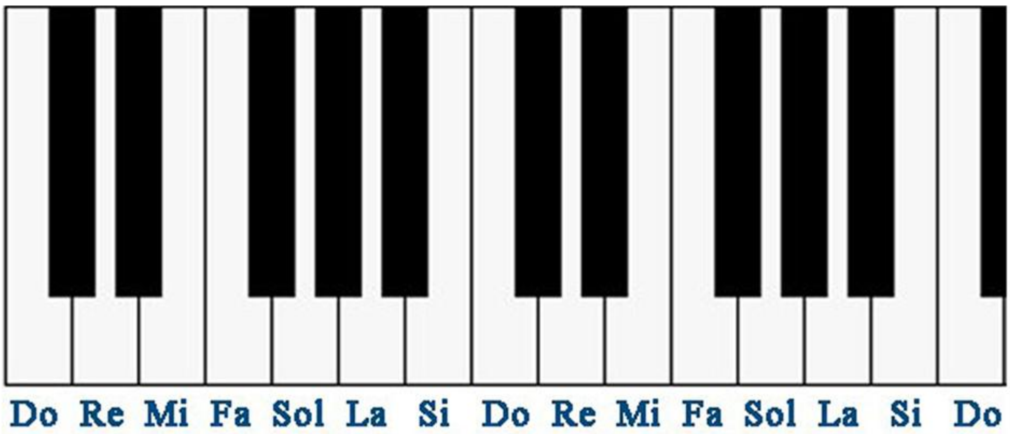

# EUCLIDE
## GIORNALE DEI GIOVANI

# MUSICA

# *ALL YOU NEED IS LOG*

L’ intervallo è la distanza in altezza tra due suoni e si misura in frequenza (Hz). Due suoni si dicono consonanti quando il suono prodotto dalle loro frequenze risulta piacevole all’ orecchio umano.
I primi esperimenti musicali di cui si ha notizia risalgono al VI secolo a.C. nell’ ambito della scuola pitagorica.
Utilizzando un semplice strumento formato da una corda, il monocordo, si scoprirono importanti proprietà dei suoni emessi da questa: l’altezza del suono (frequenza) aumenta al diminuire della lunghezza della corda; inoltre, fissandola in modo da ottenere due parti uguali (con tre nodi in totale) si scoprì il primo intervallo più consonante in assoluto: l’ottava.
In occidente il sistema musicale attualmente in uso è il sistema temperato equabile: si tratta di una convenzione esclusivamente europea (oggi conosciuta in tutto il mondo) che consiste nella partizione di un intervallo di ottava in dodici parti uguali (semitoni).




Ci si può  chiedere allora quale relazione debba intecorrere tra le frequenze per dar luogo ad un intervallo di un ottava. Nella tabella seguente sono riporte le differenze e i rapporti di frequenza

| $f_1$ | $f_2$ | $f_2 - f_1$ | $f_2/f_1$ |
|---|---|---|---|
| 55 | 110 | 55 | 2 |
| 110 | 220 | 110 | 2 |
| 220 | 440 | 220 | 2 |

Come si vede dalla tabella l'intervallo percepito è l'ottava se il rapporto tra le due frequenze è esattamente doppio. In generale due intervalli sono giudicati uguali se è identico il rapporto (e non la differenza) delle frequenze dei suoni dell'intervallo.

Possiamo quindi affermare che esiste una costante di rapporto tra due frequenze consecutive:

2f(0)=f(12)

f(1)=kf(0)

f(2)=k^2f(0)

.

.

.

f(12)=k^12f(0)=2f(0)→k=rad.12 di 2 → f(n)=K^n*f(0)

si ottiene così una progressione geometrica con ragione q = rad12 di 2

Grazie agli studi sul funzionamento del nostro apparato uditivo, a partire dalla *teoria posizionale* (1863) di Helmohltz, è stato dimostrato che l'ampiezza percepita di un intervallo musicale non si basa sulle differenze delle frequenze fra i due suoni che lo compongono, ma sul loro rapporto. Quindi data una nota, per ottenerne un'altra basta moltiplicare o dividerne la frequenza per un dato numero a seconda che la nota sia più acuta o più grave. Infatti l' orecchio umano non percepisce la differenza tra due frequenze ma la differenza fra i loro logaritmi. Applicando il logaritmo al rapporto fra due frequenze $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ si ottiene:

$\log\frac{\nu_2}{\nu_1} = \log\nu_2 - \log\nu_1$

Ne consegue che la disposizione più naturale delle frequenze è quella in scala logaritmica.

Usando i logaritmi Eulero riuscì a determinare il numero di semitoni distinti presenti tra due note con una determinata frequenza.

Avendo determinato che :

$$f_{finale} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^n \cdot f_{iniziale}$$

(dove $\sqrt[12]{2} = 1,0594630943593$ equivale a K, ovvero la ragione della progressione geometrica ricavata dal rapporto 2 : 1 rappresentativa del rapporto tra le frequenze dei due suoni delineanti un'ottava.)

otteniamo il rapporto tra le due frequenze iniziale e finale :

$$\frac{f_{finale}}{f_{iniziale}} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^n$$

applicando la definizione di logaritmo

$$n = \log_{\sqrt[12]{2}}\left(\frac{f_{finale}}{f_{iniziale}}\right)$$

La base *b* del logaritmo viene scelta in modo che l'ottava abbia larghezza unitaria:

$$\log_b(2\nu:\nu) = \log_b 2 = 1 \Rightarrow b = 2$$

Per la proprietà dei logaritmi del cambio di base:

$$n = \log_{\sqrt[12]{2}}\left(\frac{f_{finale}}{f_{iniziale}}\right) = \frac{\log_2 \frac{f_{finale}}{f_{iniziale}}}{\log_2 \sqrt[12]{2}} = 12 \cdot \log_2 \frac{f_{finale}}{f_{iniziale}}$$

Supponiamo che le frequenze delle due note abbiano un rapporto $R = \frac{N_2}{N_1}$:
dove $n \in \mathbb{N}$ se le note appartengono al temperamento equabile in quanto R è una potenza intera di $\sqrt[12]{2}$.
Quindi il logaritmo (in base 2) di un intervallo musicale, considerato entro la scala temperata equabile, ci permette di determinare il numero di semitoni di cui esso è composto.
Ad esempio, per la quinta equabile si ha:

$$R = \sqrt[12]{2^7} \Rightarrow n = 12\log_2 R = 12 \cdot \frac{7}{12} = 7$$

SITOGRAFIA
http://www.lanaturadellecose.it/sonia-cannas-289/matematica-e-musica-290/la-scala-logaritmica-308.html
https://allyouneedislog.wordpress.com/category/la-scala-musicale-temperata/

*Claudio Del Frate, Federica Mulè*
*IV G Liceo "B. Russell" di Roma*