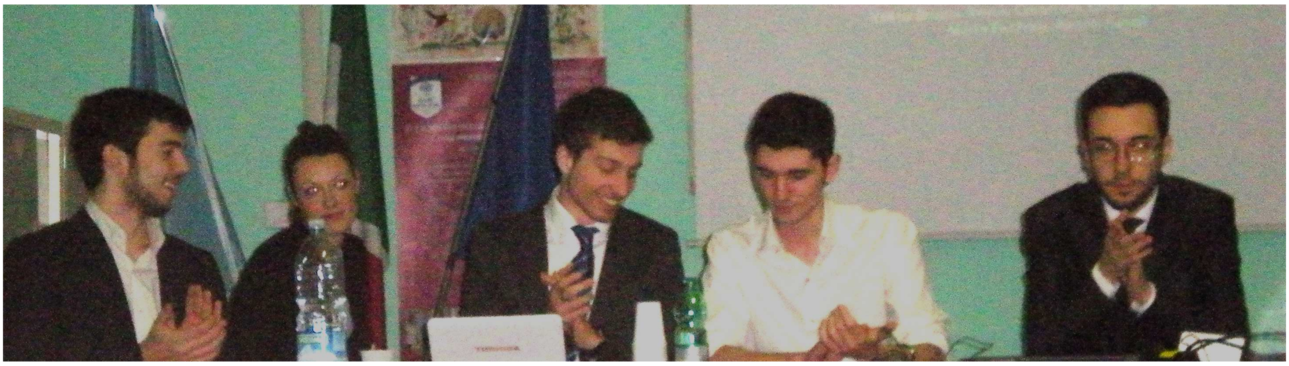
IL NUMERO DI NEPERO

Alunni: Valeria Brusca, Alessio Crisostomi, Emanuele Di Carmine, Alessio Fanelli, Mattia Eluchans (Studenti della 5^ F del Liceo Scientifico Isacco Newton di Roma).

Referente: Prof.ssa Giovanna Dell'Ovo

*****



Alessio Fanelli, Valeria Brusca, Alessio Crisostomi, Mattia Eluchans ed Emanule Di Carmine

In un lavoro di Nepero, pubblicato postumo nel 1618, compare in appendice una tavola che riporta i logaritmi in base *e* di diversi numeri. La tavola non riporta però il nome dell'autore e potrebbe quindi non essere di Nepero. Nel 1624 ricompare il numero *e* in un lavoro di Briggs, il matematico amico di Nepero con il quale costruì le tavole dei logaritmi in base 10, compare il valore del logaritmo di *e* in base 10.
E' stato Leibniz, tra i primi, a riconoscere ufficialmente il numero *e*. In una lettera indirizzata a Huygens, del 1690, usa la lettera *b* per indicare questo numero che finalmente ottiene un nome, anche se non era ancora quello che noi usiamo oggi.

L'uso della lettera *e* per il nostro numero risale invece a Leonhard Euler, italianizzato Eulero, che Maor definisce il "Mozart della matematica". Compare per la prima volta in una sua lettera, del 1731, indirizzata a Goldbach. Lettera *e* come "esponenziale" o forse come "Eulero", ma più semplicemente qualcuno fa osservare che Eulero scelse la *e* perché è la prima vocale che segue la *a*, una lettera che aveva già usato in altri suoi lavori. Egli presentò uno studio approfondito del numero *e* nel suo libro *Introductio in Analysin infinitorum*, pubblicato nel 1748, nel quale dimostrò che il limite di (1 + i/*n*) , con *n* tendente all'infinito, è uguale ad *e*, inoltre trovò le prime 18 cifre decimali di *e*, 2.718281828459045235, senza dire con quale metodo fosse arrivato a questo risultato.
Egli dimostrò che

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Inoltre che il numero *e* è il limite di $(1 + 1/n)^n$ per *n* tendente all'infinito.

Si dovrà attendere ancora più di un secolo per definire la vera natura di *e*. Quando Charles Hermite, nel 1873, provò che *e* è un numero trascendente, cioè che non può essere soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi.
Alcuni matematici, oggi per lo più dilettanti, si dedicano al calcolo delle cifre di *e*. Per il record attuale è di un giapponese, Kanada, che ha calcolato (naturalmente al computer) 206 158 430 000 cifre di e . Siamo oltre i mille miliardi di cifre con il nuovo record non ancora riconosciuto. Siamo invece a 51 539 600 000 cifre, per *e*, il record è del 2003.

e = 2,7182818282…

Dimostrazione dell'irrazionalità del numero di Nepero.

Per dimostrare l'irrazionalità del numero di Nepero ("*e*") è necessario innanzitutto darne una definizione matematica. Ho deciso di non utilizzare la consueta definizione:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

bensì

$$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$$

che io ritengo assai più affascinante se non altro per la sua paralizzante semplicità.
Tale definizione equivale a dire che

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots \qquad (1)$$

Prima di iniziare la dimostrazione d'irrazionalità, propriamente detta, riporto, qui di seguito, una formula che dovrà essere applicata ben due volte nel corso della dimostrazione stessa:

$$\text{se } k \in \mathbb{N} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{1-k} \qquad (2)$$

Sommando i primi tredici termini della serie numerica 1 (ossia fino a 1 fratto 12 fattoriale incluso) si ottiene questo valore:

$$e = \sum_{n=0}^{12} \frac{1}{n!} = \frac{1.302.061.345}{479.001.600}$$

Lo sviluppo decimale di questo numero, se approssimato alla decima cifra dopo la virgola, corrisponde a

2,7182818282...

Definisco ξ come la differenza fra il numero ottenuto al passaggio precedente (2,7182818282) e il valore reale del numero di Nepero.

Sovrastimando ξ si ottiene che

$$\xi < \frac{1}{13!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{13^n}$$

Usando la formula (2) si può affermare che

$$\xi < \frac{1}{13!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{13}} = \frac{1}{12! \cdot 12} \approx 1,7 \cdot 10^{-10}$$

Il risultato ottenuto ($1,7 \cdot 10^{-10}$) è di fondamentale importanza, non tanto per il suo preciso valore numerico quanto per il significato che si cela dietro di esso: poiché l'ordine di grandezza ha esponente uguale a -10 è evidente che l'errore matematico compiuto consciamente, sommando solo i primi tredici termini della serie numerica (1), possa influenzare, al massimo, la decima cifra dopo la virgola di *"e".* Ma essendo questa un 2 (2,718281828**2**), ne segue che tale incertezza possa ricadere unicamente sulle cifre successive ad essa (dall'undicesima posizione decimale in poi) e non su quelle precedenti (comprese fra la prima e la nona posizione decimale).
Ci addentriamo ora nella dimostrazione, propriamente detta, dell'irrazionalità di *"e"*
Supponendo, per assurdo, che *"e"* sia un numero razionale, ossia scrivibile sotto forma di frazione (del tipo "a fratto b", con b ≠ 0), pongo

$$e = \frac{p}{q} \qquad p, q \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Poiché, come già dimostrato, *"e"* ≈ 2,7 (ossia *"e"* non appartiene all'insieme dei numeri naturali), ne segue che

$$q \geq 2$$

Sostituendo nella (3) la definizione di "e" data all'inizio e moltiplicando entrambi i membri per *q*! si ha che

$$\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right) q! = p \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (q-1) \tag{4}$$

Riscrivendo il primo termine in modo leggermente diverso ed eseguendo il prodotto si ottiene che

$$2q! + 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot q + \ldots + (q-1) \cdot q + q + 1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots \tag{5}$$

Definisco ora tre numeri, genericamente chiamati A, B, C.

$$A = p \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (q-1)$$

$$B = 2q! + 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot q + \ldots + (q-1) \cdot q + q + 1$$

$$C = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots$$

Poiché l'espressione (5) corrisponde al primo membro dell'equazione (4), usando le definizioni di A, B, C, sopra introdotte, è possibile riscrivere l'equazione (4) stessa come

B + C = A

Essendo A e B chiaramente interi per definizione, ne segue che anche C, per una sorta di principio di non contraddizione, dovrà essere intero. Ma, se si dimostra che C non è intero, si giunge ad un assurdo a partire dall'ipotesi di razionalità di *"e".* In tal caso risulterebbe dimostrata la tesi contraria, ossia l'irrazionalità di *"e"*.

Poiché i termini della serie (6) devono essere minori di quelli della serie

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} - 1$$

si ha sicuramente che

$$C < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} - 1$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n}$ assume il suo massimo valore quando il numero naturale *q* assume il minimo valore possibile. Poiché *q* ≥ 2, il minimo valore da esso assumibile corrisponde a 2. Ponendo dunque *q* = 2 si ha che

$$C < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - 1$$

Applicando la formula (2) si ottiene che

$$C < \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}$$

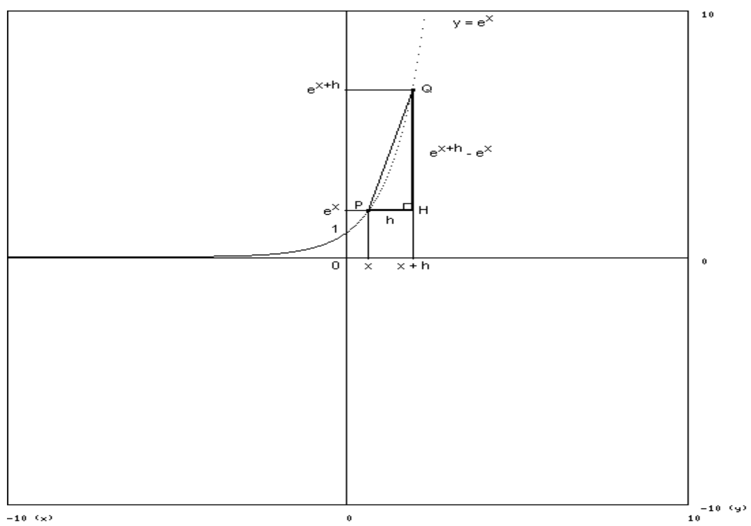
Poiché

$$C < \tfrac{1}{2}, \text{ si ha } C \notin \mathbb{N}$$

Essendo giunti ad un assurdo, a partire dall'ipotesi di razionalità di *"e",* risulta dunque essere dimostrata la tesi contraria: "e", il numero di Nepero, è irrazionale *(c.v.d.)*

Pendenza della funzione esponenziale.

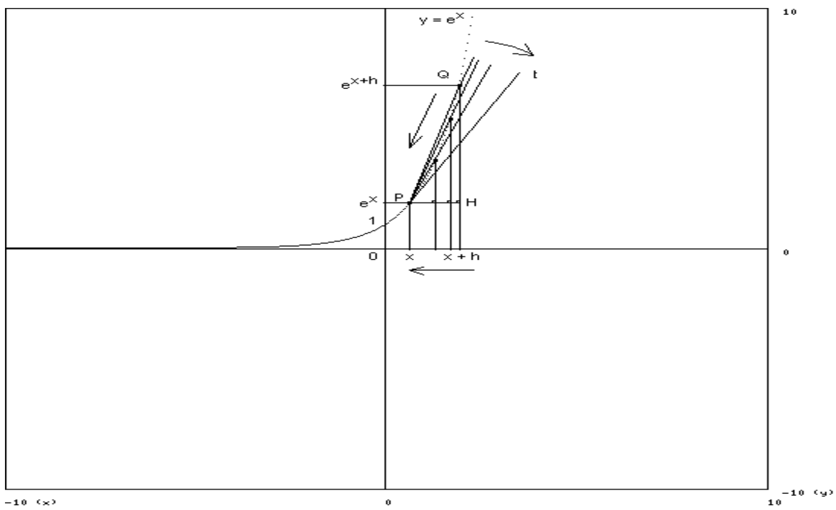
Vogliamo ora studiare la pendenza, ovvero la derivata, della funzione esponenziale , cioè quando la base è il numero di Nepero .
Il risultato che troveremo è di fondamentale importanza nell'intera matematica e questo giustifica l'importanza che assume il numero di Nepero .
Partiamo dal considerare il grafico:



e calcoliamo la pendenza della curva esponenziale nel punto P.

Per fare questo, come sempre quando vogliamo calcolare la pendenza di una curva, dobbiamo eseguire un procedimento al limite iniziando col calcolare la pendenza della retta secante che interseca la curva in P (che per noi è un punto "fisso") ed in un altro punto Q (che per noi è un punto "mobile"). Fatto questo, immagineremo che il punto Q si "avvicini" sempre di più al punto P . La retta secante PQ tenderà allora a diventare la retta tangente in P che chiameremo t .

Osserviamo anche ciò graficamente:



Analizziamo il processo al limite:
Il punto Q si avvicina al punto P , la secante PQ diventa la tangente t e la lunghezza del segmento PH , che vale h , tende a zero, cioè sarà h tendente a 0 .
Ma dobbiamo innanzitutto trovare il valore della secante PQ che è:

$$pend(PQ) = \frac{QH}{HP} = \frac{e^{x+h} - e^{x}}{h}$$

Per calcolare la pendenza della tangente t (ovvero la derivata della funzione esponenziale in x) basterà allora calcolare il limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^{x}}{h}$$

notiamo subito che sostituendo 0 ad h si ottiene una divisione per zero,operazione che in matematica è impossibile...ovvero :

$$\frac{e^{x+0} - e^{x}}{0} = \frac{e^{x} - e^{x}}{0} = \frac{0}{0}$$

che con maggiore precisione si definisce come forma indeterminata.
Per risolvere il limite bisogna allora scomporlo.
Iniziamo con l'applicare le proprietà delle potenze e raccogliendo a fattor comune otteniamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

siccome h tende a 0, ponendo:

$$h = \frac{1}{n}$$

avremo di conseguenza che:

$$n \to \infty$$

sostituiamo 1/n ad *h* otteniamo:

$$\lim_{n \to \infty} e^x \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

d'altronde per definizione di limite notevole sappiamo che:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

se sostituiamo nel limite precedente al posto di “e” il limite che lo definisce otteniamo:

$$\lim_{n \to \infty} e^x \cdot \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

per il quale tenendo sempre in considerazione la proprietà delle potenze per cui

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

diventa:

$$\lim_{n\to\infty} e^{x}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} e^{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} e^{x}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} e^{x}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{x}\cdot 1=e^{x}$$

Abbiamo perciò ricavato il fondamentale risultato (per tutta la matematica) che la pendenza (la derivata) della funzione esponenziale (con base "e") nel punto di ascissa "x" è uguale al valore della funzione stessa in quel punto.
Possiamo dunque scrivere che

$$\frac{d}{dx}e^{x}=e^{x}$$

nel quale con il simbolo "d/dx" indichiamo la derivata. c.v.d.

Fra gli ambiti di studio in cui il numero di Nepero si è reso utile per la descrizione dei fenomeni naturali, quello astronomico è indubbiamente il più antico. Siamo infatti nel II secolo a. C. Quando Ipparco di Nicea muove i primi passi verso una classificazione sistematica delle stelle in funzione della loro luminosità. In un cielo privo del tutto di inquinamento luminoso egli aveva infatti individuato sei "grandezze", o classi, in cui raggruppare le stelle del firmamento: la luminosità percepita dall'osservatore decresceva dalla prima alla sesta, così che nella prima "grandezza" si trovassero le stelle più fulgide, mentre nella sesta solo quelle visibili in condizioni di visibilità perfette.
Poiché nell'antichità era però diffusa l'idea per cui le stelle si trovassero tutte ad una stessa distanza dalla terra, apposte sul cosiddetto cielo delle stelle fisse, una maggiore luminosità doveva necessariamente essere associata ad una maggiore grandezza della stella.
Questa classificazione proseguì per molti secoli, fino a quando uno scienziato di nome Pogson non si avvalse degli studi dei due pionieri delle neuroscienze Weber e Fetchner, per studiare in che modo il nostro occhio percepisse la luce. I due studiosi tedeschi si erano resi conto di una cosa: se si chiedeva a due persone di sollevare pesi notevolmente differenti (per esempio 3kg a uno e 30 all'altro) e successivamente si aggiungeva uno stesso peso (per esempio di 1 kg) a quelli iniziali, la persona che in partenza aveva il peso maggiore percepiva la variazione in misura minore. Codificando i vari esperimenti in merito si arrivo a stabilire la seguente formula: p = k lns; ovvero la percezione di uno stimolo aumentava di un fattore k proporzionalmente non alla sensazione (s) bensì al logaritmo naturale della sensazione. Il logaritmo naturale, o iperbolico, o neperiano, è un logaritmo che ha per base "e", appunto il numero di Nepero.

Pogson ampliò gli studi notando che quando in coincidenza di un eclissi di sole la luminosità era ridotta del 90%, la nostra percezione visiva si riduceva solo di un fattore 10. definì quindi una scala di "magnitudini" (una grandezza relativa alla luminosità) basandosi sulla risposta logaritmica dell'occhio: una stella di magni-tudine 1 è 100 volte più luminosa di una stella di magnitudine 6.
Era stato quindi "quantificato" il sistema di Ipparco, ottenuto solo tramite osservazioni a occhio nudo.
Conoscendo quindi le modalità di percezione della luce, e quelle di diffusione della luce (ovvero proporzionalmente all'inverso del quadrato della distanza) si riuscì a codificare la formula, usata tutt'oggi mediante cui si legano magnitudine apparente, la luminositò risultante di una stella agli occhi di un osservatore terrestre, la magnitudine assoluta, quella percepita da un osservatore posto arbitrariamente a 10 parsec di distanza, e la distanza effettiva di una stella: $M - m = -5\log d + 5$
In quest'ultima formula il log venne scelto in base 10 per una convenienza nei calcoli. Sarebbe stato difficile che la magnitudine assoluta di una stella era quella assunta d una distanza "e" dall'osservatore, poiché esso ha infinite cifre dopo la virgola e la misura sarebbe stata quindi meno rigorosa.

Sul decadimento radioattivo

Tutti quanti sicuramente sanno che la materia è composta da atomi: nuclei di protoni (con carica +) e neutroni (neutri) avvolti da una nube di elettroni (con carica -). Gli atomi sono di vari tipi: si può parlare di atomi dell'Oro, dell'Argento, del Piombo, dell'Ossigeno ecc., ognuno con il suo specifico numero atomico (il numero di protoni nel nucleo).
Accade però che quando il nucleo è molto pesante -è formato cioè da molti protoni e neutroni- l'atomo possa essere instabile, ovvero tenda ad "alleggerirsi" liberando energia sotto varie forme, per diventare un atomo "stabile". Questo fenomeno viene detto decadimento radioattivo. Ne è un esempio l'Uranio 238, che tramite successive fasi e diversi tipi di decadimento diventa Piombo 206. I tipi di decadimento sono fondamentalmente tre: decadimento per emissione di particelle alpha, ovvero nuclei di Elio (due protoni e due neutroni), particelle beta, cioè (semplificando) di elettroni, oppure raggi gamma, cioè radiazioni ad alta energia. Nell'ordine con cui li abbiamo appena elencati questi tipi di decadimento sono posti anche in ordine di "pericolosità": le particelle alpha sono a bassa penetrazione e vengono fermate da un semplice foglio di carta; la schermatura dalle particelle beta ne richiede invece uno d'alluminio; i raggi gamma infine sono i più pericolosi poiché vengono ridotti, ma non annullati del tutto, solo da una superficie di piombo.
La legge che descrive il fenomeno del decadimento è la seguente:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Le grandezze in gioco sono la massa iniziale (mo) della sostanza radioattiva presa in esame, la massa a decadimento avvenuto (m), il numero di Nepero (e), l'intervallo di tempo (t) e infine una grandezza caratteristica indicata con "lambda", il cui inverso (tau = 1/lambda) è detta "vita media dell'atomo" calcolata alla stessa maniera di come si calcola la vita media delle persone in un paese: si considera un campione di popolazione si sommano le durate di tutte le vite e si divide il risultato per il numero di persone che compongono il campione in esame.

In fisica tuttavia si tende ad utilizzare un'altra grandezza relativo al tempo di vita delle sostanze radioattive: il tempo di dimezzamento, ovvero il tempo impiegato a disintegrare metà della sua massa(riscrivendo l'equazione del decadimento in forma logaritmica si è ricavato che in media il tempo di dimezzamento corrisponde a circa i 7/10 della vita media [tau]).

Sulla base del decadimento radioattivo Walter F. Libby ideò nel 1960 il test al Carbonio 14 (che gli valse il nobel per la fisica).

I presupposti del test erano che: 1) il Carbonio 14 è un isotopo instabile del carbonio 12 che tende a decadere in Azoto 12; 2) nonostante decada, i raggi cosmici che intercettano la nostra atmosfera lo ricreano continuamente in quantità costanti; 3) gli organismi scambiano Carbonio, quindi anche Carbonio 14, solo finché sono vivi.

Avendo ricavato per via sperimentale che il tempo di dimezzamento del carbonio è di circa 5700 anni, è possibile quindi riscrivere l'equazione del decadimento in funzione del tempo: confrontando la quantità di Carbonio 14 rimasta nell'organismo e confrontandola con quella dell'atmosfera è quindi possibile sapere da quanto tempo esso ha smesso di scambiarlo con l'ambiente esterno, quindi da quanto tempo è morto.

Il test a Carbonio 14 è ovviamente di importanza capitale per tutti quei settori come la paleontologia che richiedono la datazione dei fossili, in quanto permette di associare a un momento particolare della vita della nostra terra gli organismi ad uno specifico stadio evolutivo.

Il numero di Nepero, oltre che nel campo della fisica e della matematica, ha diverse applicazioni nelle cose che ci sono più vicine, come l'economia e il calcolo delle probabilità, insieme al calcolo combinatorio.

Il numero **e** lo troviamo utilizzato nel calcolo dell'interesse composto.

L'interesse è detto composto quando invece di essere pagato o riscosso, è aggiunto al capitale iniziale che lo ha prodotto. La percentuale di interesse viene quindi ri-applicata al valore totale durante ogni periodicità.

Questa formula può essere riscritta nella forma più semplice:

$$V_f = V_a (1+\frac{r}{n})^n$$

V_f = Valore Futuro, V_a = Valore Attuale, r = tasso d'interesse, n = numero di periodi

Dove il valore futuro è il valore che il valore attuale (Quello iniziale quindi) avrà dopo l'ultimo periodo n.
Possiamo notare una somiglianza tra la definizione del numero di Nepero (Quella sulla destra) e quest'ultima formula:

$$(1+\frac{r}{n})^n \qquad\qquad (1+\frac{1}{n})^n$$

Poniamo ora $x = \frac{n}{r}$ ottenendo $\frac{1}{x} = \frac{r}{n}$ oltre a *n = x*, e di conseguenza

riscriviamo le due formule iniziali in questo modo, arrivando alla definizione del numero di nepero che avevamo dato in precedenza.

$$(1+\frac{1}{x})^{xr} \qquad\qquad (1+\frac{1}{n})^n$$

Un'altra applicazione del numero di Nepero la troviamo nel calcolo della probabilità e nella formula di distribuzione binomiale:

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

k = numero di successi, p = probabilità di successo, n = numero di tentativi

Ipotizziamo ora di trovarci davanti una *slot machine* vincente 1 ogni *n* volte, e di giocare a questa slot per n volte. Se il numero di volte che noi giochiamo alla slot diventa molto alto, per esempio 1 milione, le probabilità che il giocatore **perda** tutte le scommesse è di 1/e. Andiamo a sostituire nell'equazione iniziale 0 al posto di k, ovvero il numero di successi, 10^{-6} al posto di *p* e 10^6 al posto di *n*.

$$\binom{10^6}{k} (10^{-6})^k (1-10^{-6})^{10^6-k}.$$

Troviamo quindi

$$\left(1-\frac{1}{10^6}\right)^{10^6}.$$

Quel 10^6 non è nient'altro che il numero di volte che giochiamo alla slot, riscriviamo quindi quest'ultima parte nella forma:

$$\frac{1}{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n .$$

Dimostrando quello che avevamo affermato all'inizio.
Nel calcolo combinatorio il numero di Nepero fu ritrovato nell'*hat check problem.*
A una festa ci sono n invitati, all’arrivo consegnano all’entrata il loro cappello, che viene posizionato dentro una scatola con il loro nome dal maggiordomo. Il maggiordomo però non conosce i nomi degli invitati, posiziona quindi i cappelli in modo casuale. La probabilità che nessun cappello venga posizionato correttamente è:

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Per n che tende a infinito, la sommatoria è uguale a $\frac{1}{e}$

La classe 5 sezione F del Liceo Isacco Newton con il Presidente della Sezione Romana Mathesis Prof. Stefano Geronimo, il Dirigente Scolastico Prof.ssa Ivana Uras e la Prof.ssa Giovanna Dell’Ovo.