LA GEOMETRIA PROIETTIVA: SUO SVILUPPO STORICO E SUO SIGNIFICATO

1. Le origini della geometria proiettiva nel mondo classico e in Italia.

La geometria proiettiva studia le proprietà degli enti geometrici invarianti per proiezioni e sezioni: per cogliere quanto questo concetto si distacchi dai concetti tradizionali della geometria, quale si trova esposta nei classici *Elementi* di Euclide, è utile gettare un rapido sguardo all'origine di questo ramo delle matematiche.

Benchè la geometria proiettiva, concepita come organismo scientifico, appartenga al secolo XIX, i germi di questa dottrina si possono riconoscere nello sviluppo che la *prospettiva* ha ricevuto nel Rinascimento italiano. Risalendo ancora più indietro, si potrebbe bensì trovare nelle opere minori di Euclide e sopratutto nelle *Coniche* di Apollonio da Perga qualche proposizione, che più tardi è stata riconosciuta di carattere proiettivo: ma ciò sembra aver esercitato scarsa influenza sui prospettivisti del nostro Rinascimento, i quali non erano matematici nel senso tecnico della parola, bensì grandi pittori e architetti. Invero, le prime regole fondamentali della prospettiva si incontrano, nel secolo XV, in Filippo Brunelleschi, Piero de' Franceschi o della Francesca, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, nel secolo XVI in Jacopo Barozzi detto il Vignola; e maturano lentamente, culminando nell'opera *Perspectivae libri sex* (Pesaro, 1600) di Guido Ubaldo del Monte, che viene riconosciuto come il fondatore della prospettiva teorica.

Nella prospettiva sono contenute le due operazioni fondamentali della geometria proiettiva: cioè le operazioni del *proiettare* e del *segare*. Infatti la prospettiva di una figura si ottiene conducendo dall'occhio (centro di osservazione) tutti i raggi che vanno ai punti della figura, eseguendo cioè la *proiezione* da un dato centro; ed indi segando i raggi proiettanti con un piano di *sezione*: la prima operazione corrisponde al *guardare* la figura, mentre la seconda corrisponde alla formazione dell'*immagine* sopra un quadro assegnato. La considerazione delle figure geometriche da questo punto di vista tende a porre in rilievo le proprietà che sono comuni all'oggetto ed alla sua immagine, cioè le proprietà *grafiche*: in contrapposto alle proprietà *metriche* (grandezza di segmenti, di angoli, di aree, di volumi, relazioni di perpendicolarità e di parallelismo), che principalmente formano oggetto della geometria greca e che invece si perdono nelle proiezioni e sezioni. In particolare i prospettivisti del Rinascimento osservano come un fascio di raggi *paralleli* si muti, in prospettiva, in un fascio di raggi *concorrenti* in un *punto di fuga*, che si può ritenere come la prospettiva di un *punto infinitamente lontano* (o *improprio*), nel quale concorrono tutte le parallele del fascio.

L'anzidetto ordine di considerazioni viene ripreso in Francia da G. Desargues (1593-1662) e da B. Pascal (1623-1662), i quali lo applicano alla teoria delle coniche. Poichè, secondo Apollonio, i tre tipi di coniche (cioè le ellissi, le iperboli e le parabole) si possono ottenere tagliando con un piano un medesimo cono rotondo, ne viene che un circolo, in quanto sezione piana del cono, si può mutare, con un'operazione di proiezione e sezione, in una conica, sezione piana qualunque. La distinzione in tre tipi delle sezioni coniche non ha così significato proiettivo, ma solamente metrico. Vi sono tuttavia teoremi, di carattere grafico, i quali valgono dunque per qualunque conica, sia essa ellisse, iperbole o parabola. Tale è per esempio il teorema, ancora oggi detto di Pascal, secondo il quale in un esagono iscritto in una conica le tre copie di lati opposti si incontrano sempre in tre punti *allineati*. Il procedimento dimostrativo di Pascal consiste nel verificare il teorema sul cerchio e quindi nell'osservare che esso si estende senz'altro a tutte le coniche, involgendo soltanto relazioni grafiche, le quali permangono per proiezioni e sezioni. Si ha così in Desargues e Pascal la raccolta di un primo nucleo di proprietà grafiche, che entreranno poi a far parte dell'organismo della geometria proiettiva.

Lo studio delle proprietà grafiche delle figure, iniziato brillantemente da Desargues e Pascal, trovò pochi continuatori, tra i quali ci limiteremo a ricordare il De La Hire ed il Le Poivre, che svilupparono ulteriormente la teoria delle coniche; ed il sommo fisico e matematico Newton, al quale non dovette rimanere del tutto estraneo quest'ordine di considerazioni se, nella sua *Enumeratio linearum tertii ordinis*, egli afferma che tutte le curve piane del terzo ordine si possono ricondurre con proiezioni (*per umbras*) ai tipi delle parabole campaniformi, da lui indicati.

La ragione intima per cui lo studio delle proprietà grafiche non fu condotto a fondo, subito dopo Desargues e Pascal, è senza dubbio da ravvisare nella potente attrattiva esercitata, in quell'epoca, sui migliori intelletti matematici dalla *geometria analitica* e dal *calcolo infinitesimale*, che appunto nel secolo XVII erano giunti a maturazione. Queste due discipline portarono nella geometria ad un predominio dello spirito analitico, che, pur esercitandosi a danno dello spirito sintetico, fu tuttavia pur esso fecondo di conseguenze, giacchè insegnò ad introdurre nella geometria quello stesso carattere di astrazione e di generalità, proprio dell'algebra e dei procedimenti analitici.

Gli ultimi anni del secolo XVII segnarono tuttavia una reazione, la quale partì specialmente dal campo della tecnica. Invero, le aumentate esigenze tecniche, manifestatesi in quell'epoca, misero in evidenza che, in moltissimi casi, il *disegno* permetteva una soluzione più spedita e diretta di un problema, al confronto dei procedimenti analitici. G. Monge creò così (1795) la *geometria descrittiva*, introducendola più tardi come materia d'insegnamento dell'*École Polytechnique*, fondata da Napoleone. In questa disciplina si fa uso di una doppia *proiezione ortogonale*, sopra un piano verticale (alzata) e sopra un piano orizzontale (pianta), mercè la quale si può rappresentare un oggetto dello spazio. Si ha in tal guisa occasione di apprezzare le proprietà delle figure, che non si alterano per proiezione e sezione; e ritorna così in onore quell'ordine di idee che, iniziatosi nel Rinascimento con gli studî sopra la prospettiva, si era apparentemente esaurito dopo le brillanti scoperte di Desargues e di Pascal. È proprio uno scolaro di Monge, J. V. Poncelet, che deve essere considerato come il fondatore della geometria proiettiva.

2. Sviluppo della geometria proiettiva in Francia ed in Germania.

L'opera che segna la nascita della geometria proiettiva è il *Traité des propriétés projectives des figures* di Poncelet (1822).

Poncelet introduce, sin dall'inizio del suo trattato, la netta distinzione tra le proprietà *grafiche* o *proiettive* (che non si alterano per proiezioni e sezioni) e le proprietà *metriche*. Nella dimostrazione delle proprietà grafiche egli fa uso del *metodo delle proiezioni*, già usato in casi particolari da Pascal; questo metodo è basato sul concetto fondamentale che, per la stessa natura delle proprietà grafiche, basta stabilirle sopra una proiezione qualunque di una figura perchè esse poi valgano incondizionatamente. Ora, tra le proiezioni di una figura ve ne possono essere di quelle che, a causa di posizioni speciali degli elementi fondamentali della proiezione, sono così semplici, da rendere immediatamente evidente la proprietà da dimostrarsi. Così le proprietà proiettive di un quadrilatero si possono leggere sopra un parallelogramma, le proprietà proiettive delle coniche su di un cerchio, e così via.

È specialmente notevole che, secondo PONCELET, il principio delle proiezioni è caso particolare di un più generale *principio di continuità*, il quale corrisponde, nel campo della geometria, alla possibilità messa in evidenza dall'algebra di variare con continuità i coefficienti, che entrano nelle equazioni, in cui si traduce un problema o una costruzione, senza alterare sostanzialmente i termini della questione. Ad esempio PONCELET giustifica, con ragioni di continuità, la convenzione che i punti all'infinito di tutte le rette del piano costituiscano una retta (la *retta impropria*): invero, proiettando un piano π_1 sopra un piano π_2 si vede che la totalità dei punti all'infinito di π_2 proviene dalla proiezione dei punti di π_1 che stanno sopra una ben determinata retta a; ora, nella proiezione, una retta generica di π_1 va in una retta di π_2 e viceversa; e dunque, se, movendosi, una retta di π_1 tende alla a, la retta corrispondente deve, per *continuità*, tendere ad una retta, cioè alla retta impropria di π_2.

Lo stesso principio di continuità permette altresì di gettare una prima luce sull'introduzione nella geometria degli elementi *immaginari*, corrispondenti alle radici *complesse*, che si presentano nei problemi algebrici.

Devesi altresì a PONCELET lo sviluppo della teoria della *polarità* rispetto ad una conica, già prima considerata da DE LA HIRE. PONCELET concepisce la polarità come uno strumento che permette di trasformare ogni proprietà grafica in una proprietà *correlativa*, giungendo così, insieme a I. D. GERGONNE, ad intravedere il cosiddetto *principio di dualità*, per il quale ogni teorema di geometria proiettiva piana si muta in un nuovo teorema, con lo scambio delle parole punto e retta e della relativa fraseologia. Un bell'esempio di tale principio si ha nel teorema di CH. J. BRIANCHON, relativo al seilatero circoscritto ad una conica, che si deduce per dualità dal teorema dell'esagono iscritto in una conica di PASCAL.

La diffusione della geometria proiettiva in Francia è dovuta, più che al *Traité*.... di PONCELET, il cui valore fu misconosciuto e messo in dubbio in ispecie da A. CAUCHY, alle opere di M. CHASLES e precisamente all'*Aperçu historique*.... (1837 e 1875) ed al *Traité de géométrie superieure* del 1852. Queste opere, di minor valore concettuale di quelle di PONCELET, per l'indubbia abilità espositiva di CHASLES, hanno influenzato i geometri francesi del secolo XIX (DANDELIN, LAGUERRE, MOUTARD, DUPIN, DARBOUX....), determinando in essi un gusto accentuato per le questioni metriche concrete e pei loro rapporti con la geometria proiettiva.

Ma un nuovo sviluppo subiva frattanto la geometria proiettiva in Germania. La prima opera dedicata a questo ramo delle matematiche è di A. F. MOEBIUS (1827), il quale, ponendosi sopra un terreno analitico proiettivo, foggia per il primo uno strumento analitico, atto ad esprimere le proposizioni della geometria proiettiva; si tratta in sostanza del primo sistema di *coordinate omogenee*, in cui i punti impropri vengono trattati alla stessa stregua dei punti proprî. Ma forse ancora più importante di ciò è il contributo portato da MOEBIUS alla geometria proiettiva mediante il concetto della corrispondenza *omografica* o *proiettiva* tra due piani (o spazî), di cui esistevano i germi nelle opere di PONCELET e di CHASLES, che avevano specialmente considerato le proiettività tra rette. Secondo MOEBIUS, fra due piani (o due spazî) si ha una corrispondenza omografica o proiettiva o una *collineazione*, se nel passaggio dall'uno all'altro piano vengono mantenute le proprietà grafiche. MOEBIUS suppone questa corrispondenza continua, nota che essa muta le rette in rette ed in ispecie che essa è completamente determinata da quattro (cinque) coppie di punti corrispondenti. Questa concezione si estende anche alle corrispondenze *correlative*, in cui ai punti di ciascuno dei due piani corrispondono le rette dell'altro.

Qualche punto di contatto con MOEBIUS ha la vasta opera geometrica di J. PLUECKER, compendiata in numerosi trattati stampati tra il 1828 ed il 1868. PLUECKER ha un ingegno molto versatile e rifugge ugualmente dal purismo geometrico come dall'idolatria per i procedimenti analitici. Egli realizza così un'intima fusione tra il nuovo indirizzo della geometria proiettiva e la geometria analitica, con l'uso sistematico delle coordinate omogenee, che rispecchiano anche il principio di dualità. Inoltre PLUECKER procede molto avanti nell'esame delle curve algebriche d'ordine superiore e delle loro singolarità puntuali e tangenziali, nello studio di particolari superficie algebriche e getta le basi della geometria dello spazio rigato.

Strettamente legato all'ideale puristico della geometria sintetica appare invece J. STEINER, che introduce il concetto della *generazione proiettiva* delle figure geometriche, inaugurando un indirizzo di ricerche cui altri ricercatori (GRASSMANN, SEYDEWITZ, REYE e la sua scuola) porteranno in Germania ulteriori contributi e perfezionamenti. È classica la definizione delle coniche dovuta a STEINER, come luogo dei punti d'intersezione di raggi corrispondenti in due fasci proiettivi (che si ottengono l'uno dall'altro con un numero finito di proiezioni e di sezioni).

I contributi di Moebius, Pluecker, Steiner sono di carattere sostanzialmente *costruttivo*. Parallelamente si ha la sistemazione dei *principî* della geometria proiettiva, che avviene per opera di G. K. Ch. von Staudt nella sua *Geometrie der Lage* (Norimberga, 1847) e nei successivi *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Norimberga, 1856-60). Se, al modo di Steiner, si definiscono due punteggiate come *proiettive* quando si passa dall'una all'altra con un numero finito di proiezioni e di sezioni, si vede subito che la proiettività tra le due punteggiate è determinata da tre coppie di punti corrispondenti. Ciò dipende dal fatto che quattro punti di una punteggiata possiedono un *invariante* per proiezioni e sezioni, che dicesi il loro *birapporto*, e dalla proprietà che è unico il punto che forma con tre punti assegnati un dato birapporto. Qui il birapporto di quattro punti di una punteggiata s'intende definito al modo di Poncelet e Chasles, cioè attraverso nozioni *metriche* (distanza di due punti), estranee al carattere della geometria proiettiva. Staudt, nell'intento di fondare tutta la geometria proiettiva a partire solamente da nozioni grafiche ha quindi posto la questione se la completa determinazione di una proiettività mediante tre coppie di elementi corrispondenti potesse dimostrarsi senza ricorrere alla nozione di birapporto, cioè con soli concetti di carattere proiettivo. La risposta affermativa di questa questione costituisce il cosiddetto *teorema fondamentale della proiettività*, che, nella sistemazione di Staudt, regge tutta la geometria proiettiva. Staudt è pervenuto alla dimostrazione del teorema fondamentale approfondendo lo studio di due punteggiate riferite tra loro in una corrispondenza biunivoca, che conserva i *gruppi armonici*. Simili corrispondenze si presentano del tutto spontaneamente, quando si considerino due rette corrispondenti in un'omografia tra due piani, definita al modo di Moebius; e d'altronde la definizione di queste corrispondenze è di carattere proiettivo, perchè la nozione di gruppo armonico si può stabilire per sola via proiettiva attraverso il teorema del quadrangolo (Desargues). Ora Staudt dimostra che una corrispondenza del tipo anzidetto è effettivamente determinata da tre coppie di elementi corrispondenti ed indi che essa si può realizzare mediante un numero finito di proiezioni e di sezioni. Poichè d'altra parte le proiettività, definite al modo di Poncelet e Chasles, sono corrispondenze (*a priori* particolari) del tipo considerato da Staudt, ne segue il teorema fondamentale. Ed anzi, dal punto di vista della coerenza logica, emerge la convenienza di *definire* la proiettività tra due rette come una corrispondenza biunivoca, che conserva i gruppi armonici (graficamente definiti): è questa definizione che infatti è stata assunta nelle successive esposizioni, di tipo strettamente staudtiano, della geometria proiettiva.

Tra gli ulteriori contributi di STAUDT citeremo la sua estensione della parte fondamentale della geometria proiettiva al campo più largo dei punti immaginarî. Ciò è stato fatto da STAUDT per via puramente sintetica, attraverso minuziose considerazioni, le quali culminano nell'associare ad un punto immaginario del piano la complessiva considerazione di un'involuzione ellittica su di una retta reale e di un verso su questa retta.

3. LA GEOMETRIA PROIETTIVA IN ITALIA.

Il primo divulgatore della geometria proiettiva in Italia fu LUIGI CREMONA, il quale fu avviato a questi studî da F. BRIOSCHI. Auspice CREMONA, la geometria viene introdotta nel 1871 negli Istituti Tecnici e nel 1876 nel primo anno delle Università. Ad uso degli Istituti Tecnici CREMONA pubblica nel 1873 gli *Elementi di geometria proiettiva*, ossia il primo trattato italiano di questa materia, successivamente tradotto in tedesco, in francese ed in inglese.

Negli *Elementi....* CREMONA segue un metodo misto, ispirato soprattutto a CHASLES, nel quale le proprietà grafiche rimangono collegate con le metriche. La definizione stessa di proiettività tra due punteggiate vien data, secondo CHASLES, a partire dal birapporto, metricamente definito. Gli inizî della trattatistica italiana appaiono così influenzati dalla scuola geometrica francese. Ma ben presto anche lo sviluppo della geometria proiettiva in Germania incomincia ad essere noto ed apprezzato in Italia, da prima nelle sue parti più concrete (REYE) e poi anche nelle parti più puristiche ed astratte (STAUDT). È del 1884 la traduzione della *Geometrie der Lage* di REYE, eseguita da A. FAIFOFER. Si deve poi a C. SEGRE di aver attirata l'attenzione sull'opera di STAUDT, della quale egli promosse la traduzione, fatta nel 1889 da M. PIERI. Si hanno così alcuni trattati italiani ispirati in parte al REYE ed in parte a STAUDT, tra i quali menzioniamo le *Lezioni di Geometria proiettiva* di A. SANNIA (Napoli, 1891).

La conoscenza dell'opera di STAUDT avvicinò i geometri italiani alle questioni riguardanti i fondamenti ed i postulati che stanno alla base della geometria proiettiva. L'esame di tali fondamenti, cui già avevano dedicato ricerche KLEIN, LÜROTH, ZEUTHEN, PASCH, fu fatto in Italia particolarmente da P. DE PAOLIS, da C. SEGRE e da F. ENRIQUES. Devesi altresì a C. SEGRE una teoria sintetica delle *coppie di elementi immaginarî coniugati*, la quale, pur essendo più ristretta della teoria degli immaginarî di STAUDT, offre, al confronto di questa, un maggiore interesse geometrico, giacchè l'estensione di proprietà stabilite nel campo reale fa appunto intervenire solamente elementi immaginarî coniugati a coppie.

L'intera questione dei postulati della geometria proiettiva appare poi completata e sistemata nelle classiche *Lezioni di Geometria Proiettiva* di F. Enriques (Bologna, 1896), nelle quali si distinguono: i postulati di appartenenza, i postulati dell'ordine, il postulato della continuità (sotto la forma di Dedekind).

Secondo un'osservazione, elegantemente sviluppata da G. Fano, il primo gruppo di postulati è indipendente dagli altri, giacchè esso si può realizzare in uno spazio costituito da un numero finito di punti. Mediante il postulato di Dedekind è poi possibile, come ha stabilito Enriques, rendere pienamente rigorosa la dimostrazione di Staudt del teorema fondamentale della proiettività.

Con questi perfezionamenti, le *Lezioni....* di Enriques, ispirate nei successivi sviluppi al modello di Staudt, offrono un notevolissimo esempio di teoria matematica, in cui tutte le proposizioni sono rigidamente dedotte da pochi postulati, esplicitamente enunciati. Per la perfezione della forma esse hanno esercitato una grande influenza su molta parte dei trattati posteriori di geometria proiettiva sia italiani che stranieri: esse sono state tradotte in tedesco per iniziativa di F. Klein (1ª ed. 1903; 2ª ed. 1915); e più recentemente in francese ed in inglese (ed. litografata ad uso degli studenti delle università americane).

Il rigido rigorismo, di tipo staudtiano, al quale sono informate le *Lezioni....* di Enriques, pur rispondendo all'importante ufficio di educare la facoltà logica dello studioso, lascia in disparte le proprietà metriche e fa dimenticare quasi completamente il metodo delle proiezioni di Poncelet, dal quale pure la geometria proiettiva ha preso origine. Si rendeva perciò opportuno un trattato che collegasse le *Lezioni....* di Enriques con le vedute dei geometri antecedenti allo Staudt. A questo ufficio adempiono i *Complementi di geometria proiettiva* di F. Severi (Bologna, 1906), che costituiscono una preziosa raccolta, sviluppata con opportuna varietà di metodo.

Allo stesso Severi è poi anche dovuto un trattato di *Geometria Proiettiva* (1ª ed., Padova, 1921; 2ª ed., Firenze, 1926). Nell'Appendice di questo trattato si ha in particolare una perspicua esposizione dei postulati della geometria proiettiva, in cui sono in modo speciale messe in evidenza le questioni di compatibilità e di indipendenza, nonchè l'introduzione delle coordinate proiettive senza il concetto di misura e la subordinazione delle metriche non euclidee alla geometria proiettiva.

4. Il significato della geometria proiettiva.

Riassunto rapidamente, in quanto precede, lo sviluppo storico della geometria proiettiva nei suoi momenti salienti, occorre ora cercar di cogliere il significato di questo ramo della geometria nella storia generale della matematica e della scienza.

Sotto questo aspetto è anzitutto significativo che le origini della geometria proiettiva s'intreccino, nel Rinascimento italiano, con l'attività artistica dei nostri maggiori pittori ed architetti. Ciò costituisce una delle migliori prove del fatto che la matematica non deve riguardarsi come un'attività complementamente avulsa dalle altre attività dello spirito, nè del resto dalle stesse attività pratiche e materiali, che sono poi anch'esse spirituali. La matematica deve invece concepirsi come un elemento inscindibile dagli altri ed evolventesi con questi, della vita e della cultura dell'umanità. Molto spesso l'incentivo alla ricerca matematica non è partito dall'ambiente dei matematici per così dire di professione (ed un tale ambiente si è d'altronde formato soltanto molto tardi) ma a volta a volta da quello degli artisti, degli artigiani, dei commercianti, degli studiosi della natura e, in tempi più recenti, dalle necessità industriali e dalla tecnica. D'altronde, se potente è stata ognora l'influenza di elementi extra-matematici sul progresso della matematica, non meno imponente è il fenomeno inverso, cioè dell'apporto dato dalla matematica ad altre attività, in ispecie alla fisica e, sotto la forma della cosiddetta matematica applicata, alla tecnica. Anche da questo punto di vista, l'insegnamento della geometria proiettiva è sommamente istruttivo. Nata, attraverso la prospettiva, da esigenze dell'attivita artistica, la geometria proiettiva ha subito infatti un lungo ciclo di elaborazione nel campo puramente teorico; ma, proprio dagli sviluppi più elevati in sede teorica (correlazioni, polarità, sistemi nulli, ecc.), è sorto ad un certo punto un vasto campo di pratiche applicazioni di questa disciplina nella scienza delle costruzioni e nella *statica grafica* (C. CULMANN, 1866 e L. CREMONA, 1872). È questo uno degli esempî più belli dell'inscindibilità del rapporto tra matematica pura e matematica applicata, che a vicenda si influenzano e si appoggiano, sicchè nessuna delle due può essere trascurata perchè l'isterilirsi dell'una si rifletterebbe tosto in un isterilimento dell'altra.

Ma, anche nel campo più strettamente matematico, la geometria proiettiva ha avuto un'enorme importanza per il progresso delle idee e degli studî, in direzioni molto svariate. Le ricerche analitico-geometriche di un PLUECKER, alle quali si affiancarono quelle di una fiorente scuola inglese (CAYLEY, SALMON, ecc.), preludono all'introduzione degli spazî ad un numero qualunque di dimensioni, ai quali si estende la geometria proiettiva. La geometria proiettiva degli iperspazî, intrecciandosi a sua volta con lo studio delle curve (e delle varietà) algebriche, condotto sia da un punto di vista geometrico che da un punto di vista funzionale (RIEMANN), porta infine alla *geometria* *algebrica*, che, a partire da L. CREMONA, ha avuto in Italia uno sviluppo imponente. Si tratta di interi indirizzi di ricerca, sui quali non è qui possibile entrare in particolari. È tuttavia opportuno osservare che la geometria proiettiva, oltre a contribuire al progresso delle matematiche avviando a ricerche che si riattaccano in modo immediato ai suoi sviluppi più elementari, ha anche esercitato un'influenza direttrice su tutto il pensiero matematico in un senso più largo. Concetti generali come quello di « trasformazione », di « corrispondenza », di « invariante », ecc., dei quali la matematica moderna è tutta intessuta, hanno in fondo la loro prima origine nella geometria proiettiva.

La geometria proiettiva ha inoltre offerto il primo modello di una parte delle matematiche rigidamente organizzata in un sistema ipotetico-deduttivo, cioè in un sistema di deduzioni ricavate da un complesso di postulati, che legano tra loro certi concetti primitivi, *implicitamente definiti dai postulati stessi*. Appunto dalla geometria proiettiva ha inizio il consapevole sviluppo del cosiddetto *metodo assiomatico*, che ora tende ad informare di sè tutta la matematica. È bensì vero che già gli *Elementi* di EUCLIDE possono in qualche modo considerarsi come una trattazione di tipo assiomatico; in questi, a parte talune imperfezioni in ordine alla mancata enunciazione di taluni postulati che soltanto una più raffinata mentalità logica e critica poteva mettere in evidenza, manca tuttavia la piena coscienza, che è invece caratteristica dell'idea attuale di sistema ipotetico-deduttivo, che i concetti primitivi sono definiti implicitamente dai postulati, onde non è necessario nè opportuno il dare di essi una definizione reale. Ora, alla creazione di tale coscienza ha appunto potentemente contribuito soprattutto la legge di dualità della geometria proiettiva. Invero, dal momento che in tutta la geometria proiettiva piana si possono scambiare tra loro le parole « punto » e « retta », ciò che appare come essenziale nella costruzione di tale geometria non è già questa o quella idea intuitiva dei concetti primitivi di punto e di retta, ma soltanto i legami che tra tali enti pongono i postulati di appartenenza, i quali valgono così a dare una definizione implicita di essi. Si arriva in tal modo alla nozione generale di *teoria geometrica astratta*, capace di ricevere diverse interpretazioni concrete a seconda del significato intuitivo attribuito ai concetti primitivi: tali interpretazioni sono tuttavia qualche cosa di sostanzialmente estraneo alla teoria stessa, la cui vera essenza sta invece nei rapporti logici posti dai postulati tra i concetti primitivi e nelle conseguenze che da essi si deducono.

Al lume di tali nuove vedute logiche e critiche, che, come si vede, toccano addirittura l'intera concezione della scienza matematica, si è sentito il bisogno di riprendere in esame l'edificio della geometria elementare: donde l'importanza della geometria proiettiva anche per la formazione degli insegnanti di matematica nelle stesse scuole medie. Si può ben dire che mai una trattazione della geometria elementare si sarebbe potuta iniziare come fa D. HILBERT nelle sue celebri *Grundlagen der Geometrie* con le parole: « Noi pensiamo tre diversi sistemi di oggetti: gli oggetti del primo sistema si chiamano *punti* e si indicano con A, B, C....; gli oggetti del secondo sistema si chiamano *rette* e si indicano con a, b, c....; gli oggetti del terzo sistema si chiamano *piani* e si indicano con α, β, γ.... ecc. » se non fosse preventivamente esistito il modello della geometria proiettiva organizzata assiomaticamente.

Ma sui rapporti tra geometria elementare e geometria proiettiva non è qui più possibile insistere ulteriormente. Come la geometria elementare possa apparire una geometria *subordinata* alla geometria proiettiva e come questa abbia potuto dare una risposta definitiva alla questione sollevata dal V postulato sulle parallele di EUCLIDE potrà fare eventualmente oggetto di un altro articolo.

FABIO CONFORTO.