42) riconducendosi al concetto di sistema lineare omogeneo. Un teorema, la cui dimostrazione è assai significative della impostazione di Veronese è: "un angolo qualunque può essere diviso in un solo modo in due parti uguali”. Non è possibile scendere nei dettagli, ma la prova è condotta ricorrendo alla corrispondenza di uguaglianza dell’angolo con se stesso, ma visto come formato prima dalla semiretta *a* e poi dalla semiretta *b* e successivamente prima da *b* e poi da *a*. Dimostrazione certo coerente con l’idea di fondo di Veronese di ricondurre molti teoremi a un unico impianto metodologico-dimostrativo, ma che ha davvero poco a che vedere con le procedure di Euclide. Seguono teoremi relativi alle mutue posizioni di rette e triangoli, quindi le proprietà di parallele e trasversali, seguite dallo studio delle distanze, ove tra l’altro viene dimostrato che rette parallele sono equidistanti (pp. 60-61). Seguono i criteri di uguaglianza dei triangoli, provati ricorrendo al concetto di corrispondenza di eguaglianza. Si hanno poi le relazioni di disuguaglianza tra gli elementi dei triangoli e i teoremi sulle somme degli angoli e sui punti notevoli dei triangoli. Segue la trattazione dei poligoni. Veronese tratta poi della circonferenza e del cerchio e osserva che i teoremi ottenuti per i segmenti della retta e gli angoli in base al postulato di esistenza della retta e a quello secondo cui ogni segmento rettilineo è divisibile in due parti uguali, possono essere applicati alla circonferenza sostituendo alla locuzione segmento di retta o angolo del fascio, quella di arco di circonferenza. Questo è un esempio della dualità “generalizzata” di cui si è parlato (p. 81).

Il terzo libro è dedicato alla geometria dello spazio e Veronese introduce subito concetti quali punto all’infinito, retta all’infinito e stella di raggi (p. 108). Oltre agli ordinari teoremi, ne sono dimostrati altri le cui conseguenze sono di grande interesse per la struttura dello spazio geometrico, ma che sembrano davvero trascendere l'insegnamento secondario; uno di questi teoremi è: "Le stelle di raggi sono uguali tra loro" che ha come conseguenza "lo spazio è uguale intorno ad ogni suo punto" (pp. 115-116), cioè una proprietà "in piccolo" dello spazio. Veronese tratta poi dei piani paralleli, dei diedri, dei triedri e degli angoloidi. A proposito dei triedri fa vedere come scambiando le parole triangolo-triedro, lato-faccia, vertice-spigolo, angolo-diedro, si ottengono molte proprietà dei triedri immediatamente dalle omologhe proprietà dei triangoli (pp. 141-142). In conclusione del libro sono enucleate le proprietà dei poliedri, del cilindro e della sfera. Col terzo libro ha termine la trattazione delle proprietà fondamentali (II libro, piano, III libro, spazio).

Nel quarto libro comincia la trattazione di argomenti più specifici ed essa è condotta insieme per il piano e per lo spazio. In particolare sono esposte altre proprietà delle figura uguale con teoremi di tipo decisamente proiettivo come "La corrispondenza di eguaglianza di due punteggiate eguali è determinata da due coppie distinte di punti corrispondenti" (p. 182). Viene introdotto il concetto di punto unito (p. 182). Un capitolo importante, il secondo, concerne i versi delle figure e sono definite congruenti due figure piane uguali se hanno due angoli dello stesso verso e due figure spaziali se hanno due triedri dello stesso verso (p. 194). La relazione tra geometria piana e geometria dello spazio è resa così ancor più stretta. Il concetto di movimento viene poi ricondotto alle relazioni geometriche fondamentali, in particolare a quella di congruenza (pp. 197-201).

Il libro quinto è dedicato alla teoria dell'equivalenza per le figure piane e spaziali.

Il libro sesto tratta della teoria delle grandezze e qui l'apparato teorico è ancor più denso e complesso che nei libri precedenti: Veronese introduce il concetto di grandezza variabile che diventa indefinitamente piccola (pp. 245-246), cioè il concetto di limite, ma con un linguaggio suo proprio, ripreso dai *Fondamenti*, che rende la trattazione piuttosto particolare. Segue la trattazione delle grandezze commensurabili e incommensurabili, anche se in questo libro non sono usate esplicitamente queste parole (la teoria delle grandezze commensurabili e incommensurabili è rimandata al nono libro), ma i concetti-base sono introdotti qui. In particolare per i segmenti se si ha $AC \equiv AB\left(\frac{m_1}{n^1}+\frac{m_2}{n^2}+\ldots\frac{m_p}{n^p}\right)$, essendo *p* un intero, *AC* è commensurabile ad *AB* e *p* è un numero, se invece *p* tende all'infinito *AC* è incommensurabile con *AB*. Viene poi provata l'unicità del limite (p. 245) e altre proprietà delle grandezze. In base alla teoria delle grandezze viene poi esposta quella delle proporzioni nel piano e nello spazio, con la similitudine per i poligoni e i poliedri.

Il libro settimo presenta, in una forma decisamente più classica rispetto ai libri precedenti, la teoria dei poligoni e poliedri regolari.

L'ottavo libro concerne la lunghezza della circonferenza, l'area del cerchio, la superficie e il volume del cilindro e del cono e la superficie e il volume della sfera. Qui il concetto di limite è usato in modo del tutto esplicito in una pluralità di teoremi. Solo per dare un esempio: “La superficie di una zona sferica è il limite delle superficie generate dalle spezzate regolari inscritte nell’arco di cerchio massimo generatore della zona quando esso compie una rotazione completa intorno al diametro della sfera perpendicolare alla base della zona” (pp. 330-331).

Il nono libro riguarda le grandezze commensurabili e incommensurabili e le applicazione dell’algebra alla geometria.

In un confronto tra l’Enriques-Amaldi e gli *Elementi* di Veronese risulta evidente che la disposizione della materia è molto diversa: Enriques ha cercato di attenersi il più possibile alla partizione degli argomenti fornita da Euclide, pur intervenendo con notevoli aggiunte (come nello studio dei poligoni o dei diedri, dei triedri e dei poliedri) rispetto al testo euclideo e con una suddivisione della materia più netta di quanto avvenga in Euclide: ecco la diversa collocazione del parallelismo, la scelta di introdurre l’uso del compasso solo quando viene trattata la circonferenza e il cerchio e così via. Ciò è dovuto a esigenze didattiche: rendere più chiara e fruibile la materia. La sua scelta sembra tutt’altro che casuale, ma deriva da tre esigenze ben precise: 1) cercare di mitigare le difficoltà che presenta una riproposizione pura e semplice di Euclide; 2) rimanere nell’alveo di un approccio sintetico ed evitare le notevoli imprecisioni di una certa tradizione manualistica che, ispirandosi al testo di Legendre, aveva finito per svilupparne gli aspetti peggiori[53]; 3) evitare le notevoli difficoltà di approccio

[53] Si veda, per esempio, Bolondi, 2005.

presenti in testi, pur di grande livello, come gli *Elementi* di De Paolis o quelli di Veronese. Quanto a Veronese, egli nel proprio testo, propone non solo un volume didattico, ma espone anche una visione ben precisa della geometria che, indubbiamente, è più complessa di quella che si riscontra nell'Enriques-Amaldi e che è basata su: 1) ricondurre i concetti geometrici a quelli più generali di gruppo, serie, sistema omogeneo, sviluppati nel *Fondamenti*; 2) ricondurre la relazione di uguaglianza e congruenza a quella più astratta di corrispondenza di uguaglianza; 3) ricondurre la teoria delle grandezze ai concetti e al linguaggio espresso nei *Fondamenti*, in modo da introdurre il giovane a un modo di ragionare che consenta poi un approccio più semplice a tutta la teoria dei numeri e delle grandezze infinite e infinitesime non archimedee esposte in quell'opera; 4) quanto alla partizione della materia: tener separate le proprietà fondamentali del piano e dello spazio, ma condurre una trattazione congiunta di teorie specifiche, con un approccio di tipo strutturalista più che fusionista. Il quadro presentato da Veronese è molto affascinante, tuttavia presenta delle difficoltà sul piano didattico: le dimostrazioni, specialmente quelle in cui è coinvolto il concetto di uguaglianza o congruenza, sono molto astratte e sembrano davvero poco adatte ad essere proposte in una scuola superiore. Inoltre, a prescindere da questo, sono problematici alcuni aspetti logici: ad esempio nozioni quali gruppo, serie, sistema lineare non sempre sembrano ben definite, l'uso e il ruolo del principio di dualità generalizzato non è chiarito fino in fondo; la teoria delle grandezze esposta nei *Fondamenti* ha molti difetti logici[54], anche se invero questi non sembrano riguardare la sottosezione presente negli *Elementi*. Quadro quindi affascinante, ma molto complesso: si comprende che sul piano didattico l'Enriques-Amaldi abbia avuto successo in confronto agli *Elementi* di Veronese.

Istituiamo ora un sintetico confronto con gli *Elementi di geometria* di De Paolis. Il confronto sarà in questo caso più breve in parte perché valgono, a proposito della maggior fruibilità didattica del testo enriquesiano, le stesse considerazioni fatte per Veronese e in parte perché la letteratura sul fusionismo è più abbondante di quanto sia quella su Veronese.

La trattazione del De Paolis, tipicamente fusionista, è ripartita in sei libri. Oltre alla fusione di geometria piana e spaziale, l'altra caratteristica generale del testo di De Paolis è l'uso del movimento per le nozioni di uguaglianza e congruenza: sono uguali figure sovrapponibili col movimento.

Il primo libro è intitolato "Le verità fondamentali della geometria". In precedenza vi è una interessante osservazione che può essere interpretata come una giustificazione euristica della definizione della uguaglianza tramite movimento e del fatto che l'ambiente in cui, a livello percettivo, nasce la geometria è lo spazio e non il piano. Da qui la scelta fusionista. Per cui fusionismo e definizione della eguaglianza come movimento sono correlate. Scrive De Paolis: lo spazio può essere ritenuto "[…] omogeneo, ossia ugualmente accessibile in ogni sua parte. Così, mentre guidati dall'esperienza riconosciamo che certi corpi (solidi) non vengono defor-

[54] Si veda Bussotti, 1997.

mati, quando si muovono, ossia ci producono le stesse impressioni, qualunque posto occupino nello spazio, generalizziamo dicendo: in tutto lo spazio è possibile il movimento di certi corpi (solidi), senza deformazione"[55]. Nel primo libro sono trattate le figure geometriche fondamentali: segmenti, angoli, diedri. Viene introdotto anche il tema del parallelismo. L'assioma della parallele è nella forma per cui per un punto esterno a una retta data passa una e una sola parallela (p. 29). Segue la trattazione delle rette e piani perpendicolari, delle figure simmetriche, del cerchio e della sfera. In molti teoremi si dimostra prima il caso spaziale di cui quello piano risulta poi una applicazione particolare. Esempio, teorema 1, pp. 33-34: "Gli angoli formati da due rette che s'incontrano, sono uguali agli angoli formati da due rette ad esse parallele, e che pure s'incontrano". Praticamente in ogni teorema si fa uso del movimento rigido.

Il secondo libro riguarda le figure geometriche fondamentali: triangoli, poligoni, triedri, angoloidi, poliedri, con tutte le relazioni di uguaglianza e disuguaglianza tra lati, angoli, spigoli, vertici, facce. Ci sarebbero molte annotazioni interessanti, qui ci possiamo limitare solo a notare un particolarità: definendo la congruenza tramite le sovrapponibilità col movimento, alcune figure opposte al vertice non risultano uguali. Ciò, a differenza che per gli angoli, accade per i triedri: infatti due triedri sono definiti uguali se, trasportati convenientemente nello spazio possono coincidere (p. 132). De Paolis prosegue asserendo che due triedri uguali hanno uguali le facce e i diedri corrispondenti, ma non è vero l'inverso perché due trie-

[55] De Paolis, 1894, p. 5.

dri possono avere uguali facce e diedri ma non essere uguali perché non sovrapponibili. Ciò avviene con due diedri opposti al vertice. Quindi, la definizione della uguaglianza tramite movimento sembra molto intuitiva, ma ha conseguenze per niente intuitive, come questa.

Il terzo libro riguarda i cerchi, le superfici cilindriche e coniche e le sfere. Per dare anche qui un esempio di come De Paolis tratti i problemi considerando tutto lo spazio, consideriamo il paragrafo “Circoli che soddisfano date condizioni” (pp. 193-197): viene qui dimostrato (pp. 193-194) che per due punti dati passano infiniti cerchi ed il luogo dei loro centri è il piano perpendicolare, nel suo punto medio, al segmento che ha per estremi i due punti dati. Classica è la restrizione di questa asserto al piano ove il luogo dei centri degli infiniti cerchi che passano per due punti A e B è l’asse del segmento AB. Di nuovo tutti i teoremi concernenti l’uguaglianza di figure sono dimostrati ricorrendo al movimento. A differenza che nei manuali che nell’Enriques-Amaldi e nel manuale di Veronese, molto dettagliata è la parte sugli angoli sferici e i poligoni sferici, soprattutto i triangoli (pp. 244-258).

Il quarto libro concerne la teoria dell’equivalenza con risultati e metodologie dimostrative classiche per quanto riguarda i poligoni e poliedri rettilinei. Molto interessante anche qui le parti sui poligoni sferici e, in particolare, le dimostrazioni che un parallelogramma sferico e un triangolo sferico sono equivalenti alla metà del loro eccesso (pp. 320-324). Nella teoria delle grandezze è esplicitamente introdotto il concetto di limite (p. 330), in maniera molto intuitiva.

Infine i libri quinto e sesto sono dedicati rispettivamente alla teoria delle proporzioni e della misura. La trattazione è condotta in maniera più formale che nell'Enriques-Amaldi.

In conclusione: il manuale di De Paolis è un eccellente e coerente testo fusionista, a differenza di Enriques e Veronese è usato estensivamente il concetto di movimento e la fusione tra geometria piana e geometria spaziale è completa. Il testo è meno astratto di quello di Veronese e introduce argomenti potenzialmente stimolanti anche per i ragazzi delle superiori, come, ad esempio, quello dell'eccesso angolare nei poligoni sferici. Anche qui si ha una scelta didattica che si allontana da Euclide molto di più dell'Enriques-Amaldi. Infine la scelta di Enriques, condivisa da Amaldi, risultò quella vincente: vicini a Euclide, cercando di ridurre gli aspetti più spigolosi della teoria delle proporzioni e di introdurre una partizione della materia scandita in maniera più netta che negli *Elementi* del geometra greco, sensibili ad alcune innovazioni e problemi derivanti dalla moderna critica dei fondamenti. Rigorosi senza entrare in dettagli logici che potrebbero risultare ostici e superflui per menti che ancora devono apprendere a lavorare con gli strumenti della geometria.

Bibliografia

Vedasi parte 1 di 2 su n. 6 di *Euclide.Giornale di matematica per i giovani*