La distribuzione dei razionali sulla retta reale (raccontata dallo zero)

Donato Saeli

Io ero lo *zero* e chissà per quale motivo, guardavo con molto interesse l'*uno* che mi stava di fronte. Improvvisamente si piazza fra noi l'*un mezzo* e poi l'*un terzo* fra me e l'*un mezzo* e ancora l'*un quarto* davanti all'*un terzo* ed in successione, sempre più velocemente, l'*un quinto*, l'*un sesto … . A*ppena comparso l'*un ventinovesimo* mi svegliai di soprassalto; quello, seppure in una dimensione, era un incubo (non sopporto i luoghi affollati).

Dopo qualche minuto, rilassandomi, riflettevo sul fatto che l'*un vetottesimo* stava peggio di me (cioè dello *zero*) avendo spiaccicato sopral'*un ventinovesimo*; infatti la loro distanza $\frac{1}{28} - \frac{1}{29} = \frac{1}{28 \cdot 29}$ è giusto un ventottesimo della distanza fra *un ventinovesimo* e lo *zero*.

Era chiaro poi che il brutto sogno mi era stato indotto da una delle proprietà essenziali dell'insieme dei numeri razionali che consiste proprio nell'essere denso; vale a dire fra due frazioni distinte è sempre possibile inserirne una terza. Ad esempio fra $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{7}$ si può collocare $\frac{5}{12}$.

Notiamo che $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5 \cdot 7}$, $\frac{5}{12} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5 \cdot 12}$, e $\frac{3}{7} - \frac{5}{12} = \frac{1}{7 \cdot 12}$.

PROPOSIZIONE 1. *Se* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *sono due frazioni tali che* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, *allora.* $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Infatti le relazioni $a(b + d) < b(a + c)$ e $(a + c)d < (b + d)c$ seguono immediatamente dalla $ad < bc$.

Quest'ultima relazione significa che la differenza $bc - ad$ deve essere un intero positivo.

PROPOSIZIONE 2. *Se* $bc - ad = 1$, *allora è anche* $b(a + c) - a(b + d) = 1$ *e* $(b + d)c - (a + c)d = 1$, *inoltre tutte e tre le frazioni* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}$ *devono essere ridotte*.

Supponiamo sia ad esempio $\frac{c}{d} = \frac{m \cdot c'}{m \cdot d'}$, dall'ipotesi $bc - ad = 1$ segue

$m(bc' - ad') = 1$, cioè $m = 1$.

DEFINIZIONE 3. La frazione $\frac{a+c}{b+d}$ si dice la *mediante*[1] delle frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ ed in generale non è la somma e neanche la media di queste frazioni.

DEFINIZIONE 4. Se $bc - ad = 1$, le frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono *adiacenti*.

Allora la prima parte della proposizione 2 può essere così riformulata: *Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono due frazioni adiacenti, allora anche $\frac{a}{b}$ e $\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{a+c}{b+d}$ e $\frac{c}{d}$ lo sono.*
Nell'esempio $\frac{5}{12}$ è la mediante delle frazioni adiacenti $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{7}$.

LEMMA 5. *Se $bc - ad = 1$ e $\frac{h}{k}$ è una frazione tale che $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$ allora esistono e sono unici x e y, interi positivi tali che $h = ax + cy$ e $k = bx + dy$.*

Infatti il sistema formato dalle ultime due equazioni del lemma ammette l'unica soluzione $x = kc - hd > 0$ e $y = hb - ka > 0$.

COROLLARIO 6. *Se $bc - ad = 1$, per ogni frazione ridotta $\frac{h}{k}$ tale che $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$* deve essere $k \geq b + d$ ed è $k = b + d$ solo se $\frac{h}{k} = \frac{a+c}{b+d}$.

Cioè fra tutte queste frazioni è solo la mediante ad avere il denominatore minimo.

DEFINIZIONE 7. Se n è un intero positivo, si dice sequenza di Farey di ordine n e si indica con F_n l'insieme di tutte le frazioni ridotte $\frac{h}{k}$ tali che $0 \leq \frac{h}{k} \leq 1$, con $1 \leq k \leq n$, disposte in ordine crescente. Osserviamo che per ogni n, è $F_n \subseteq F_{n+1}$.

La proposizione seguente ci aiuta a vedere che da una sequenza F_n si ottiene la successiva F_{n+1} con l'inserimento di opportune medianti: esattamente quelle con denominatore $n + 1$.

PROPOSIZIONE 8 (Teorema di Farey – Cauchy). *In ogni sequenza di Farey F_n due frazioni consecutive nella sequenza sono sempre adiacenti.*

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sull'ordine n della sequenza.[2]

---

1 Termine introdotto da Hardy e Littlewood ([Rh], pg 25).

2 Il primo principio di induzione afferma: *Se a ogni intero positivo n è associato un enunciato P(n) e risulta che P(1) è vero e P(n+1) è vero ogniqualvolta lo è P(n), allora P(n) è vero per ogni n.*

In $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$ le "frazioni" $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$ sono adiacenti. Supponiamo vero l'enunciato per *n* e consideriamo due frazioni $\frac{r}{s}$ e $\frac{t}{v}$ consecutive in F_{n+1}.

Vi sono due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ consecutive in F_n tali che $\frac{a}{b} \leq \frac{r}{s} < \frac{t}{v} \leq \frac{c}{d}$.

Se $\frac{a}{b} = \frac{r}{s} < \frac{t}{v} = \frac{c}{d}$, allora $\frac{r}{s}$ e $\frac{t}{v}$ sono adiacenti per ipotesi di induzione.

Sia $\frac{a}{b} = \frac{r}{s} < \frac{t}{v} < \frac{c}{d}$. Poiché $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono consecutive in F_n la loro mediante $\frac{a+c}{b+d}$ non appartiene a F_n, cosicché $b + d > n$. Per il corollario 6 si ha $n + 1 \geq v \geq b + d > n$ da cui segue $n + 1 = v = b + d$.

Così $\frac{t}{v} = \frac{a+c}{b+d}$ e per la proposizione 2, $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$ e $\frac{t}{v} = \frac{a+c}{b+d}$ sono adiacenti.

In modo analogo si ragiona nel caso $\frac{a}{b} < \frac{r}{s} < \frac{t}{v} = \frac{c}{d}$.

Non può essere $\frac{a}{b} < \frac{r}{s} < \frac{t}{v} < \frac{c}{d}$, perché se così fosse, ripetendo la dimostrazione fatta sopra, $\frac{a+c}{b+d}$ dovrebbe appartenere a F_{n+1} ed almeno una delle frazioni $\frac{r}{s}$ oppure $\frac{t}{v}$ risulterebbe con denominatore maggiore di $b + d = n + 1$ e quindi sarebbe non appartenente a F_{n+1}, contro l'ipotesi. La dimostrazione è così conclusa.

La sequenza $F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$ si ottiene dalla F_1 inserendo fra $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$ la loro mediante $\frac{1}{2}$.

La sequenza $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$ si ottiene dalla F_2 inserendo fra $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{2}$ la loro mediante $\frac{1}{3}$ e fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{1}$ la loro mediante $\frac{2}{3}$.

La sequenza $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ si ottiene dalla F_3 inserendo le medianti $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$; le altre due medianti $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$ sono da inserire nella sequenza successiva F_5 .

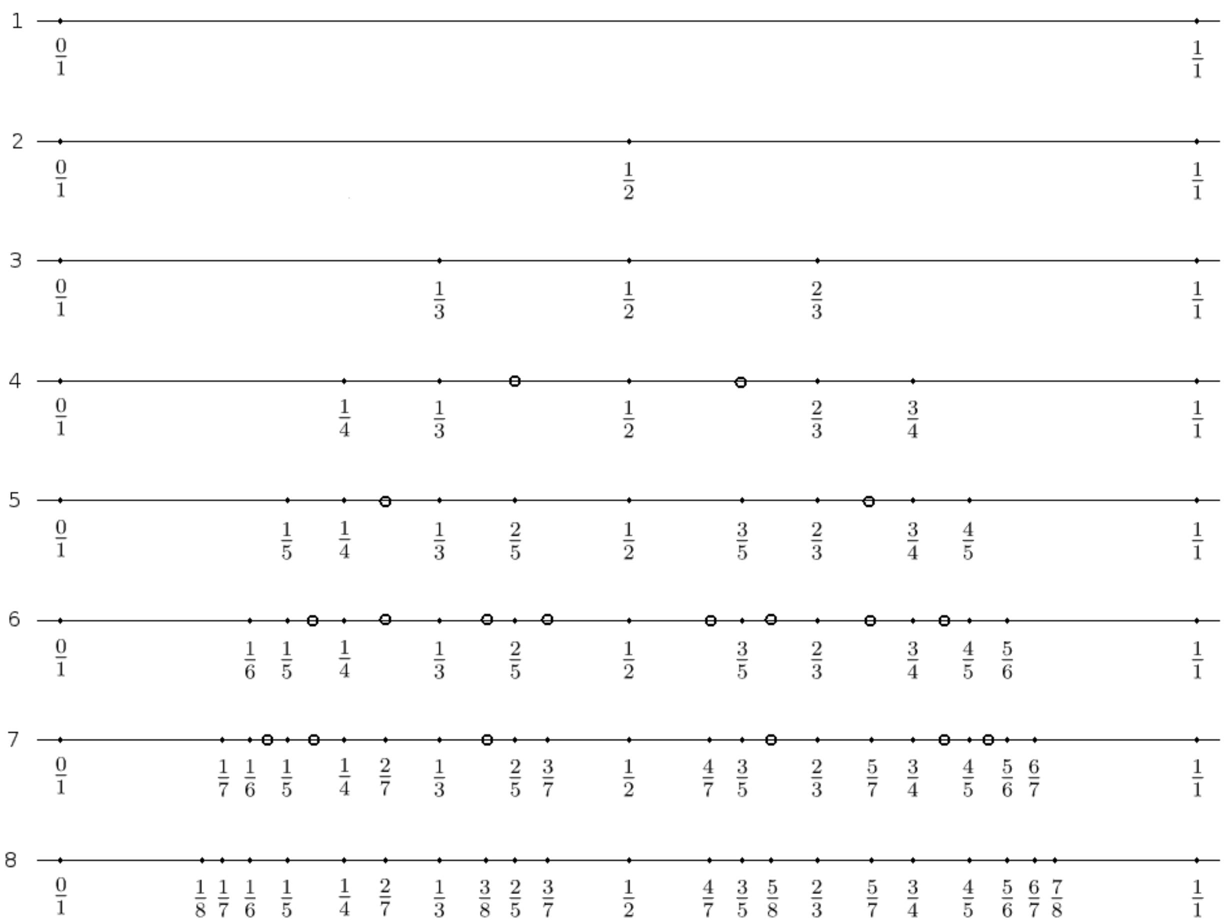
. . . .

. . . .

- Il quadro che segue riporta le sequenze di Farey per $1 \leq n \leq 8$,

- i punti corrispondono alla posizione sulla retta reale di ciascuna frazione,

- I cerchietti indicano medianti i cui denominatori eccedono l'ordine della sequenza, e che pertanto sono da inserire in sequenze successive.



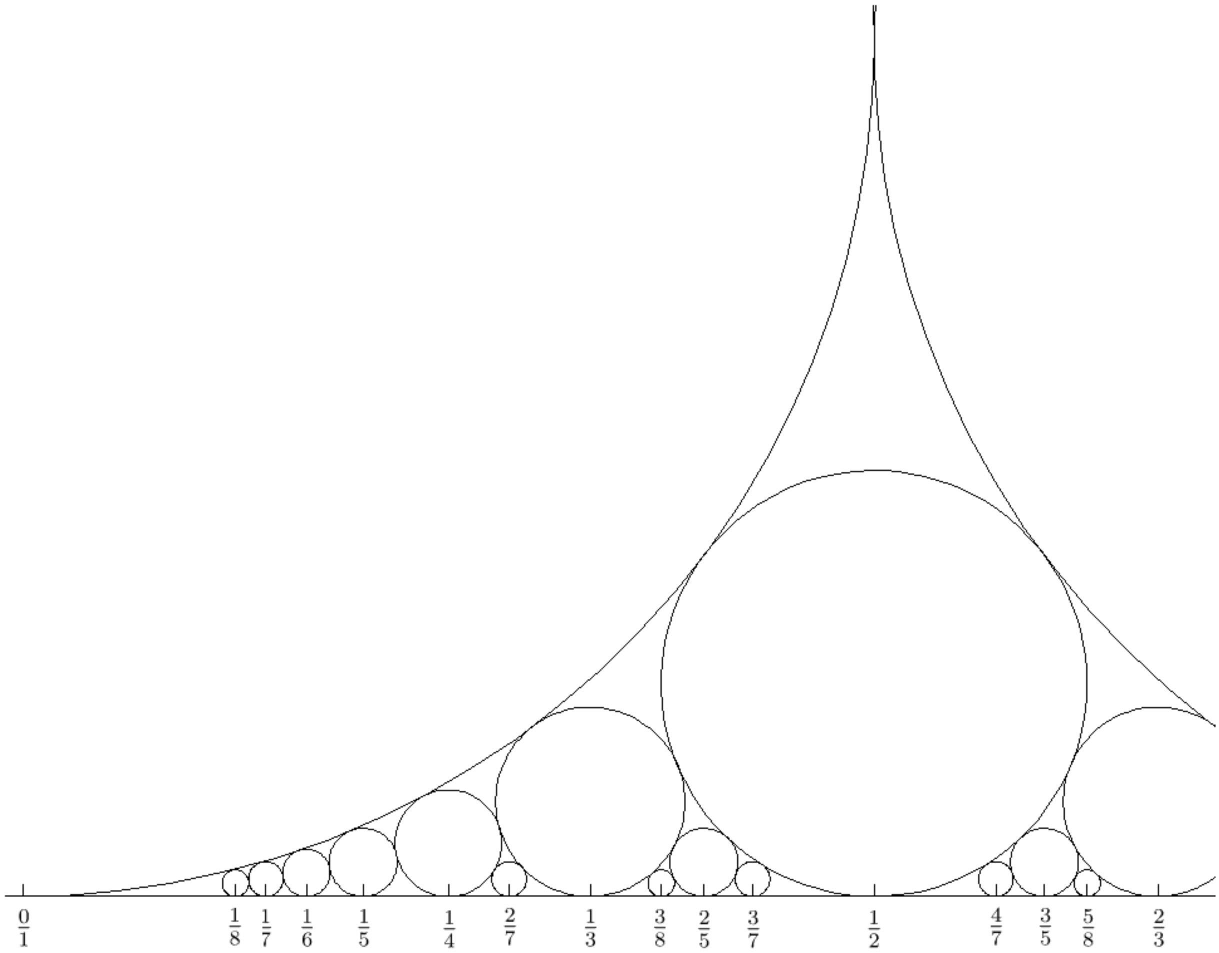
Propongo ora ai giovani lettori alcune domande:

- Quali sono le medianti da inserire in F_8 per ottenere F_9?

- Cosa succede nell'intervallo [7, 8] ? Le frazioni $\frac{59}{8} = 7 + \frac{3}{8}$ e $\frac{37}{5} = 7 + \frac{2}{5}$ sono adiacenti ? E qual è la loro mediante ?

- Possiamo concludere che quanto prima esposto si ripete per ogni intervallo [n , n+1] della retta reale ?

«L. R. Ford ha trovato una bella illustrazione per le sequenze di Farey. Sopra ciascuna frazione $\frac{h}{k}$, disegniamo un cerchio di diametro $\frac{1}{k^2}$ come nella figura seguente. Si scopre che questi cerchi di Ford non si sovrappongono, ma spesso si toccano. Infatti i cerchi sopra $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si toccano proprio quando queste frazioni sono adiacenti e allora il cerchio massimo che è possibile tracciare fra loro e la retta reale corrisponde alla mediante $\frac{a+c}{b+d}$» ([CG], pg. 153,154).



Bibliografia

[CG] J. H. Conway - R. K. Guy, The Book of Numbers, Copernicus, Springer, New York, 1996

[Ra] Hans Rademacher, Higher Mathematics from an Elelmentary Point of View, Birkhäuser, Stuttgart, 1982