ISTITUTO STORICO ITALIANO
PER IL MEDIOEVO

Concorso
La Matematica nel Medioevo
Premio Bruno Rizzi
III edizione (2010 – 2011)

QUANTA MATEMATICA SULLE ALI DI 100 UCCELLI? ANALISI DI UN PROBLEMA TRATTO DA UN MANOSCRITTO D'ABACO DEL XIII SECOLO

Alunni: Luca Bettoni, Serena Bruneri, Luca Cambiaghi, Sara Scolari, Riccardo Barbieri, Alice Borghi, Riccardo Pasquali, Valentina Pasquali (Studenti della III A, III G del Liceo Scientifico "G. Aselli" di Cremona)

Referenti: Proff. Elisa Di Gesaro, Silvano Gregori, Nicoletta Nolli

Una breve premessa: nel seguente lavoro sarà analizzato un problema che, pur essendo di origini più antiche[1], è stato spesso riproposto nella trattatistica d'abaco come problema di matematica ricreativa. Noto come "problema dei 100 uccelli", esso è formulato dal maestro d'abaco del Manoscritto Palatino 312[2] in una versione con numeri diversi. L'intento del maestro è quello di esercitare ed affinare le menti

---

[1] Già presente nell'opera del cinese Zhang Qiujian (metà del V sec. d.C.),lo si ritrova anche nelle opere dei matematici indiani (Bakhshali e Mahavira) e arabi (Abu-Kamil). In Europa appare nelle *Propositiones ad acuendos juvenes di Alcuino* da York e in seguito nel Liber abaci di Leonardo Pisano.

[2] Conservato presso la Biblioteca Palatina di Parma, il manoscritto è stato trascritto e pubblicato nel 1998 come Quaderno del Dipartimento di Matematica, col titolo *Libro di conti e mercatanzie*, a cura di L. Grugnetti e S. Gregori.

dei giovani allievi. Il problema è stato presentato e discusso durante alcune lezioni a classi unite, suddivise in piccoli gruppi di lavoro, con la compresenza dei docenti di matematica; in seguito un ristretto gruppo di alunni delle due classi, con la supervisione della docente di italiano, ha redatto il testo qui proposto.
Affrontato con strumenti moderni, il problema porta ad un'equazione lineare diofantea, per la cui risoluzione i nostri studenti hanno messo in atto strategie che hanno toccato diversi frame cognitivi: da quello algebrico a quello della geometria analitica; da quello della geometria piana delle similitudini a quello delle questioni di divisibilità fra interi.
Questa esperienza si è rivelata ricca di stimoli e di spunti di riflessione su argomenti già conosciuti, ma spesso assimilati senza la dovuta consapevolezza.
La conclusione del lavoro è lasciata deliberatamente "aperta", perché il problema è fonte di possibili rilanci didattici (algoritmo euclideo, classi di resti, equazioni diofantee, ultimo teorema di Fermat…) che potranno essere affrontati nel seguito del triennio.
Ci è piaciuto presentare la descrizione della nostra attività in classe in una forma un po' inconsueta…

Un sabato mattina di un caldo fine maggio, terza ora, lezione di matematica.
"Bene ragazzi, oggi voglio fare con voi un salto nel passato della matematica: dovete sapere che la nostra materia preferita non è sempre stata così come la conosciamo noi oggi.
Nell'ottavo secolo d.C. al-Khuwarizmi, ad esempio, formulava le equazioni in modo totalmente retorico, senza l'uso di simboli, con spiegazioni prolisse e con incognite e loro potenze indicate non da simboli, ma da parole.
La risoluzione, poi, era basata sull'*al-jabr* (restaurazione) e sulla *al-muqabalah* (riduzione), due tecniche che possono essere ricondotte al I e II principio di equivalenza che oggi conosciamo.

Ritenetevi dunque fortunati se nei testi dei vostri problemi trovate scritto x e x^2 e non *shay* e *mal*.

Il merito di avere importato in Europa l'algebra degli arabi va a Leonardo Pisano, meglio conosciuto come Fibonacci; con il suo *Liber abaci*, nel 1202, egli ha inoltre introdotto le cifre indo-arabe e gli algoritmi di calcolo con il sistema posizionale e quelli per l'estrazione di radici. Fibonacci li ha prevalentemente applicati a questioni di matematica mercantile, con problemi relativi ad acquisti, vendite, cambi di monete e baratti, e di matematica ricreativa.

La sua influenza sulla matematica in Italia non fu immediata: il libro infatti era complesso e difficile e le conoscenze matematiche della potenziale utenza arretrate e non adatte a comprendere e padroneggiare l'enorme mole di metodi e problemi proposti. I primi segnali dell'influenza di tale trattato sono visibili verso la fine del XIII secolo, con la nascita delle cosiddette "scuole d'abaco".

Organizzate dalle corporazioni mercantili, in tali scuole si insegnava agli apprendisti artigiani e commercianti l'aritmetica pratica per l'applicazione alle operazioni commerciali secondo il modello del *Liber abaci* e qualche rudimento di teoria dei numeri; oltre a ciò i maestri d'abaco (così si chiamavano i "prof" di matematica di allora, ragazzi!) insegnavano a svolgere cambi di monete, somme, prodotti, calcoli di interesse, problemi ricreativi e indovinelli. Le lezioni, che si tenevano spesso nei retrobottega e che duravano l'intera giornata, erano in volgare, non in latino, e l'insegnamento, basato sulla ripetizione di esercizi orali e scritti e sullo svolgimento di compiti a casa, non era finalizzato alla comprensione di metodi, ma all'apprendimento di tecniche."

Dal fondo della classe, Silvano, sbadigliando, cercava faticosamente di tenere gli occhi aperti e seguire il discorso del professore...

"Affinché v'immedesimiate in un giovane studente destinato a diventare mercante e possiate comprendere meglio la matematica del tempo, vorrei sottoporre a voi ragazzi un tipico problema di aritmetica che i futuri commercianti dell'epoca di

Dante avrebbero dovuto saper risolvere: *Un mercante*…zzz…*40 denari*…*40 uccelli* zzzzz…”

Silvano cerca di resistere, ma è sconfitto, piega la testa sul banco ed ecco iniziare uno strano sogno...

“*Uno vuole spendere 40dr in 40 uccelli vivi di tre ragioni, cioè tordi, lodole e passore.*

Il tordo vale 3dr, la lodola vale 2dr e 4 passere al denaio.

Adomando quanto torrò di ciascuno.”

Silvano vede di fronte a sé in cattedra un maestro d'abaco in carne e ossa: sta proponendo a lui e ai suoi compagni uno strano problema.

“Finalmente qualcosa di interessante! Se ho capito bene ci sta chiedendo di trovare i numeri di tre uccelli di razze diverse, tenendo conto che una razza costa 3dr, una 2dr e l’ultima 0.25dr per ogni esemplare e il totale degli uccelli deve essere 40!”

Il suo ragionamento ad alta voce viene interrotto da Elisa, la sua compagna di banco, che per la prima volta in tre anni sembra seguire la lezione (magie dei sogni…):

“Beh, ma è semplice! Basta procedere per tentativi! Scriviamo un numero casuale di tordi, che sono i più costosi e in base a quello che ci rimane regoliamo gli altri due, finché non troviamo una soluzione! Per esempio mentre il maestro recitava il problema, ho fatto due conti:

uccelli	*denari*	*uccelli*	*denari*	*uccelli*	*denari*
10 t	*30dr*	*8 t*	*24dr*	***9*** *t*	*27dr*
4 l	*8dr*	*4 l*	*8dr*	***3*** *l*	*6dr*
8 p	← *2dr*	*32 p*	← *8dr*	***28*** *p*	← *7dr*
22 Pochi!		*44 Troppi!*		*40 Esatto!*	

Ecco la soluzione! 9 tordi, 3 allodole, 28 passeri”.

Nicoletta si gira dal banco davanti: “Sì, ma sarà la sola? Perché, piuttosto, non cerchiamo di riscrivere il problema sotto forma di sistema? Mi sembra più comodo per poterci lavorare. Io avevo pensato ad un sistema di questo tipo:

$$\begin{cases} x+y+z=40 \\ 3x+2y+\frac{1}{4}z=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+3y+3z=120 \\ 3x+2y+\frac{1}{4}z=40 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y=80-\frac{11}{4}z \\ x+\left(80-\frac{11}{4}z\right)+z=40 \end{cases}$$

“Buona idea -commenta Silvano- ma una volta ottenute le equazioni che esprimono un’incognita in funzione di un’altra cos’hai intenzione di fare? Anch’io ho provato a risolverlo con la riduzione, così:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z=10 \\ 3x+2y+\frac{1}{4}z=40 \end{cases}$$

da cui

$$\left(3-\frac{1}{4}\right)x+\left(2-\frac{1}{4}\right)y=30,$$

cioè

$$11x+7y=120.$$

Ma da questa equazione non ricavo nulla. È un sistema di 2 equazioni in 3 incognite, non abbiamo gli strumenti per risolverlo! Che fare allora?”

Ma ecco intervenire il nostro antico maestro:

“*Defi così fare.*

Sempre, per fare simili ragiony, fa ragione che fusseno uccelli della minore valsuta, cioè 40 passere a 4 al denaio.

Vaglano 10dr e tu domandi di spendere 40 dr.

Ài avansati 30dr a spendere.

Hora debbi vedere quello che è meglo il tordo che la passera: 2dr 3/4.

Hora per torre via i rotti, fa sano per 4.

Il tordo viene 11 e la lodola 7.

Hora multiplica 4 via 30: fa 120.

Hora debbi trovare un numero che, multiplicato per 11 e tratto di 120, il resto partito per 7, non avansi rotti."

Per Silvano, ora qualcosa comincia a chiarirsi: "Mi sembra che ci sia qualche somiglianza fra i numeri che il maestro cita e quelli che ho trovato tentando di risolvere il sistema. Quando ho moltiplicato la prima equazione per 1/4 (costo di un passero), ho trovato il costo di 40 passeri (10 denari)".

A questo punto Elisa: "Forte! Così la prima equazione non parla più del numero di animali, ma del loro prezzo!"

"E ha senso sottrarla dalla prima – replica Silvano- Il maestro d'abaco ragiona concretamente e non sottrae grandezze disomogenee; noi, invece, che usiamo un linguaggio algebrico più astratto, eseguiremmo la sottrazione, di qualunque cosa parlino le due equazioni! Così arriviamo a

$$\left(3 - \frac{1}{4}\right)x + \left(2 - \frac{1}{4}\right)y = 30,$$

dove

$$\left(3 - \frac{1}{4}\right)$$

rappresenta "*quello che è meglo il tordo che la passera"*, mentre

$$\left(2 - \frac{1}{4}\right)$$

è la differenza di prezzo delle allodole rispetto ai passeri. A questo punto il maestro, per eliminare "*i rotti*", moltiplica per 4".

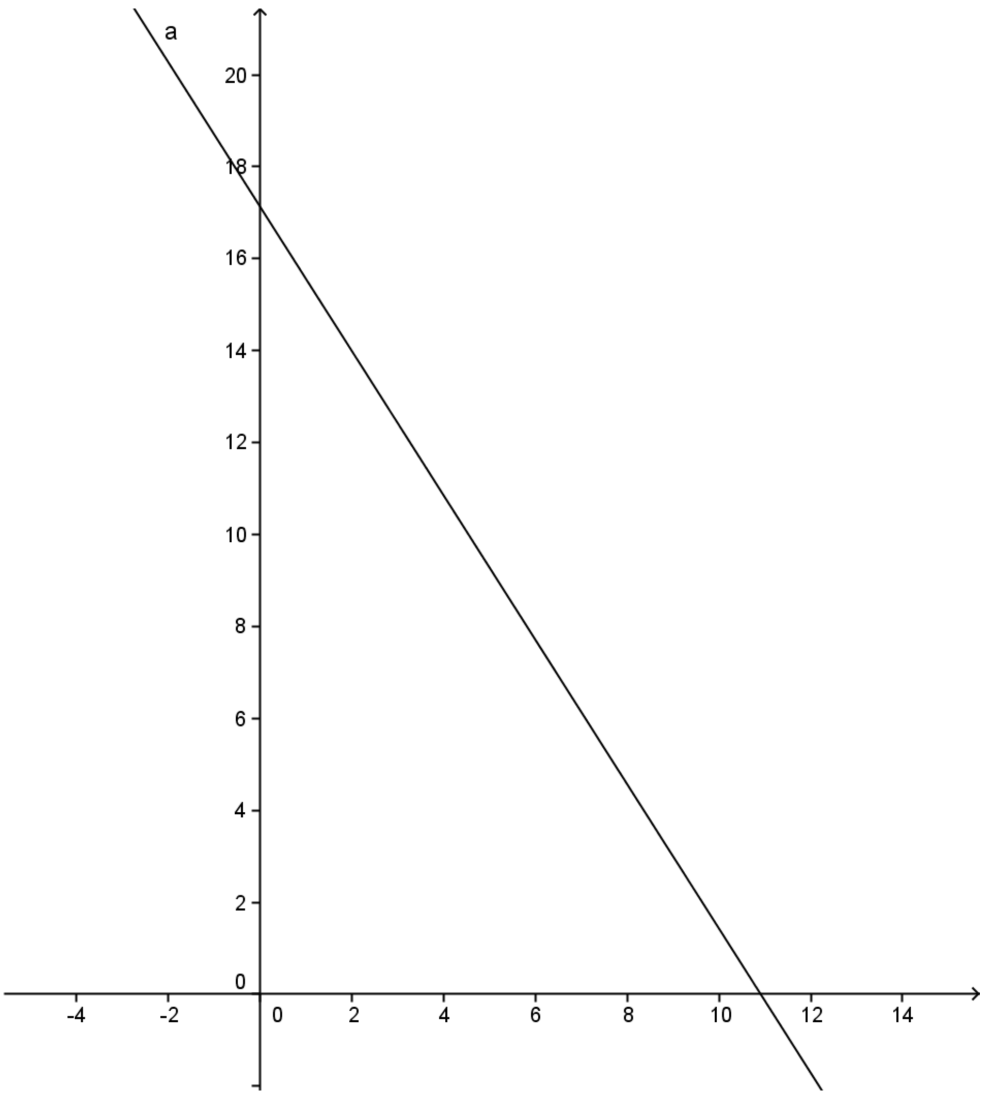
"E arriva alla nostra stessa conclusione, solo ragionando senza sistema! -osserva Elisa- Non solo: seguendo l'ultimo suggerimento, possiamo riscrivere la nostra equazione in questo modo:

$$y = \frac{120 - 11x}{7}\ .\text{"}$$

Nicoletta ha una folgorazione:

"Ma è una funzione! Cosa ne pensate di rappresentarla graficamente? Proviamo con Geogebra".

Dopo aver inserito l'equazione, sullo schermo appare il grafico:



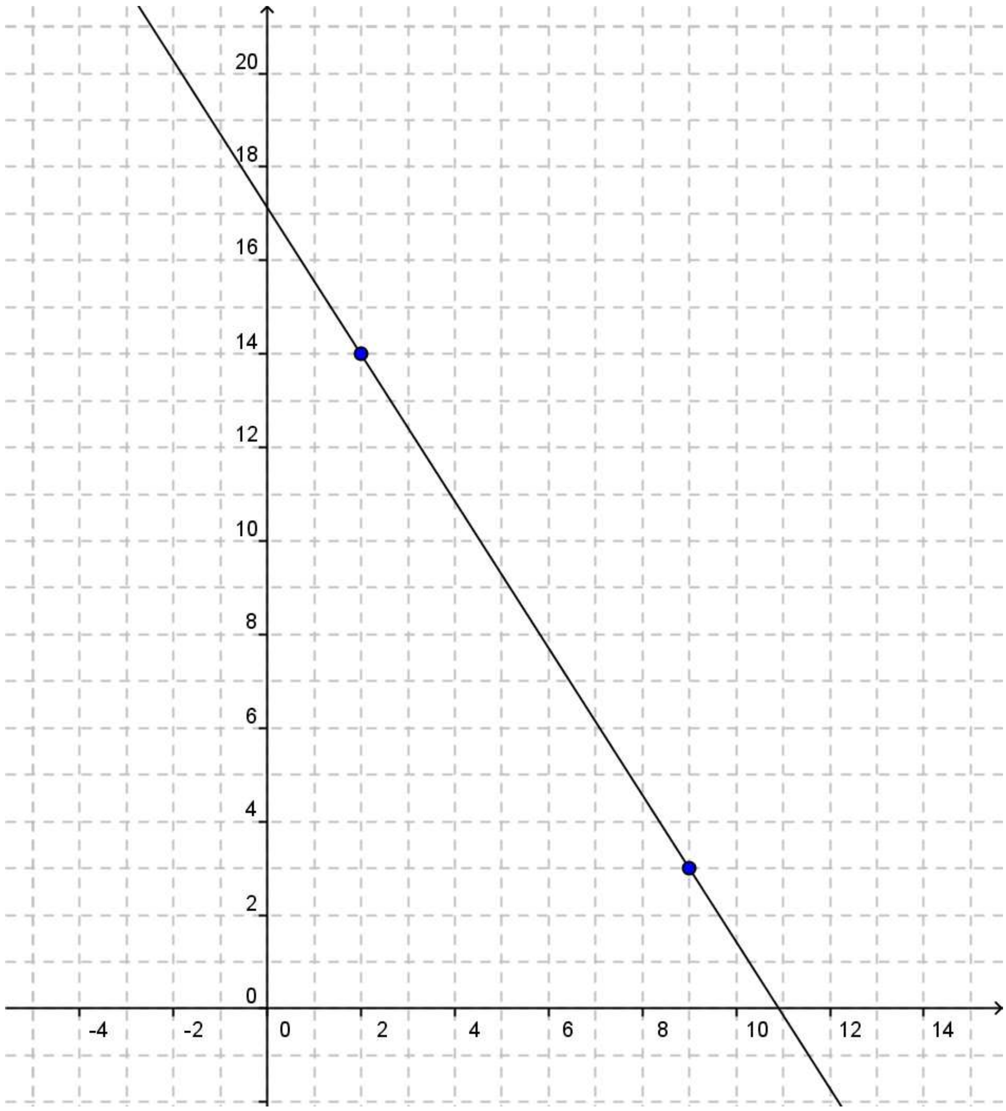
“È evidente che a noi interessa solo il segmento nel 1° quadrante, poiché *x* e *y* sono numeri di animali, quindi positivi”.

“Sì replica Silvano- ma non basta: il maestro parla di uccelli “vivi”; dunque *x* e *y* devono essere per forza interi.

Non mi era mai successo di risolvere un’equazione nell’insieme dei naturali. Sembra quasi più difficile che cercare soluzioni nei reali”.

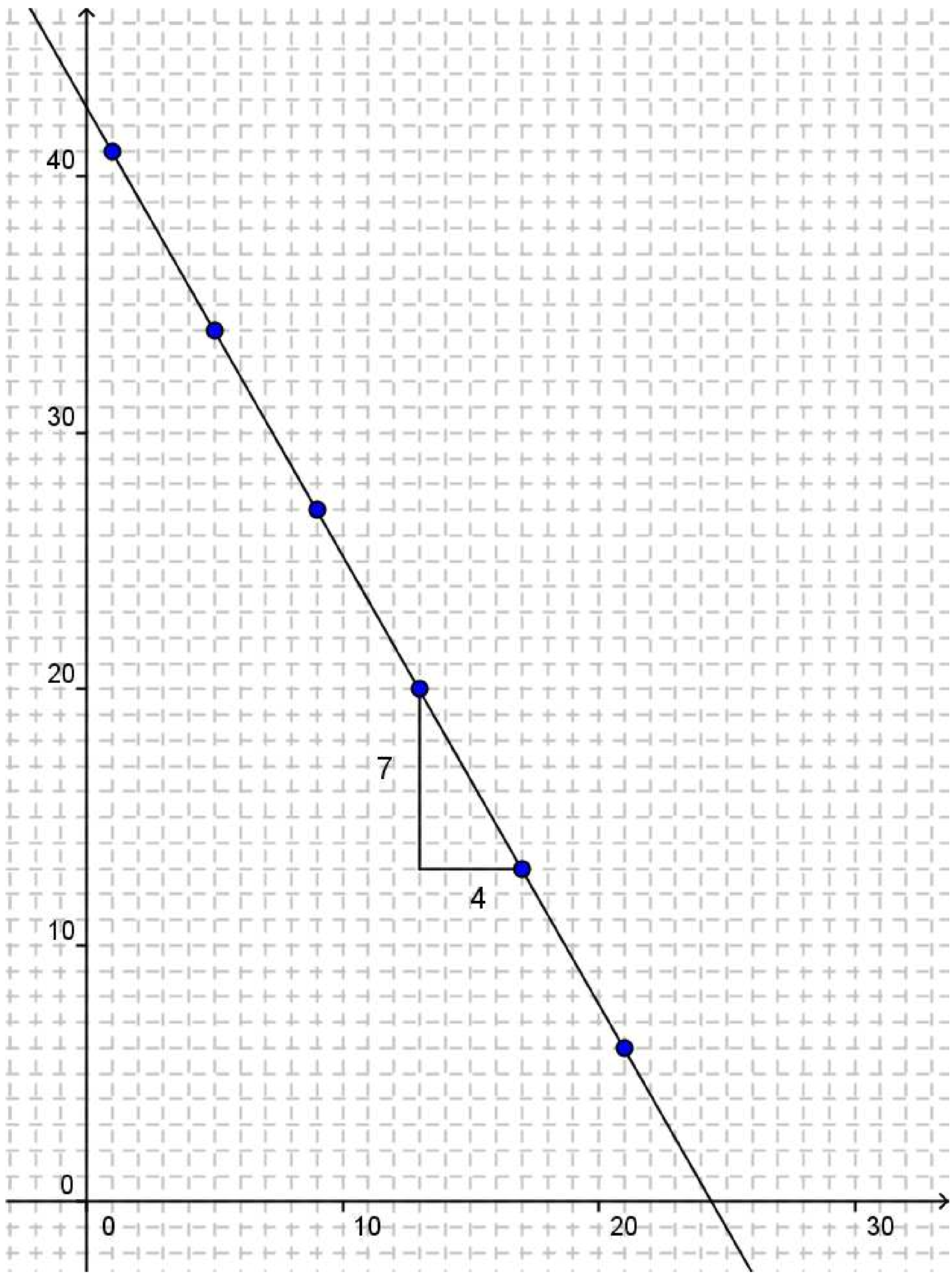
“In effetti, pur essendo vero che $11x + 7y = 120$ per tutti i punti della retta – commenta Nicoletta- non è altrettanto vero che le coordinate dei suoi punti siano intere”.

“Visualizziamo la griglia di Geogebra: i punti della retta sui vertici della quadrettatura saranno le nostre soluzioni -suggerisce Silvano- Guarda qua: (2;14) e (9,3).



Ecco le soluzioni: 2 tordi e 14 allodole o 9 tordi e 3 allodole; i passeri saranno la rimanenza per arrivare a 40”.

“Mi sembra un po’ semplicistico! -obietta Elisa- Come posso essere sicura che i punti della retta siano proprio sui vertici della quadrettatura e non soltanto molto vicini? Per esempio, proviamo a cambiare a caso i coefficienti e a supporre che l’equazione del problema sia 4x+7y=171”. I ragazzi osservano il nuovo grafico.



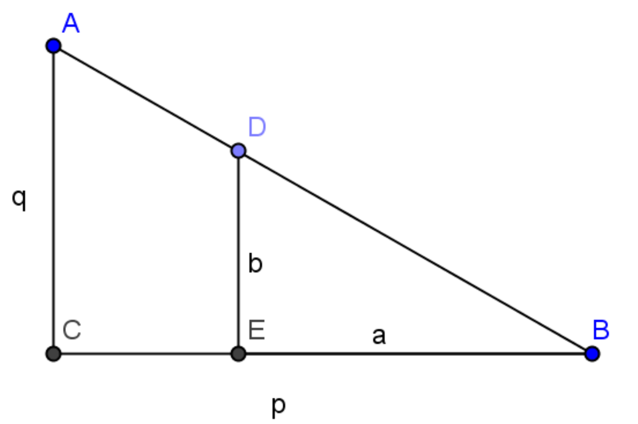
"Anche qui si vedono bene le soluzioni; se proprio fossimo incerti, potremmo sostituire le coordinate del vertice del quadretto nell'equazione della retta e vedere se le appartiene".

Silvano allora commenta: "Sì, certo, ma come è lungo! Se le soluzioni fossero molto numerose, staremmo qui a fare calcoli fino alla laurea!… Ehi, avete notato? Non sono disposte a caso: i punti si succedono con regolarità. Se parto da un punto-soluzione e mi muovo parallelamente all'asse *x* di 4 unità, trovo un altro punto con coordinate intere".

Anche Elisa si illumina: "È vero! Anche muovendosi di 7 unità lungo l'asse *y*! Ma è ovvio; come ho fatto a non pensarci prima? È la pendenza della retta: se parto da coordinate intere e percorro sulla griglia un cammino pari a 4 lungo l'asse *x* e 7 lungo l'asse *y*, trovo ancora un punto sulla retta; ma poiché sommo interi a interi, ottengo ancora interi; quindi il nuovo punto sarà ancora sulla retta e avrà coordinate intere!".

"Ma non rischiamo di saltare qualche punto soluzione?" La interrompe Nicoletta.

"No, se la pendenza *m* è ridotta ai minimi termini; guarda la figura:



se *q/p* è la pendenza, ridotta ai minimi termini, della retta e se ci fosse un punto soluzione *D* intermedio fra *A* e *B*, per la similitudine fra triangoli avremmo

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p},$$

con $a < p$. Ma questo è impossibile, se q/p è ridotto ai minimi termini!".

"Perfetto –esclama Nicoletta- allora basta trovare un punto soluzione a caso, per conoscere tutti gli altri, visto che si tratta poi di saltare con regolarità".

Ma Silvano è ancora scettico: "A me non pare, però, che trovarne una sia un'impresa tanto semplice. Pensa cosa accadrebbe con questa equazione:

$$100x+99y = 1201.$$

I coefficienti sono così grandi che le soluzioni sono distanziate fra loro di 99 tratti in orizzontale e 100 in verticale; quindi dovrei analizzare almeno 99 ascisse, per decidere se ci sono soluzioni oppure no!

Ci sarà un altro modo! In effetti stavo pensando ancora all'ultima frase del maestro: devo trovare un numero intero *x* tale che, moltiplicato per 11, tolto da 120 e diviso il tutto per 7, venga ancora un intero:

$$\frac{120-11x}{7}=y\text{ , con } y \in \mathbb{N}.$$

Mi sembra un problema che riguarda la divisione fra numeri, più che un problema sulla retta!"

Nicoletta allora propone di ripartire dall'equazione $y=\frac{120-11x}{7}$ e di riscrivere -11*x* come -7*x*-4*x*. "In questo modo risulterebbe $y=\frac{120-4x}{7}-x$".

E Silvano: "Ah giusto! Sia *x* che *y* sono interi, quindi anche $\frac{120-4x}{7}$ deve essere intero; possiamo chiamarlo *z* e trovare *x* in funzione di *z*. Otteniamo così $x=\frac{120-7z}{4}$".

Elisa, però, controbatte: "E quindi? In questo modo non abbiamo ottenuto nulla e potremmo andare avanti così all'infinito".

Ma Nicoletta insiste: "Ne sei sicura? Secondo me, se andiamo avanti con questo sistema potremo ottenere qualcosa di interessante". Inizia così a scrivere:

$$x=\frac{120-3z-4z}{4}=\frac{120-3z}{4}-z$$

"Anche $\frac{120-3z}{4}$ deve essere un intero. Possiamo chiamarlo *t*. Così otteniamo:

$$z=\frac{120-4t}{3}=\frac{120-t-3t}{3}=\frac{120-t}{3}-t\,.$$

Pongo quindi $\frac{120-t}{3}=q$, anch'esso intero, e trovo t=120-3q.

Visto? Avevo ragione! Siamo arrivati ad un'equazione senza frazione e quindi per ogni q intero t sarà pure intero".

"E cosa ce ne facciamo?" esclama Elisa.

Con infinita pazienza Silvano spiega: "Puoi trovare z in funzione di q ed essere sicura che z sia intero, perché somma di interi:

$$z=\frac{120-4t}{3}=\frac{120-4(120-3q)}{3}=-120+4q.$$

Se poi sostituisci z in $x=\frac{120-7z}{4}$ ottieni $x = 240 - 7q$, che è sicuramente intero.

La sostituzione infine di x in $y=\frac{120-11x}{7}$ ti consente di ottenere $y = -360+11q$.

Scegliendo un qualsiasi valore di q nell'insieme degli interi, ottengo un primo punto-soluzione. Per esempio, per $q = 0$ abbiamo $x = 240$ e $y = -360$".

Elisa, che ha finalmente capito, interviene: "Ma il nostro problema richiede che x e y siano numeri interi positivi, quindi dobbiamo imporre delle limitazioni su q:

$$240-7q > 0$$

e

$$-360+11q > 0,$$

da cui

$$360/11 < q < 240/7.$$

Gli unici numeri interi presenti in questo intervallo sono quindi 33 e 34. Sostituendo questi valori nelle equazioni precedenti otteniamo le due soluzioni del problema:

$$x_1 = 9;\ y_1 = 3;\ z_1 = 28 \text{ e } x_2 = 2;\ y_2 = 14;\ z_2 = 24."$$

Silvano allora si alza in piedi e trionfante esclama:

"Il mercante acquisterà quindi 9 tordi, 3 allodole e 28 passeri o 2 tordi, 14 allodole e 24 passeri"... purtroppo non si rende conto di aver pronunciato quest'ultima frase ad alta voce... e da sveglio!!

Il ragazzo si guarda attorno: dov'è finito il maestro d'abaco, perché il professore lo guarda a quel modo e così l'intera classe, anche Elisa e Nicoletta, che sembrano tornate alle loro "normali" occupazioni durante l'ora di matematica (disegnare sul diario o ripassare per l'interrogazione sulla Divina Commedia)?

"E bravo il nostro Silvano; zitto, zitto, hai trovato la soluzione prima degli altri: il risultato è proprio quello che hai detto, anzi urlato... Non credevo che il nostro maestro d'abaco avrebbe scatenato in te tanto entusiasmo... anzi avrei giurato che stessi dormendo. Vuoi spiegare a tutti noi come ci sei arrivato?"

Allora Silvano racconta il suo strano sogno tra lo stupore dei compagni e i risolini ammiccanti di Nicoletta ed Elisa. Il professore invita gli alunni a riflettere su un ulteriore aspetto del problema:

"Nel tuo sogno, però, non ti sei chiesto se ci sia un criterio per capire quando l'equazione ha soluzioni senza risolverla? Immagino di no. Dovete sapere che l'equazione $ax + by = c$ con $a,b,c \in Z$ ha soluzioni intere se e solo se MCD(a, b) è divisore di c. La dimostrazione di questa affermazione, però, dovete trovarla voi, perché l'ora è finita! Domani voglio proprio vedere cosa siete riusciti ad escogitare… Chissà che la notte non vi porti consiglio... vero Silvano?"