Concavitate aut convexitate in puncto de superficie versus puncto

di GUIDO FACCIOTTI (Trento)

Ut nos habe extenso notione de concavitate vel convexitate in puncto P de *superficie* $\mathcal{S}$ *versus plano* [1], nos vol extende nunc *notione de concavitate vel convexitate versus puncto* que nos nomina O, ut nos fac pro curvas plano [2].

Nos debe admitte sequente conditiones necessario:

a) que in P existe plano tangente ad $\mathcal{S}$ et que nos voca τ,

b) que existe conveniente regione σ de $\mathcal{S}$ circum P que jace toto in idem parte pro plano τ *(puncto elliptico aut parabolico)*,

c) que O *non* jace in τ.

Nos dic tunc que $\mathcal{S}$ es *concavo* in P versus O si existe conveniente regione σ de $\mathcal{S}$ circum P toto jacente in illo parte pro plano τ ubi et puncto O. Si σ jace toto in parte *contrario* de O relato ad plano τ, nos dic que $\mathcal{S}$ in P es *convexo* versus O.

Criterios analytico pro nosce si $\mathcal{S}$ in P es concavo aut convexo versus O es multo simplice si nos elige terna di axis cartesiano orthogonale cum origine O et, relato ad isto terna, æquatione de $\mathcal{S}$ es:

$$z = f(x, y); \tag{1}$$

nos voca x_0, y_0, z_0 coordinata de P.

---

(1) Vide G. FACCIOTTI « *Concavitate aut convexitate in puncto de superficie versus plano* ». Isto « *Bollettino* » 1939, fascicolo IV-V-VI, pag. 93.

(2) V. « Enciclopedia delle Matematiche elementari » edito per L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli † - Vol. I, parte II - Milano 1932 pag. 504.

Notione de concavitate aut convexitate versus plano que nos stude in præcedente labore, pote es uso in præsente casu. Nos deduc in modo facile que superficie $\mathcal{S}$ es *concavo versus origine* si in P superficie $\mathcal{S}$ es *concavo versus plano* $z=0$, id es [1]:

$$z_0 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0, \tag{2}$$

et segmento Z, determinato super axi z ab plano tangente τ, habe idem signo de z_0, id es:

$$z_0 Z > 0; \tag{3}$$

et etiam si $\mathcal{S}$ es *convexo versus plano* $z=0$, id es:

$$z_0 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0, \tag{2'}$$

et Z habe signo *contrario* di z_0, id es:

$$z_0 Z < 0. \tag{3'}$$

Si nos moltiplica inter illos (2) et (3), aut (2′) et (3′), et neglige factore positivo z_0^2, nos perveni, ambo casu, ad conditione:

$$Z \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0. \tag{4}$$

Ad contra, si præcedente producto es positivo, id es:

$$Z \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0 \tag{5}$$

$\mathcal{S}$ es *convexo versus O*.

Si nos pone $X = Y = 0$ in æquatione de τ:

$$Z - z_0 = p_0(X - x_0) + q_0(Y - y_0),$$

ubi p_0 et q_0 es derivata partiale computato in P de (1) pro x, aut y, in corrispondentia, nos obtine Z, id es $Z = z_0 - p_0 x_0 - q_0 y_0$, inde, ab (4) et (5), nos deduc que

[1] V. meo opere cit., formula (6), pag. 95.

« *si in punctos elliptico aut parabolico (dummodo ibi sal-*
« *tem* $\partial^2 f(x_0, y_0)/\partial x^2 \neq 0$ *aut* $\partial^2 f(x_0, y_0)/\partial y^2 \neq 0$*) producto :*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\,[z_0 - p_0 x_0 - q_0 y_0] \tag{6}$$

« *es negativo (positivo), superficie* $\mathcal{S}$ *es concavo (convexo)*
« *versus origine* ».

Exemplos (1).

Nos jam sci que omne puncto de *paraboloide elliptico* $z = 1 + x^2 + y^2$ es *elliptico*; producto (6) fi, in isto casu, $2(1 - x^2 - y^2)$ que es *positivo* in omne puncto de coordinatas x, y que satisfac ad relatione $x^2 + y^2 < 1$ (id es illos comprehenso inter vertice (0, 0, 1) et circumferentia commune ad paraboloide et cono tangente que habe pro vertice O). In illos tunc paraboloide es *convexo* versus O, ad contra es *concavo* in omne alio puncto.

Superficie sphærico $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ habe omne suo puncto *elliptico*; producto (6) fi $-(1 - y^2)/(1 - x^2 - y^2)^2$ que es *semper negativo*, inde isto superficie es *semper concavo* versus origine.

Omne puncto de *semicono* $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ [exepto *vertice* (0, 0, 1)] es *parabolico* et producto (6) es $y^2/(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ que es *semper positivo*, inde semicono es *convexo* versus O.

Etiam *cylindro parabolico* $z = 1 + x + y^2$ habe omne suo puncto *parabolico* ($\partial^2 f/\partial x^2 = 0$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 2$) et expressione (6) es $2(1 - y^2)$ que habe signo *positivo* dum $-1 < y < 1$, id es in illo punctos comprehenso inter duo generatrice commune ad planos tangente et cylindro et que transi per axi x; ibi superficie es tunc *convexo* versus origine, contra in omne alio es *concavo*.

In *punctos elliptico* de *superficie* $z = 1 + x^2 + y^3$ expressione (6) fi $2(1 - x^2 - 2y^3)$; in suo puncto ubi $x^2 + 3y^2 < 1$, superficie es *convexo* versus O et *concavo* in omne altero elliptico.

---

(1) Nos considera idem exemplos de præcedente labore.

POSTILLA

Professore U. CASSINA scribe ad me littera, ubi criterios de concavitate vel convexitate de $\mathscr{S}$ in P *versus plano* aut *versus puncto* es misso sub forma vectoriale.

Me puta interessante redde noto ad lectores quod es in illo littera; in sequente expositione me adopta idem symbolos de isto et de præcedente Nota.

Puncto P, functione de duo variabile numerico u et v, genera superficie $\mathscr{S}$; si nos voca P'_u, P'_v derivatas partiale di P pro u et v, vectore $P'_u \wedge P'_v$, si non es nullo, es orthogonale ad τ. Tunc, conditione de *convexitate* de $\mathscr{S}$ in P versus π es que puncto H et punctos P_1 de conveniente regione circum P, es in opposito partes pro plano τ, id es:

$$P'_u \wedge P'_v \times (P - H) \quad , \quad P'_u \wedge P'_v \times (P_1 - P)$$

habe *idem signo.*

Cum ratiocinio analogo ad illo de præcedente Nota et extenso ad punctos functione de duo variabile [1], nos obtine que signo de $P'_u \wedge P'_v \times (P_1 - P)$ es æquale ad illo de $P'_u \wedge P'_v \times P''_u$, unde seque que expressione (6) de super mentionato Nota sume forma:

$$(6') \qquad P'_u \wedge P'_v \times (P - H) \cdot P'_u \wedge P'_v \times P''_u ,$$

que debe es *positivo* pro *convexitate*, *negativo* pro *concavitate.*

Nunc, si nos adopta systema de coordinatas cartesiano orthogonale de præcedente Nota, ex (6') nos obtine subito (6). In vero, nam $P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{K}$, ubi O es aliquo puncto de π, $P - H = (P - O) \times \times \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{K} = z\boldsymbol{K}$ et nos sume quale coordinatas curvilinea u et v, x et y, nos habe $P'_x = \boldsymbol{i} + p\boldsymbol{K}$, $P'_y = \boldsymbol{j} + q\boldsymbol{K}$, ergo $P'_x \wedge P'_y = -p\boldsymbol{i} - q\boldsymbol{j} + + \boldsymbol{K}$, $P''_x = r\boldsymbol{K}$ unde seque:

$$P'_x \wedge P'_y \times (P - H) = z \quad , \quad P'_x \wedge P'_y \times P''_x = r$$

id. es:

$$z \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} .$$

Sed (6') permitte ad nos etiam de habe criterio sub forma cartesiano *qualecumque* es sistema de coordinatas.

In fine, nos nota que (6') exprime etiam criterio de *convexitate aut concavitate de $\mathscr{S}$ in P versus puncto* H et que ab illo, si nos selige H quale origine de coordinatas, id es $O \equiv H$, nos habe subito conditione determinato in isto Nota.

***

Ab isto considerationes seque potentia et simplicitate de methodos vectoriale intrinseco.

GUIDO FACCIOTTI

---

[1] Vide G. PEANO « *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* », Torino, 1887, pag. 119.