PROBLEMI RISOLTI E DA RISOLVERE N. 1

Premessa

I testi dei problemi da risolvere saranno tratti dalle seguenti riviste:

- *Angolo Acuto (dal 1949 al 1979).*
- *La Scienza per/e i giovani (dal 1952 al 1966).*
- *Il Supplemento del Periodico di Matematica (dal 1897 al 1917).*
- *Periodico di Matematica (dal 1897 al 1919)*
- *Il Pitagora (dal 1906 al 1917).*
- *Periodico di Matematiche (dal 1921)*
- *Rivista di Matematica pura e applicata (dal 1932 al 1935)*

I lettori di Euclide potranno cimentarsi nella loro soluzione, che dovrà pervenire entro un mese dalla data di emissione del presente numero di Angolo Acuto. I nomi dei solutori e della loro scuola saranno riportati in corrispondenza della soluzione; nel caso non dovesse pervenirne nessuna , ma siamo sicuri di riceverne tante, la soluzione sarà a cura della Redazione.
In ogni numero di Angolo Acuto sarà riportato anche il testo di un problema con la propria soluzione.
I problemi da risolvere sono i seguenti:

Problema 1.1 – Se si indica con r il raggio del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo (fig. 1), con h l'altezza relativa all'ipotenusa e con r_1 e r_2 i raggi dei cerchi iscritti nei due triangoli rettangoli in cui l'altezza h divide il triangolo dato, dimostrare che si ha: $h = r + r_1 + r_2$.

Problema 1.2 – In un quadrato si congiunge il punto di mezzo di ogni lato con un vertice del quadrato (fig. 2); calcolare il rapporto fra l'area del quadrato originario ed il quadrato tratteggiato.

Problema 1.3 – In un quadrato si congiunge il punto di mezzo di ogni lato con gli estremi del lato opposto (fig. 3); calcolare il rapporto fra le aree del quadrato e dell'ottagono tratteggiato.

Problema 1.4 – Si prenda un punto O interno ad un triangolo ABC, (fig. 4) dimostrare che si ha la seguente relazione:

$$OA'/AA' + OB'/BB' + OC'/CC' = 1.$$

Problema 1.5 – In un triangolo qualsivoglia ABC, con base AB, inscrivere un triangolo equilatero avente un lato parallelo ad AB.

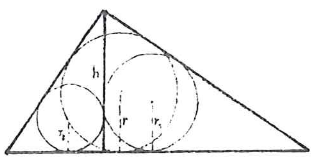

Fig. 1

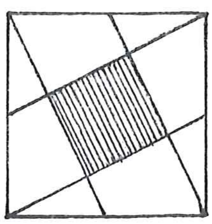

Fig. 2

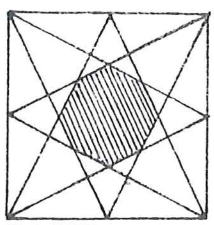

Fig. 3

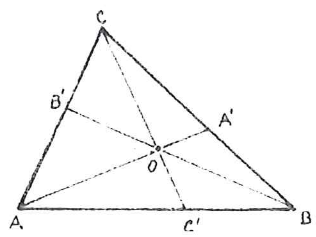

Fig. 4

UNA NOTEVOLE PROPRIETA'
DEI POLIGONI REGOLARI

segnalata dal Prof. Luigi Campedelli
dell'Università di Firenze

Il prof. Campedelli, in data 10 marzo, mi ha scritto: "Carissimo professore, lavorando intorno ad una tesi di laurea mi è capitato di osservare una proprietà dei poligoni regolari che mi sembra interessante. È certamente nota, ma non ho avuto il tempo di rintracciarla.
Ecco di cosa si tratta:

a) Da ogni vertice di un poligono regolare di n lati, escono *due* lati e n-3 diagonali: la somma dei quadrati di queste n-1 segmenti è uguale a 2n volte il quadrato del raggio del cerchio circoscritto al poligono.

La proposizione *a*) rientra in un'altra più generale.

b) Dati sopra un cerchio W, n punti

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$$

se il loro baricentro cade nel centro O di W, la somma dei quadrati delle distanze dei punti A_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ da un qualunque punto A di W è uguale a 2n volte il quadrato del raggio del cerchio W. Cioè

$$(1) \qquad \overline{AA_1}^2 + \overline{AA_2}^2 + \ldots + \overline{AA_n}^2 = 2n \cdot \overline{0A}^2$$

Ricorro a coordinate cartesiane ortogonali con l'origine in 0.

Posto $A = (x, y)$, $A_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, dal fatto che è 0 è il baricentro dei punti A_i segue:

$$(2) \qquad \sum x_i = 0, \qquad \sum y_i = 0.$$

Il primo membro della (1), tenendo conto della (2), si scrive:

$$(3) \quad \sum \left\{ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right\} = n\,(x^2 + y^2) + \sum (x_i^2 + y_i^2),$$

e quindi appunto la (3) dà:

$$\sum \left\{ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right\} = 2nr^2,$$

poiché, detto r il raggio del cerchio W, risulta:

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad x_i^2 + y_i^2 = r^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Ciò premesso, per giungere alla proporzione *a)*, basta tener conto del fatto che i vertici di un poligono regolare hanno il baricentro nel centro del cerchio circoscritto, e quindi vale la *b)* che si riduce alla *a)* facendo coincidere il punto A con uno dei vertici del poligono considerato.

La *b)* è suscettibile di varie generalizzazioni.

Se questa mia le può essere utile, per la fatica che dedica al suo "Angolo acuto" ne sarò molto lieto. Con viva cordialità".