ISTITUTO STORICO ITALIANO
PER IL MEDIOEVO

Concorso
La Matematica nel Medioevo
Premio Bruno Rizzi
III edizione (2010 – 2011)

Mathesis Nazionale

FIBONACCI … NON SOLO CONIGLI!

Alunni: Gabriele Gabelloni; Giona Casotti; Greta Gemignani; Nicola Marchi; Beatrice Peghini; Luca Torre; (Studenti della classe 3a della Scuola Secondaria di 1^ grado di Gramolazzo – Istituto Comprensivo di Piazza al Serchio - Lucca)

Referente: Prof. ssa Antonella Ferri

Premessa

Uno dei più significativi protagonisti della matematica nel periodo medioevale fu Nicola Pisano detto **Fibonacci**.

In questo lavoro abbiamo scelto di esaminare tre problemi tratti dal suo famoso **"Liber Abaci"**; tra questi il noto problema dei conigli, la cui soluzione portò all'individuazione di quella che sarà chiamata successione di Fibonacci. Tutto ciò preceduto da un inquadramento storico, da alcune note biografiche e da qualche considerazione sul collegamento tra successione di Fibonacci e sezione aurea.

Medioevo e matematica
La parola "**matematica**" deriva dalla parola greca **μάΘημα** (màthema) che significa conoscenza o apprendimento". La matematica è stata una tra le prime discipline a svilupparsi. I testi più antichi provengono dall'antico Egitto nel periodo del regno di mezzo (2000-1800 a.C.), dalla Mesopotamia (1900-1770 a.C.) e dall'India (800-600 a.C.). Un aspetto importante della storia della matematica consiste nel fatto che essa si sviluppò indipendentemente in culture completamente differenti che arrivarono agli stessi risultati.

Verso l'XI secolo la cultura occidentale entrò in contatto con quella araba, scientificamente molto superiore e, grazie anche alla scuola di traduttori di Toledo e a persone come Adelardo di Bath, iniziarono a circolare in Europa le traduzioni dall'arabo di trattati matematici antichi, ma anche di lavori arabi quali l'Algebra di al-Khwarizmi e greci come l'Almagesto di Tolomeo.
Leonardo Fibonacci (1170- 1250 ca.), detto anche Leonardo Pisano, fu probabilmente il più grande matematico del periodo.

Nel suo Liber Abaci fece conoscere in Europa il sistema di numerazione decimale e lo zero. Nel trattato si trovano molti problemi, che rivelano le doti di matematico di Fibonacci, come quello della moltiplicazione dei conigli che genera la sequenza detta di Fibonacci.
Un altro matematico, **Nicola Oresme** (1323-1382), fu il primo ad avere l'idea di rappresentare il movimento con un grafico, anticipò quindi il concetto di grafico di una funzione. Purtroppo molte delle sue innovative idee furono dimenticate e dovettero trascorrere diversi secoli prima che fossero riscoperte e rielaborate. Il XV secolo si può considerare come il secolo della nascita della matematica europea moderna.
Merita di essere menzionato anche **Luca Pacioli** (1445-1514), illustre matematico, che raccolse tutte le conoscenze matematiche del tempo nella sua Summa.

Chi era Fibonacci?
Leonardo **Fibonacci** nacque a Pisa intorno al 1170. Dopo il 1192 Bonacci portò suo figlio con lui a Bugia, in Algeria, dove era responsabile del commercio della Repubblica di Pisa. Il padre voleva che Leonardo divenisse un mercante e così pensò alla sua istruzione, in particolare, riguardo alle ecniche del calcolo con le cifre indo-arabiche. Intorno al 1200, Fibonacci tornò a Pisa dove, per i seguenti 25 anni, lavorò alle sue opere di matematica.

Qui, egli scrisse un gran numero di testi importanti, di questi sono giunti a noi: Liber Abaci (1202), Practica Geometriae (1220), Flos (1225) e Liber Quadratorum. Attorno al 1228, Fibonacci scrisse un'altra edizione del "Liber Abaci": un lavoro contenente quasi tutte le conoscenze aritmetiche e algebriche dell'epoca che ha avuto una funzione fondamentale nello sviluppo della matematica dell'Europa occidentale. In particolare la numerazione Indo-Arabica, che prese il posto di quella latina semplificando notevolmente i commerci extraeuropei, fu conosciuta in Europa tramite questo libro. Un problema: " Il problema dei conigli", nella terza parte del Liber Abaci, portò all'introduzione della sequenza di Fibonacci, per la quale, il matematico, è ricordato ancora oggi. Il Liber Quadratorum, scritto nel 1225, è la parte del lavoro più impressionante sebbene non sia l'opera per cui è maggiormente conosciuto. Il nome del libro significa, il libro dei quadrati, ed è un libro sulla teoria dei numeri.
Fibonacci, per primo, notò che i numeri quadrati potevano essere costruiti come somme di numeri dispari secondo questa formula: $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$.
Dopo il 1228 non si sa quasi nulla della vita di Leonardo, tranne del decreto della Repubblica di Pisa che gli conferì il titolo "Discretus et Sapiens Magister Leonardo Bigollo" a riconoscimento dei grandi progressi che apportò alla matematica. Fibonacci morì qualche tempo dopo il 1240, presumibilmente a Pisa.
C'è chi sostiene che anche **Dante Alighieri**, che padroneggiava l'aritmetica del suo tempo, conoscesse l'opera di Fibonacci. Una conferma si potrebbe trovare nel canto XXVIII (88-93) del Paradiso : "*E poi che le parole sue restaro, non altrimenti ferro disfavilla che bolle, come i cerchi sfavillaro. L'incendio suo seguiva ogni scintilla; ed eran tante, che 'l numero loro più che 'l doppiar delli scacchi s'immilla*".
Qui Dante afferma che il numero degli angeli è maggiore dei chicchi di grano posti su una scacchiera in modo tale che in un quadrato ci sia il doppio dei chicchi del quadrato precedente: il riferimento è ad un antico problema, di origine orientale, risolto da Fibonacci nel Liber Abaci.

Dal problema dei conigli alla successione di Fibonacci.

Testo originale del problema dei conigli-XII capitolo del "Liber Abaci"
Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret quot ex eo paria germinarentur in uno anno, cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare et in secundo mense ab eorum nativitate germinant.

Problema in italiano

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo circondato da un muro, per sapere quante coppie sarebbero nate in un anno da quella coppia: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare dal secondo mese dalla nascita.

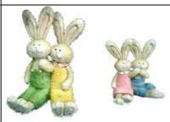
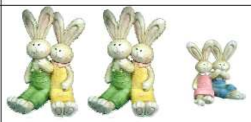
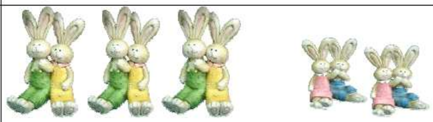
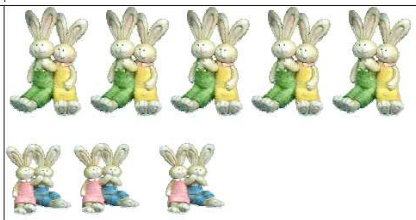
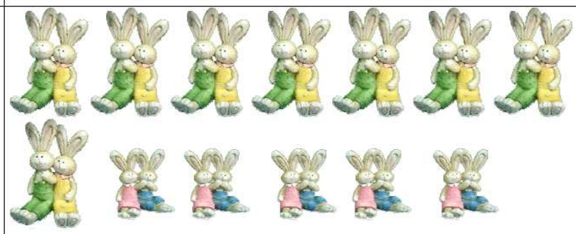
Soluzione di Fibonacci

Nel primo mese la coppia si riproduce e dunque nel primo mese ci sono 2 coppie. Nel secondo mese la prima coppia si riproduce ancora e dunque vi sono 3 coppie. Di queste due rimangono gravide. Nel terzo mese nascono 2 nuove coppie e dunque vi sono 5 coppie, di cui tre rimangono gravide. Nel quarto mese vi sono 8 coppie di cui 5 rimangono gravide. Nel quinto vi sono 13 coppie di cui 8 rimangono gravide. Nel sesto 21 coppie di cui 13 gravide. Nel settimo 34 di cui 21 gravide. Nell'ottavo 55 di cui 34 gravide. Nel nono 89 di cui 55 gravide. Nel decimo 144 di cui 89 gravide. Nell'undicesimo 233 di cui 144 gravide. Nel dodicesimo **377**. A margine si vede come abbiamo operato, cioè che abbiamo sommato il primo numero con il secondo, il secondo con il terzo, e così via.

La nostra interpretazione

Abbiamo ipotizzato che la prima coppia non fosse fertile e lo diventasse al secondo mese, come dice il testo del problema, in questo modo abbiamo ottenuto i primi due numeri della serie di Fibonacci. (Fibonacci invece considera la coppia già fertile e con prole al primo mese, parte cioè da 2 coppie)

	
Coppia fertile	Coppia non fertile

PRIMO MESE 1	
SECONDO MESE 1	
TERZO MESE 2	
QUARTO MESE 3	
QUINTO MESE 5	
SESTO MESE 8	
SETTIMO MESE 13	
CONTINUA	Al dodicesimo mese le coppie saranno **144** di cui 89 fertili

Si potrebbe continuare così fino al dodicesimo mese ma, poiché si può notare che il numero successivo si ottiene sommando i due precedenti non è necessario farlo.

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°		
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Dalla successione alla sezione aurea

Una successione è “una sequenza ordinata di elementi” solitamente della stessa natura. Quella di Fibonacci è una successione molto famosa:

1 - 1 – 2 - 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 ....

I termini della successione di Fibonacci si possono calcolare facilmente sommando i due che precedono.

	1
	1
1+1=	2
1+2=	3
2+3=	5
3+5=	8
	...

La successione di Fibonacci possiede moltissime proprietà di grande interesse. Certamente la proprietà principale è quella per cui il rapporto tra un numero della successione e il suo precedente, all'infinito, tende al numero irrazionale chiamato **sezione aurea** o numero di Fidia.

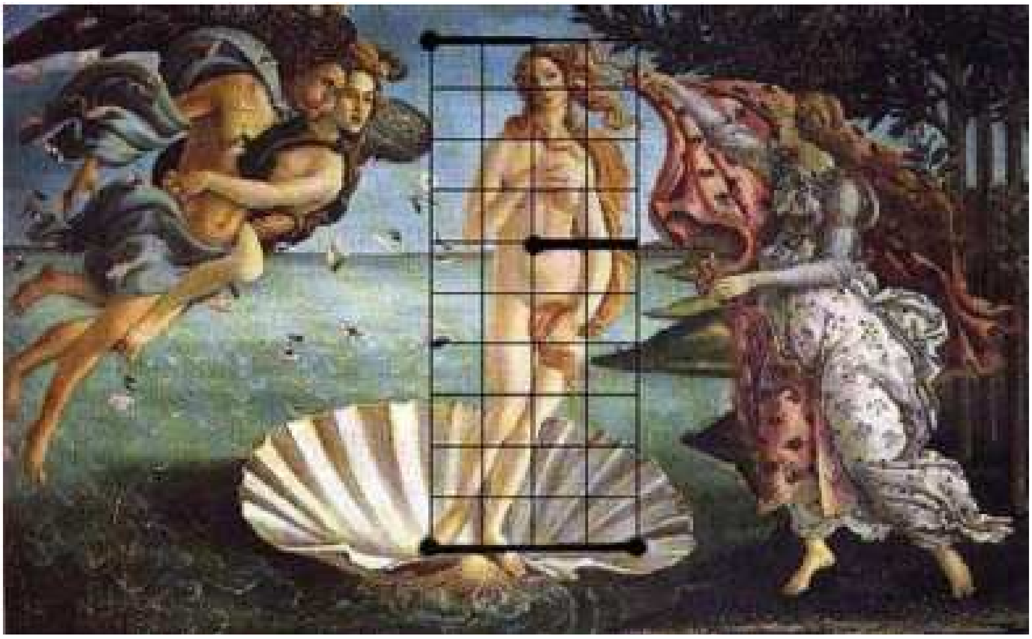
1:1=1   2:1=2   3:2=1,5   5:3=1,666…   8:5=1,600   13:8=1,625
21:13=1,615…   34:21=1,619   55:34=1,617   89:55=1,618…

La successione di Fibonacci c'è anche nel corpo umano: il rapporto fra le falangi di un dito di un uomo adulto formano una piccola serie di Fibonacci.
Esiste anche: nell'arte, nella musica, nella botanica, in informatica e in chimica.
Il **numero aureo** è stato chiamato fin dall'antichità con diversi nomi: "divina proporzione", "numero aureo" e "proporzione aurea". Il numero aureo è un numero superiore a 1; è espresso dalla lettera greca Phi ovvero: ϕ
Il numero aureo è un numero non naturale ed irrazionale (cioè non è un numero intero ed il suo valore non può essere definito con una frazione; ha infinite cifre decimali). Il suo valore approssimato è $\phi = 1{,}618033989......$
Il suo valore può essere calcolato con la seguente formula: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

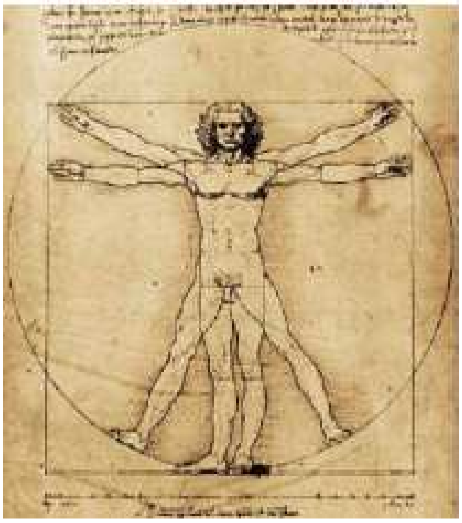
La sezione aurea, sinonimo di “perfezione” è presente in:
Architettura:

- La piramide egizia di Cheope;
- Nei megaliti di Stonehenge;
- La pianta del partenone di Atene;
- La cattedrale di Notre Dame a Parigi;
- Il palazzo dell’Onu di New York.

Pittura: in passato Leonardo Da Vinci, Piero Della Francesca, Bernardino Luisi, Sandro Botticelli, ecc. ricorsero alla sezione aurea. Di Da Vinci ricordiamo “L’Ultima Cena” e la “Gioconda” e di Botticelli “Venere”.



Musica: Beethoven usò la sezione aurea nelle “33 variazioni sopra un valzer di Dabelli”.
Astronomia: i 4 pianeti interni nel sistema solare (Mercurio, Venere, Terra e Marte) distano dal Sole nelle proporzioni della successione; lo stesso vale per quelli esterni rispetto a Giove.
Natura: per motivi legati allo sviluppo dei fiori, il numero di petali di molti essi è un numero di Fibonacci.
Corpo umano: in natura il rapporto aureo è riconoscibile in molte dimensioni del corpo umano. È molto famosa la rappresentazione dell’ “Uomo di Vitruvio” di Leonardo Da Vinci.



Quotidianità: le schede telefoniche, i bancomat, le sim, ecc. sono rettangoli aurei, con rapporto tra base e altezza 1,618 …

Altri due problemi dal Liber Abaci

Problema del leone nel pozzo.

Quidam leo est in quodam puteo, cuius profunditas est palmi 50; et ascendit cotidie 1/7 unius palmi, et descendit 1/9. Queritur in quot diebus exerit de puteo.

Problema in italiano

Un certo leone era in un certo pozzo profondo 50 palmi; ogni giorno sale di 1/7 di palmo e scende 1/9 di palmo. Quanto tempo impiegherà per uscire dal pozzo?

Soluzione di Fibonacci

Ipotizza, per esempio, che sia uscito dal pozzo in 63 giorni; perciò in 63 si trovano 1/9 ed 1/7: vedi di quanto sarà salito quel leone, se scendendo in quei 63 giorni, sale infatti della settima parte di 63 palmi, che equivale a 9 palmi; e scende della nona parte di 63, che equivale a 7 palmi; che se sottrai da 9, restano 2 palmi; e di ciò sale più di quanto scenda nei 63 giorni. Quindi dirai: nei 63 giorni che ipotizzo, sale di 2 palmi; quale valore dovrò ipotizzare, perché salga di 50 palmi ? Moltiplica 63 per 50 e dividi per 2 : risulta **1575** giorni ; e in tanti giorni il leone uscirà dal pozzo.

La nostra interpretazione

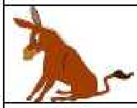
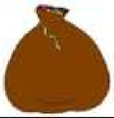
Il leone sale di 1/7 di palmo e scende di 1/9, quindi l'operazione da fare per trovare quanti palmi sale in un giorno è 1/7 - 1/9 cioè 2/63. Quindi in un giorno il leone sale 2/63 di palmo.

A questo punto per trovare quanti giorni impiega per uscire dal pozzo basta fare 50:2/63 che equivale a 50x63:2, cioè dividere la profondità del pozzo per quanto sale in un giorno; il leone impiega in tutto **1575** giorni.

Si può ragionare anche così: in un giorno il leone sale di 2/63, in 10 giorni di 20/63, in 20 giorni di 40/63, in 30 giorni di 60/63 e se aggiungiamo 1 giorno e mezzo, arriviamo a 63/63 cioè 1 palmo! Ricapitolando, per salire di 1 palmo, il leone impiega

31,5 giorni; per trovare i giorni necessari per salire di 50 palmi basta fare 31,5 x 50 = 1575.
In realtà il leone dovrebbe impiegare un numero minore di giorni, poiché nell'ultimo giorno, dopo essere salito di 1/7, riuscirà ad uscire dal pozzo è non dovrà scendere di 1/9. Questa è la nostra ipotesi di soluzione: l'ultimo giorno farà 2/63 + 1/9 (che era stato tolto in precedenza da 1/7 per trovare il percorso giornaliero) = 9/63 cioè, in un solo giorno, l'equivalente di (2/63 x 4,5) 4 giorni e mezzo. Togliendo da 1575 – 4,5 giorni si ottengono **1571,5** giorni.

Problema delle sette vecchie
Septem vetule vadunt roma; quarum quelibet habet burdones 7; et in quolibet burdone sunt saculi 7; et in quolibet saculo panes 7, et quilibet panis habet cultellos 7, et quilibet cultellus habet vaginas 7. Queritur summa omnium predictorum.
Problema in italiano
Sette vecchie andarono a Roma, ciascuna vecchia aveva sette muli, ciascun mulo portava sette sacchi, ciascun sacco conteneva sette forme di pane e con ciascuna forma di pane v'erano 7 coltelli, ciascun coltello era infilato in 7 guaine. In tutto quanti vanno a Roma?
La nostra interpretazione
Il problema si può risolvere moltiplicando per sette in numero venuto in precedenza: numero di vecchie 7 moltiplicato per 7 = 49 numero di muli, 49 moltiplicato per 7 = 343 numero di sacchi, 343 moltiplicato per 7 = 2401 forme di pane, 2401 moltiplicato per 7 = 16807 numero di coltelli, 16807 moltiplicato per 7 = 117649 numero di guaine. Si può sintetizzare con le potenze:

	numero delle vecchie	7^1	7
	numero dei muli	7^2	49
	numero di sacchi	7^3	343
	numero forme di pane	7^4	2401
	numero di coltelli	7^5	16807
	numero di guaine	7^6	117649
Adesso basta fare la somma: *7+49+343+16807+117649=137256* *Quindi in tutto vanno a Roma in 137256.*			