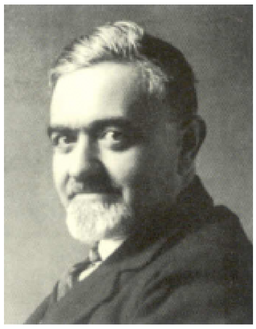
Ed in questo vi è dello strano e del meraviglioso

Sandra Saliani



Giuseppe Vitali

Ecco, immaginate il matematico Giuseppe Vitali (Ravenna 1875, Bologna 1932), nella sua classe di scuola media a Sassari, oppure a Voghera o a Genova (lui che nel 1901 allo stipendio di assistente di ruolo alla cattedra di Calcolo dell'Università di Pisa, ricoperta da Dini, aveva preferito quello di reggente di Matematica nella Reale Scuola Tecnica di Sassari) ricordare, forse per l'ennesima volta... ai suoi studenti in che cosa consista il ragionare, dimostrare, e chissà se gli studenti dell'epoca lo stavano a sentire...

Ecco, immaginatelo dopo venti anni di scuola secondaria, tenere, nel 1930, lo stesso discorso a Bologna, dopo aver accolto la richiesta di ricoprire all'Università la cattedra di Analisi Infinitesimale, socio di tutte le più prestigiose accademie italiane. Con la stessa passione di sempre, magari con più enfasi e retorica dettata dallo stile del nuovo corso politico.

Uno studente di matematica apprende i risultati matematici di Vitali nei corsi avanzati: il Lemma di ricoprimento di Vitali è insegnato in tutte le università del mondo ed è basilare per altri risultati; non ci sono risultati di Vitali adatti a studenti di scuola superiore, ma questo discorso lo è, ed è così attuale! Perchè le idee matematiche si sviluppavano ieri nello stesso modo di come si sviluppano oggi.

Proponiamo qui, in estratto, la Prolusione pronunciata da G. Vitali il 4 dicembre 1930, nell'Istituto Matematico della R. Università di Bologna, così come è stata pubblicata nel Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Anno XII, N.2, Aprile 1933, Casa Editrice Nicola Zanichelli, Bologna.

Del ragionare

Di Giuseppe Vitali (a Bologna)

...In che cosa consiste il ragionare? Perchè ciò che noi chiamiamo dimostrazione ha il pregio di persuadere della verità di una certa proposizione tutte le persone normali dotate di una conveniente preparazione?

La risposta è netta.

Ed io ve la esporrò in quella forma, che a me par così limpida, nella quale io la sento da quando nella seduta della Sezione ligure di “Mathesis” del 5 Dicembre 1922 io ebbi occasione di ascoltare e discutere una interessante comunicazione di quell'acuto cultore di questioni di logica che è Alessandro Padoa.

All'atto in cui si stende un ragionamento, si suppongono note alcune proposizioni, ciascuna delle quali si compone di alcune *ipotesi* e di una *tesi* che si afferma sussistere quando si verificano le dette ipotesi.

Nella pratica, le proposizioni che si suppongono note nel corso di una dimostrazione esposta in un trattato, possono figurare enunciate esplicitamente nella parte precedente del trattato, o possono essere facile conseguenza di altre proposizioni che figurano nella prima parte del trattato stesso, oppure essere ritenute di dominio comune, o tanto intuitive da indurre l'autore ad ometterne, per brevità, l'enunciazione o la preparazione degli elementi da cui dedurle.

L'includere una proposizione in una delle tre dette categorie dipende dalla natura o dalla importanza della proposizione, dallo scopo del trattato ed anche dal criterio dell'autore.

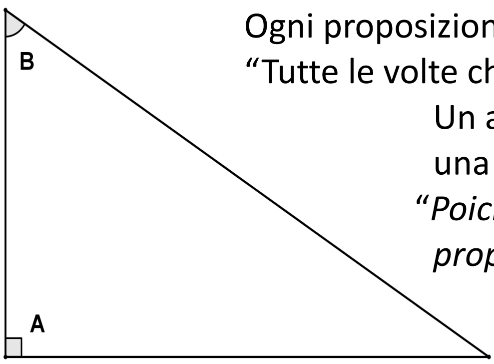
Un ragionamento consiste in successivi atti mediante i quali si constata che si verificano le ipotesi che figurano in una proposizione nota, e si afferma che vale la corrispondente tesi.

Questi atti di cui si compongono i ragionamenti, si possono considerare come le *molecole* del ragionamento.
Passiamo ad analizzare una di queste molecole. Essa consiste di tre parti:

1) Un complesso di artifizi atti a mettere in evidenza che si verificano certe ipotesi.
2) Constatazione che si verificano le ipotesi che figurano in una proposizione nota.
3) Affermazione della validità della tesi che figura in tale proposizione.

La parte 1) qualche volte non è necessaria, ma quando è necessaria è in essa che si manifesta maggiormente l'abilità del ricercatore. Se il ragionamento riguarda questioni di carattere geometrico, la 1) parte può consistere in un insieme di costruzioni supplementari. Non è possibile dare una norma che serva di guida in tutti i casi nella ricerca di questi artifici.

Ai giovani che si dedicano allo studio delle matematiche, io dirò che l'abilità che si richiede per trovare gli artifici più convenienti e più eleganti si acquista coll'esercizio, coll'esaminare molti esempi, collo sforzarsi di imitare. Imitare, ma non troppo, se non si vuole che la nostra scienza diventi come una palude, immensa sì, ma stagnante, senza vita e senza movimento. Imitare dapprima, per imparare, ma poi rinnovarsi.



Ogni proposizione si può ridurre al seguente schema:
"Tutte le volte che si verificano queste ipotesi, è vera questa tesi".
Un atto di ragionamento, o, per meglio intenderci, una molecola di ragionamento dice:
"*Poichè in questo caso sono verificate le ipotesi di tale proposizione nota, si conclude che vale la corrispondente tesi*".
Così se la proposizione nota dice: Se A e B sono due angoli di un triangolo (1a ipotesi) *e se A è maggiore di B* (2a ipotesi) *il lato opposto ad A è maggiore del lato opposto a B* (tesi), dopo aver constatato che in un triangolo rettangolo l'angolo retto è maggiore di ciascuno degli altri angoli del triangolo, si può concludere: "*in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto*".

Come si comprende anche dalle considerazioni generali che ho fatto e, come è anche meglio messo in evidenza dell'ultimo esempio, ogni atto di ragionamento consiste in un passaggio dal generale al particolare.

Ed in questo vi è dello strano e del meraviglioso. Percorrendo a ritroso una successione di ragionamenti, ci si avvede che tutti i risultati fanno capo a proposizioni che furono ritenute intuitive e che furono ammesse, che quindi ogni altra proposizione può essere dedotta da questa con successivi passaggi dal generale al particolare. Si dovrebbe concludere che tutte le nostre verità sono già incluse nel gruppo di proposizioni che noi ammettiamo. Ed il meraviglioso sta nel fatto che *le proposizioni che appaiono molto lontane dalla comune intuizione e lontanissime da tutte le conoscenze precedenti possono essere giustificate con procedimenti composti di atti così semplici come quelli che (ho) descritto, di atti che, come ho detto, si attaccano alle verità postulate.*

Se si volesse analizzare un trattato di matematica, per esempio un trattato elementare di Geometria Razionale, e se si buttassero a sinistra tutte le proposizioni ammesse, ed a destra tutto ciò che rimane, si avrebbe da fare una constatazione sorprendente, poichè si vedrebbe il mucchio di sinistra acquistare dimensioni enormi, così come il fumo che si sprigiona da un cumulo di paglia in fiamme. Se la cernita è ben fatta, a destra si trova il nulla, meno dunque di quanto residuerà dal cumulo di paglia in fiamme. (Una indagine del genere di quella a cui ho alluso mi sembra molto interessante e sarei molto lieto che ad essa volesse dedicarsi qualche mio allievo o qualche studente della scuola di filosofia).

A destra si troverà il nulla. Dobbiamo allora giungere alla conclusione che la nostra scienza è nulla?

No, no. Essa resta la scienza più superba che continuerà a commuovere i nostri animi, la scienza che grande per la maestà dei concetti che esprime, bella per la sua armonia, oggi ci appare anche miracolosa per la sua infinita tenuità.

Cessiamo noi di ammirare le sculture di Fidia e Prassitele quando pensiamo che esse furono ottenute riducendo un masso informe?

Cessiamo noi di farci commuovere dalla musica solenne del Verdi, dalle melodie appassionate del Puccini perchè sappiamo che risultano da un accozzo, abile quanto si vuole, ma da un accozzo di note, che singolarmente poco esprimono, che isolate ci irritano, di quelle stesse note di cui si compongono i rumori molesti, gli stridori tormentosi?

E le tele di Raffaello e di Leonardo, le vaste composizioni del Buonarroti, gli angioletti e le madonne del Tiziano cessano di essere mirabili perchè si riducono in fondo a pochi colori elementari?

Nessuno penserà queste cose, e noi, dopo l'analisi che ho fatto della costituzione dei ragionamenti, non cesseremo di ammirare, pur nella sua primitiva semplicità, la produzione matematica della scuola greca, le geniali vedute precorritrici dei tempi di Archimede, l'opera molteplice dei grandi matematici che negli ultimi secoli ci hanno preceduto.

Quest'opera continua a commuoverci colla sua bellezza e colla sua armoniosità, per il sussidio che ci fornisce nella risoluzione dei grandi problemi che la pratica ci impone, per la radiosa speranza, che tien viva in noi, di poter penetrare gli imponenti misteri che ci circondano, di poter scoprire col suo aiuto tutte le leggi che governano l'universo, di poter compiere questa grande missione che Iddio ha affidato all'umanità quando ad essa donò il *pensiero* e la *fantasia*.

E adesso che noi abbiamo visto quale è la struttura dei ragionamenti, possiamo domandarci quale parte il ragionamento ha nella scoperta delle verità che costituiscono la nostra scienza, di quelle verità che, imponenti singolarmente e armoniose nella loro varietà multiforme, sono come i fiori non caduchi di un giardino di fata?

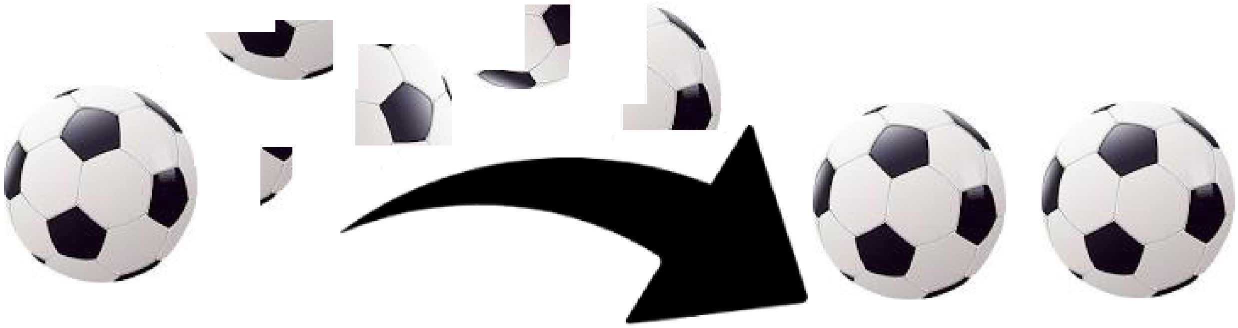
Il primo pensiero sarebbe che sia il ragionamento che a noi svela la verità, che le verità siano come le uscite di un labirinto, che i ragionamenti siano i sentieri di questo labirinto nel quale noi ci muoviamo incoscienti del nostro scopo in cerca di un'uscita, guidati solo dalla fortuna e da un certo senso di orientazione.

Ma non è così: il matematico di razza non cerca la verità a tentoni, non si muove nel labirinto in cerca di un'uscita qualsiasi.

Il matematico di razza conosce la verità cui vuol giungere, anche prima di mettersi in cammino; conosce la particolare uscita del labirinto che si propone di raggiungere, uscita che egli, dotato di particolare facoltà di visione, ha visto attraverso le pareti spesse del labirinto: in altri termini, per lasciare il campo figurato, il matematico possiede una particolare intuizione che gli permette di sentire la verità della verità, anche se mancano gli elementi logici di una tale persuasione, anche se la intuizione comune ed il comune buon senso portassero a ritenere tale verità come inverosimile: una particolare intuizione che si può ritenere come dovuta ad un nuovo senso, un sesto senso, posseduto dai matematici.

Ecco come si fa la matematica, o almeno la grande matematica.
Dapprima il matematico sente che una certa proposizione deve essere vera, e poi si assicura col ragionamento che il sesto senso non lo ha ingannato.
Quest'ultima operazione è indispensabile, perchè il sesto senso, come tutti gli altri sensi dell'uomo, non è sempre nel suo pieno vigore, nella sua piena validità, non è, e voi ne siete già persuasi, nè una fontana a getto continuo, nè una sorgente che dà sempre a richiesta acqua pura.

Ma che si debba credere all'esistenza di un *quid* che può essere questo sesto senso, io ve ne do la prova con qualche esempio.



Se io vi raccontassi che è possibile pensare una figura finita formata di punti nel nostro spazio, divisibile in due parti che singolarmente si possono con un movimento sovrapporre alla intera figura data, voi direste che io sono pazzo.[1]

Ma non era pazzo Felix Hausdorff, professore oggi nella Università di Bonn in Prussia, quando nel 1914 nei suoi "*Grundzuge der Mengenlehre*" descriveva una tale figura. E' chiaro che la verità che con tale costruzione l'Hausdorff ha dimostrato non è intuitiva secondo la comune intuizione, anzi sembra in contrasto con quella che è la comune intuizione. Tuttavia è da pensare che Egli abbia dapprima sentita la verità del fatto e che poi si sia accinto all'improba fatica di realizzarla in un esempio. Ma l'intuire una verità non è cosa da comuni mezzi. Hausdorff lo ha potuto fare perchè dotato di un senso eccezionale o perchè guidato dalla mano di Dio.

Felix Hausdorff

Questo risultato sbalorditivo dell'Hausdorff merita, a mio avviso, molta attenzione, perchè contiene degli elementi che possono servire a spiegare la contrazione della materia senza ricorrere all'ipotesi della discontinuità di questa...

... A questo punto io dovrei dirvi quel che sarà il mio insegnamento. Ma basterà che io vi dica quale sarà lo spirito di questo insegnamento.

Io amo, almeno quando vi riesco, trattare la scienza con una visione personale, e, sempre, quando mi è possibile, superare le opinioni correnti e prospettare i problemi sotto un aspetto nuovo.

Ho l'impressione che alcune vie sinora battute siano da lasciare, che alcuni abiti mentali siano da abbandonare, se non si vuole tarpare le ali al progresso. Anche alla scienza bisogna talvolta ripetere il grido di Caronte

"Per altra via, per altri porti
verrai a piaggia non quì per passare".

---

1 Il paradosso di Hausdorff comporta, nella sua versione più comune, che un pallone può essere tagliato in un numero finito di pezzi i quali, ruotati e riassemblati, formano due copie dello stesso pallone.

Nella mia funzione di maestro spero di potervi indicare altre vie, se non altri porti.

Come la nostra politica, pur tenendo in debito conto tutta la esperienza del passato, ha potuto sollevare il prestigio e la fortuna della nostra patria assumendo un nuovo stile, così, io ritengo che la scienza pur senza rinnegare il suo glorioso passato, pur conservando il più possibile di tutto quello, che nel passato fu ritenuto conquista, debba rinnovare il suo stile e con novello ardire lanciarsi per vie nuove alla conquista del vero.

Epilogo: Vitali non visse abbastanza per salutare il suo compagno di studi, il grande matematico Guido Fubini, che scappava, prima a Parigi e poi negli Stati Uniti, a causa delle leggi razziali del 1938, e per piangere la morte di Hausdorff, suicidatosi nel 1942 per timore di una sicura deportazione. Non sappiamo se, potendolo prevedere, avrebbe concluso il suo discorso riconoscendo alla politica del tempo tanto merito.