Fare matematica con i documenti storici

Volume per l'alunno
Parte quarta
(Capitolo 3: Temi di matematica moderna)

A cura di **Adriano Demattè**
Presentazione di **Fulvia Furinghetti**

Capitolo 3
Temi di matematica moderna

La logica: scienza antica ma attuale

Una proposizione è una frase di cui si può dire se è vera o se è falsa. "Sta piovendo", "$3^2=6$", "Il quadrato è un particolare rettangolo" sono proposizioni; "Arrivederci", "Apri la finestra!", "Ti prego, dammi una mano!", "7·8" non lo sono.

COSA SONO I CONNETTIVI LOGICI

Più proposizioni possono essere unite (connesse) per formarne di nuove utilizzando delle particelle linguistiche, dette connettivi: *non*, *e*, *o*, *se... allora*. I connettivi sono utilizzati in logica, in matematica, in informatica (vedi, ad esempio, gli operatori *booleani* per la ricerca in internet).

Qui riportiamo alcuni passi di autori vissuti nel II e III secolo d.C., anche se fu la scuola megarico-stoica nel IV secolo a.C. che avviò lo studio dei connettivi in termini logici.

[**La negazione**]

Sono dette negative soltanto quelle proposizioni alle quali è prefissa la particella negativa.

Apuleio, *Περι ερμενειας*, 267.

non - non *p* se e solo se[1] *p*.

Diogene Laerzio, *De cl. phil. vitis*, 69 sgg.

[**L'implicazione filoniana**]

Filone diceva che la [proposizione] connessa è vera quando non accade che essa cominci con il vero e finisca con il falso. Secondo lui vi sono quindi tre modi per ottenere una [proposizione] connessa vera e uno solo per ottenerne una falsa. Infatti, [1] se comincia con il vero e finisce con il vero, essa è vera, come ad esempio «se è giorno, c'è luce»; [2] quando comincia con il falso e finisce con il falso, essa è vera, come ad esempio «se la terra vola, la terra ha le ali»; [3] analogamente per quella che comincia con il falso e finisce con il vero, come ad esempio «se la terra vola, la terra esiste». È falsa soltanto quando, cominciando con il vero, finisce con il falso, come ad esempio «se è giorno, è notte»; infatti, quando è giorno, la [proposizione] «è giorno» è vera, e questa era l'antecedente; e la proposizione «è notte» è falsa, e questa era il conseguente.

Sesto Empirico, *Adversus Math.*, VIII, 115 sgg.

[1] "Se e solo se" va inteso come "equivalente a".

[**La disgiunzione**[2] **incompleta**]

In alcune proposizioni, però, possono essere vere non soltanto una, ma anche più di una o tutte le componenti [...].

Galeno, *Inst.*, V, 11-12.

[**La congiunzione**]

Quello che i Greci chiamano "συμπεπλεγμενον", noi lo diciamo *coniunctum* o *copulatum*. Esso è del tipo seguente: «Publio Scipione, figlio di Paolo, fu due volte console ed ebbe un trionfo e fu censore e fu collega nel censorato di Lucio Mummio». In ogni [proposizione] congiuntiva il tutto è detto falso nel caso in cui una [delle componenti] sia falsa, anche se le altre sono vere. Infatti, se aggiungessi a tutto quello che ho detto secondo verità di Publio Scipione: «e vinse Annibale in Africa», che è falso, allora l'intera congiuntiva che l'includa sarebbe falsa, perché questa è una aggiunta falsa e tutte vengono affermate contemporaneamente.

Aulo Gellio, *Noct. Att.*, XVI, 8.

Per interpretare il documento

1. "La doppia negazione è equivalente all'affermazione". Individua nei documenti precedenti il passo che corrisponde a questa frase.
2. La proposizione "Se p allora q", dove p e q sono proposizioni, può essere vera in ben tre casi, a seconda se p, q sono vere o se sono false: individua nel documento i tre casi, ricercando anche gli esempi prodotti da Sesto Empirico. "Se p allora q" è falsa in un caso: illustralo.
3. "p o q o r": Galeno dice che è vera in più casi, falsa in uno solamente, a seconda che ciascuna delle componenti p, q, r sia vera oppure no (come quando, accingendosi a fare un giretto in città, con del tempo a disposizione, si dicesse: "*Vado in pasticceria* o *Vado a prendermi un paio di scarpe* o *Mi fermo un po' da Gigi*"). Individua i casi in cui "p o q o r" secondo Galeno è vera.
4. Galeno riporta un inciso: "possono essere vere non soltanto una". C'è un riferimento implicito al caso in cui si usasse il connettivo o nel senso di *aut*: "*A pranzo mangerò carne o pesce*" (è escluso che mangi sia carne che pesce ma uno dei due sì). Riassumi, quindi:
   p è vera, q è vera, p *aut* q è ....
   p è vera, q è falsa, p *aut* q è ....
   p è falsa, q è vera, p *aut* q è ....
   p è falsa, q è falsa, p *aut* q è ....

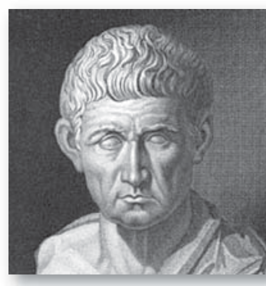
[2] Viene tradotta con il connettivo *o* cioè con il *vel* latino.

5. La *congiunzione* può venir tradotta con *e*. Trova nel testo l'interpretazione data da Aulo Gellio a ciascuna proposizione componente di "*p e q e r e s e t*": in quale caso questa proposizione composta sarebbe vera?
6. La congiunzione *e*, così come viene usata nella quotidianità, talvolta ha un significato diverso da quello che indica Aulo Gellio. Esamina le due affermazioni: a) "Prendo un caffè e esco"; b) "Esco e prendo un caffè". Sono equivalenti? Trova un altro esempio analogo, tratto dalla quotidianità.
7. Esamina le seguenti proposizioni: a) "Se 356 è multiplo di 4 allora 356 è multiplo di 2"; b) "Se il quadrato è un particolare rettangolo allora $5^0=1$". Perché sono entrambe vere, secondo quello che dice Sesto Empirico?
8. Al giorno d'oggi la logica matematica si serve di simboli specifici per indicare i diversi connettivi: ricercali su di un libro di testo scolastico. Approfondisci la tua ricerca recuperando sullo stesso libro anche le *rispettive tabelle* (*o tavole*) *di verità*.

L'ARTE DI... RAGIONARE

Vari sono gli schemi di inferenza (schemi di ragionamento): un classico sillogismo è "Tutti gli uomini sono mortali, Socrate è un uomo, quindi Socrate è mortale".

Aristotele ne ha fondato la teoria che i logici medievali hanno portato al massimo sviluppo.



Aristotele
(384 a.C. - 322 a.C.)

Se «se *p* e *q*, allora *r*»[3] e «se *s*, allora *p*» sono valide, allora anche «se *s* e *q*, allora *r*» è valida.
Se «se *p* e *q*, allora *r*» e «se *s*, allora *q*» sono valide, allora anche «se *p* e *s*, allora *r*» è valida.
Se «se *p* e *q*, allora *r*» è valida, allora anche «se *q* e *p*, allora *r*» è valida.
Se «se *p*, allora *q*» e «se *q*, allora *r*» sono valide, allora anche «se *p*, allora *r*» è valida.

Aristotele, *An. Pr.*, A4.

[3] *p*, *q*, *r*, *s* indicano proposizioni.

Per interpretare il documento

1. Associa ciascuno dei due ragionamenti seguenti allo schema di Aristotele corrispondente:
   a. "Se mi presti il tuo portatile e mi fai fare un giro in moto, allora ti aiuto a fare la relazione", "se ti presto i miei cd, allora mi presti il tuo portatile", quindi "se ti presto i miei cd e mi fai fare un giro in moto, allora ti aiuto a fare la relazione".
   b. "Se mi presti il tuo portatile, allora ti aiuto a fare la relazione", "se ti aiuto a fare la relazione, allora avrai un bel voto", quindi "se mi presti il tuo portatile, allora avrai un bel voto".
2. Costruisci esempi opportuni per gli altri due schemi di inferenza, vale a dire per: "se «se p e q, allora r» e «se s, allora q» sono valide, allora anche «se p e s, allora r» è valida";
   "se «se p e q, allora r» è valida, allora anche «se q e p, allora r» è valida".
3. Cerca su un testo di filosofia il termine *sillogismo*. Che cosa significa? Cerca i vari schemi di ragionamento, facendoti eventualmente aiutare dal tuo insegnante di filosofia.

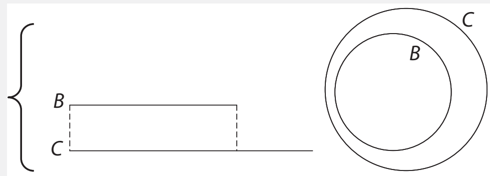
LA MATEMATICA SI IMPADRONISCE DELLA LOGICA

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Si dice che una scienza diventa 'vera scienza' quando incomincia ad usare strumenti matematici. Storicamente è successo con la fisica, la chimica, ma anche con l'indagine sociale, la biologia ecc. Il rapporto della matematica con la logica è stato, ed è, complesso. Anzitutto c'è stata la matematizzazione della logica: a cominciare da Leibniz (1646-1716) che ha dato l'idea, per proseguire con Boole (1815-1864) e altri, in logica si è cominciato a *calcolare*, più o meno come si fa in algebra. Poi i matematici hanno tentato di ricostruire tutta la matematica partendo dalla logica. Oggi la logica (*logica matematica*) è alla base degli studi sull'intelligenza artificiale.

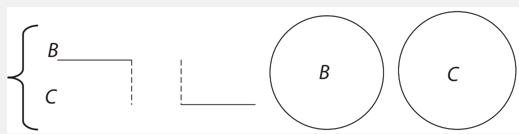
Il documento che segue mostra come Leibniz abbia incominciato ad usare rappresentazioni grafiche analoghe a quelli che oggi sono chiamati *diagrammi di Eulero-Venn*. Accanto ad essi compaiono altre rappresentazioni che utilizzano i segmenti ma illustrano gli stessi concetti.

Proposizione universale[4] affermativa:
«Ogni B è C»
«Ogni uomo è animale»
rappresentazione grafica



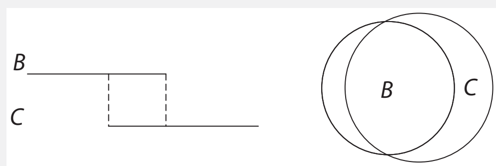
la quale mostra che tutti gli uomini sono compresi entro tutti gli animali. Ma [...] non tutti gli animali sono contenuti entro tutti gli uomini.

Proposizione universale negativa:
«Nessun B è C»
«Nessun uomo è pietra»



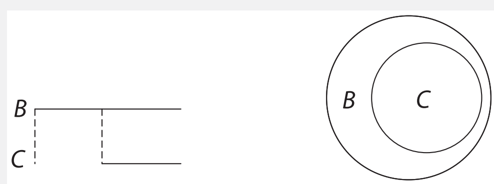
[...] nessun uomo è contenuto fra le pietre e nessuna pietra è contenuta fra gli uomini.

Proposizione particolare affermativa:
«Qualche B è C»
«Qualche uomo è sapiente»



È chiaro dal disegno che alcuni uomini sono compresi fra i sapienti, e nello stesso tempo è evidente che alcuni sapienti sono compresi fra gli uomini.

Proposizione particolare negativa:
«Qualche B non è C»
«Qualche uomo non è contadino»



Non abbiamo prolungato la retta C per evitare che se ne inferisca [...] che «qualche contadino non è uomo» [...]

Gottfried Wilhelm Leibniz, *Opusc. et fragm. inédits*.

Per interpretare il documento

1. Inventa altri esempi di proposizioni universali e particolari per ciascun caso illustrato da Leibniz nel documento precedente.
2. Quali rappresentazioni di Leibniz assoceresti all'affermazione "Alcuni cittadini europei sono nati in America"?

[4] "Universale" in quanto contiene il termine "ogni".

3. Quali rappresentazioni di Leibniz assoceresti all'affermazione "Non tutti gli elefanti vivono in Asia", utilizzando l'insieme dei viventi asiatici?
4. Quali dei diagrammi di Leibniz mostrano che può essere vero che "Qualche B non è C" e contemporaneamente che "Qualche C non è B"?
5. Ti dico: è vero che "Qualche B non è C" ma è falso che "Qualche C non è B". Quale conclusione che utilizzi il termine "ogni" potresti ricavare?
6. a) "Qualche divisore di 12 è divisore di 24"; b) "Qualche divisore di 12 è divisore di 20"; c) "Qualche divisore di 12 non è divisore di 20" sono proposizioni vere in matematica. Nel linguaggio quotidiano, il termine "qualche" ha un significato a volte diverso: analizza l'affermazione "Qualche studente del liceo scientifico è iscritto alle superiori"; la consideri vera o falsa? Esistono alunni dello scientifico non iscritti alle superiori?

1. - Lo scopo del presente trattato è quello di investigare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente mediante le quali si realizza il pensiero; di esprimere tali leggi nel linguaggio simbolico analogo ad un calcolo e su queste premesse di fondare la scienza della logica e di costruire il suo metodo; di fare di questo metodo della logica a sua volta la base per un metodo generale per le applicazioni della teoria matematica della probabilità; ed infine quello di raccogliere, dai vari elementi di verità emersi nel corso di queste indagini, qualche presunzione abbastanza probabile sulla natura e sulla costituzione della mente umana.

[...]

È una verità generalmente ammessa che il linguaggio sia uno strumento della ragione umana, e non soltanto un mezzo per esprimere il pensiero.

Il proposito di questo capitolo è quello di ricercare che cosa rende il linguaggio uno strumento così adatto per le più importanti facoltà intellettuali.

[...]

In queste analisi non sarà necessario prendere partito nella discussione, che data da lungo tempo tra i dotti, a proposito del famoso problema se il linguaggio debba essere considerato come un elemento *essenziale* per il ragionamento oppure se sia possibile ragionare senza di esso.

La mia ipotesi è che questo problema è al di fuori degli scopi del presente trattato e ciò per la seguente ragione: il compito della scienza è quello di ricercare delle leggi; e che sia che noi consideriamo i segni come dei rappresentanti delle cose e delle loro relazioni, sia che noi concepiamo i segni come rappresentanti dei concetti e delle operazioni dell'intelletto umano, quando noi studiamo le leggi dei segni noi stiamo studiando in effetti le leggi del ragionamento, così come esse si manifestano.

[...]

In tutto il presente trattato il termine «segno» sarà impiegato esclusivamente per indicare dei segni scritti. Le qualità fondamentali dei segni sono enumerate dalla seguente definizione:

▶

«Un "segno" è un simbolo arbitrario, che ha una interpretazione fissata, e che può essere combinato con altri segni con certe leggi fissate, che dipendono dalla interpretazione dei segni stessi».

[...]

Se un aggettivo, come per es. «buono», è usato come un termine di descrizione, rappresentiamo con una lettera, per es. «y», tutte le cose alle quali si può applicare tale descrizione, cioè la classe di tutte le cose buone. Allora conveniamo che la combinazione «xy» rappresenti la classe di tutte le cose alle quali entrambe le descrizioni sono contemporaneamente applicabili. Così per es. se x da solo sta per «cosa bianca» ed y sta per «pecora», conveniamo che xy rappresenti «pecora bianca»; e di nuovo, se z sta per «cosa con le corna», allora xyz rappresenterà la classe delle pecore bianche dotate di corna, cioè la classe di quegli esseri ai quali sono contemporaneamente applicabili le descrizioni che competono ai termini «bianco», «dotato di corna» e «pecora».

[...]

$$xx=x$$

[...]

La legge espressa da questa equazione trova i suoi esempi nel linguaggio comune. Infatti il dire «buono buono» con relazione ad un determinato soggetto è un pleonasmo inutile, e viene a dire la stessa cosa che «buono»; per esempio un uomo buono buono è lo stesso che un uomo buono.

Queste ripetizioni di parole sono spesso utilizzate per rinforzare un'idea o un'affermazione; ma questo effetto è puramente secondario e convenzionale e non è fondato sulle relazioni intrinseche del pensiero e del linguaggio.

[...]

Il simbolo «0» che viene usato in algebra soddisfa alla seguente legge formale

$$0y = 0$$

quale che sia il numero y. Se vogliamo che questa legge sia soddisfatta anche nel sistema di logica dobbiamo assegnare al simbolo «0» un significato tale che la classe $0y$ sia sempre identica con la classe «0», quale che sia la classe y.

In accordo con una definizione che è stata già data possiamo considerare il nulla come una classe. Infatti il nulla e l'universo sono i due limiti della possibile estensione di una classe, perché sono i due limiti di una interpretazione possibile di nomi generali, nessuno dei quali può essere applicato a meno individui di quanti appartengono alla classe «nulla» oppure a più individui di quanti appartengono alla classe «universo».

Ora, quale che sia la classe indicata con y, gli individui che sono comuni con questa classe e con la classe «nulla» sono tanti quanti quelli compresi nella classe «nulla», cioè nessuno.

Una breve riflessione ci porta a concludere che questa condizione è soddisfatta se 0 rappresenta il nulla.

[...]

$$1y=y$$

qualunque numero y rappresenti. E poiché si assume che quest'equazione formale sia ugualmente valida nel sistema istituito in questo lavoro, in cui 1 e y rappresentano classi,

▶

è chiaro che il simbolo 1 deve rappresentare una classe tale che tutti gli individui che appartengono a una *qualsiasi classe y*, sono anche gli individui $1y$ comuni alla classe y e alla classe rappresentata da 1. Non è necessario un esame approfondito per vedere che la classe rappresentata da 1 dev'essere «l'universo».

George Boole, *Una ricerca sulle leggi del pensiero.*

Per interpretare il documento

1. Nel documento, qual è il ruolo del linguaggio per il ragionamento?
2. Attualmente, il termine "linguaggio" ha un significato più ampio di quello con cui lo intendeva Boole. Discuti questa affermazione.
3. Individua nel documento un esempio per interpretare la scrittura xy.
4. Cosa indicano 1 e 0 nel documento, e quindi in quella che oggi viene chiamata *algebra di Boole*?
5. Con riferimento al sistema di Boole, completa le seguenti eguaglianze:
   yy=... 0 1=... $1xy$=... $0xy$=...
   Giustifica le tue scelte.
6. "Bel bello" significa "tranquillamente". Soffermati sulle affermazioni: a) "Se ne tornò bel bello dal parrucchiere" e b) "Se ne tornò bello dal parrucchiere". Metti in evidenza perché le due affermazioni costituiscono un esempio contrario a quello che dice Boole.

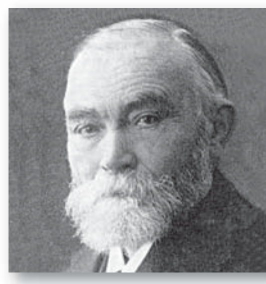
La logica per costruire i numeri

Fra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo vi fu il tentativo di ridurre la matematica alla logica: l'idea che la logica spiegasse nella maniera più piena la vera essenza della matematica animò l'opera di vari autori. Si costruì un nuovo simbolismo logico adatto allo scopo, che venne progressivamente modificato fino ad arrivare a quello che è oggi utilizzato anche nei tuoi libri di testo.

GOTTLOB FREGE E BERTRAND RUSSELL

Gottlob Frege (1848-1925), logico e matematico tedesco, viene considerato l'ispiratore del tentativo di ricostruire tutta la matematica partendo dalla logica. Iniziò con l'aritmetica, ma subì un durissimo colpo quando un giovane logico inglese destinato ad un grande futuro, Bertrand Russell (1872-1970), in una lettera gli comunicò di aver scoperto delle contraddizioni (*antinomìe*) che minavano le fondamenta della logica: l'edificio costruito pazientemente da Frege crollò.

Ripercorriamo le fasi essenziali della vicenda.



Gottlob Frege (1848-1925)

74. Lo zero è il numero che spetta al concetto «disuguale da sé stesso»

Passeremo ora alla spiegazione dei singoli numeri. Poiché non v'è nulla che cada sotto il concetto «disuguale da sé stesso», posso dare la seguente definizione: «0 è il numero naturale che spetta al concetto "disuguale da sé stesso"». Mi si obietterà che in queste parole è contenuta una contraddizione perfettamente analoga a quelle, famose, del «ferro legnoso» e del «circolo quadrato». Rispondo che, a mio parere, anche queste ultime non sono così perfide come sogliono venir dipinte. Senza dubbio non riusciranno mai utili a nulla; ma neanche potranno recarci alcun danno, purché non si supponga che qualcosa cada sotto di esse; ed è certo che il semplice uso di tali concetti non implica affatto questa ipotesi.

[...]

▶

76. Definizione dell'espressione

«N segue immediatamente a M nella successione dei numeri naturali». Voglio ora chiarire in quale relazione stanno fra loro due termini successivi della successione dei numeri naturali. A tale scopo basterà stabilire l'equivalenza reciproca delle due seguenti proposizioni:

«*n* segue immediatamente a *m* nella successione dei numeri naturali»

ed

«Esistono un concetto F e un oggetto *x*, che cade sotto F, per i quali valgono le seguenti proposizioni: *n* è il numero che spetta a F, e *m* invece è il numero che spetta al concetto "ciò che cade sotto F ma è diverso da *x*"».

[...]

77. 1 è il numero che spetta al concetto «uguale a 0»

Passando ora al numero 1, dobbiamo in primo luogo mostrare che esiste qualcosa che segue immediatamente allo 0 nella successione dei numeri naturali.

Prendiamo pertanto in considerazione il concetto - o, se si preferisce, il predicato - «uguale a 0». È facile trovare un oggetto che cade sotto di esso: lo 0. Si vede poi subito che sotto il concetto «uguale a 0 ma diverso da 0» non cade alcun oggetto, sicché il numero che spetta a quest'ultimo concetto sarà proprio lo 0.

[...]

«Il numero che spetta al concetto "uguale a 0 ma diverso da 0" è lo 0»;

[...]

«1 è il numero naturale che spetta al concetto "uguale a 0"»,

[...]

«1 segue immediatamente a 0 nella successione dei numeri naturali».

Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*.

Per interpretare il documento

1. Individua nel documento un concetto al quale spetta il numero 0.
2. Individua nel documento un concetto al quale spetta il numero 1.
3. Utilizza il concetto, riferito a te, "persone che abitano nel mio stesso appartamento". Scrivi l'elenco (nomi propri) degli individui che cadono sotto questo concetto: indica con *n* il loro numero e consideralo il "numero che spetta" ad esso.
4. Scegli un individuo che cada ancora sotto il concetto "persone che abitano nel mio stesso appartamento", chiamiamolo *a*. Quale numero naturale *m* spetta al concetto "persone che abitano nel mio stesso appartamento, diverse da *a*"?
5. Confronta l'esempio utilizzato nei due punti precedenti con la definizione riguardante un numero che segue immediatamente un altro nella successione dei naturali e scrivi un tuo commento.
6. Scrivi esempi inventati da te di concetti che contengano una contraddizione: quale numero va ad essi associato?

7. Utilizzane ora uno per scrivere un concetto al quale si possa associare il numero 1.

Caro collega,

per un anno e mezzo mi sono cimentato con i suoi *Grundgesetze der Arithmetik*, ma soltanto adesso sono in grado di trovare il tempo per lo studio accurato che intendo fare della Sua opera. Mi trovo perfettamente d'accordo con Lei in tutti i punti essenziali, in particolare con il Suo rigetto di qualunque momento psicologico in logica [...]

C'è solo un punto dove ho incontrato una difficoltà.

Lettera di Russell a Frege del 16 giugno 1902.

(B) 1) La più antica antinomia della specie considerata è l'Epimenide. Epimenide il cretese diceva che tutti i cretesi sono bugiardi, e tutte le affermazioni fatte dai cretesi erano di sicuro bugie. La sua era una bugia?

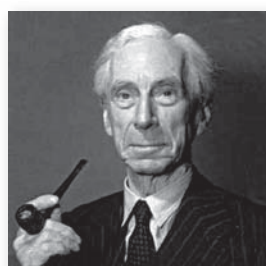
La forma più semplice di questa antinomia è offerta dall'uomo che dice «sto mentendo»; se mente sta dicendo la verità, e viceversa.

[...]

4) Il numero delle sillabe dei nomi «italiani» degli interi finiti tende ad aumentare al crescere degli interi, e deve aumentare gradualmente all'infinito, poiché con un numero finito assegnato di sillabe si può formare solo un numero finito di nomi. Dunque i nomi di alcuni interi debbono consistere di almeno 25 sillabe e fra questi deve esistere un minimo. Quindi «il minimo intero non nominabile in meno di 25 sillabe» deve denotare un intero finito. [...] Ma «il minimo intero non nominabile in meno di venticinque sillabe» è esso stesso un nome che consiste di 24 sillabe; dunque il più piccolo intero non nominabile in meno di 25 sillabe può essere individuato con un nome di 24 sillabe, che è una contraddizione.

Bertrand Russell, *Mathematical Logic as based on the theory of Types*.

Per interpretare il documento



Bertrand Russell
(1872-1970)

1. Esaminiamo l'antinomia del mentitore.
   Se un uomo dice "sto mentendo", supponi che quello che dice sia vero: allora è vero che sta mentendo e se mente dice il falso...
   Se un uomo dice "sto mentendo", supponi che quello che dice sia falso: allora (completa tu il ragionamento) ....
   ....
   ....
   Conta le sillabe della frase "il minimo intero non nominabile in meno di venticinque sillabe" ed illustra la contraddizione a questo proposito esposta da Russell.

2. Nel 1908, Kurt Grelling riformulò il paradosso in altro modo nel quale è eliminato ogni riferimento alla teoria degli insiemi. Chiamiamo *autologico* un aggettivo se ha la proprietà da esso stesso descritta ed *eterologico* se non la ha. Ad esempio "corto" è autologico mentre "lungo" è eterologico. Allora l'aggettivo "eterologico" è autologico o eterologico?
3. Russell, all'inizio della sua lettera a Frege, parla di "rigetto di qualunque momento psicologico in logica". La logica di cui trattano la matematica o la filosofia è nettamente distinta dalla psicologia? Discutine con i tuoi insegnanti.

> Caro collega,
> molte grazie per la sua interessante lettera del 16 giugno. Mi compiaccio che lei concordi con me su molti punti. [...] La sua scoperta della contraddizione mi ha causato la massima sorpresa e, direi quasi, costernazione, perché ha scosso le basi sulle quali intendevo costruire l'aritmetica. [...] Il secondo volume dei miei *Principi* sta per uscire. Dovrò certamente aggiungere un'appendice che tenga conto della sua scoperta. Se solo sapessi come!
>
> Lettera di Frege a Russell del 22 giugno 1902.

Misuriamo la casualità

Chi saranno stati i genitori del *calcolo delle probabilità*?

Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749-1827) ha proposto il modo per calcolare la probabilità di un evento che usiamo ancora abitualmente: per questo motivo può essere considerato lui il padre del calcolo delle probabilità.

Il ruolo di nonni potrebbe allora spettare al filosofo, fisico, matematico Blaise Pascal (1623-1662) e al matematico, quasi per hobby, Pierre Fermat (1601-1665): c'è chi però insinua che siano loro i veri padri...

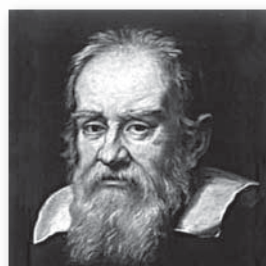
I bisnonni potrebbero essere vari "maestri d'abaco" italiani del XV secolo e: fra' Luca Pacioli, Gerolamo Cardano (1501-1576), Galileo Galilei (1564-1642).

Del secolo scorso ricordiamo Bruno de Finetti (1906-1985) e la sua concezione soggettivista della probabilità.

Numerosi figli, comunque, il calcolo delle probabilità continua ad averne ancora oggi, viste le sue numerose applicazione nel campo dell'economia, delle assicurazioni, della biologia, della fisica ecc.

GALILEO E UN PROBLEMA SUL LANCIO DI TRE DADI

Dei gentiluomini fiorentini sottoposero a Galileo il quesito del perché fosse più facile ottenere il 10 e l'11, rispetto al 9 e al 12, nel gioco della zara. Il gioco della zara era molto diffuso nel Medioevo e nel Rinascimento. Consisteva nel puntare sulla somma dei numeri ottenuti lanciando tre dadi.



Galileo Galilei
(1564-1642)

Che nel giuoco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi che questi, il che depende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3 e il 18, come che in un sol modo si posson con tre numeri comporre, cioè questi con 6. 6. 6 e quello con 1. 1. 1, e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi che v. g. il 6 o il 7, li quali in più maniere si compongono, cioè il 6 con 1. 2. 3 e con 2. 2. 2 e con 1. 1. 4, ed il 7 con 1. 1. 5, 1. 2. 4, 1. 3. 3, 2. 2. 3. Tuttavia ancorché il 9 e il 12 in altrettante maniere si compongono in quante

▶

il 10 e l'11, perloché d'egual uso dovriano esser reputati, si vede nondimeno che la lunga osservazione ha fatto dai giuocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che il 9 e il 12.

[...]

Comincio a considerare come essendo un dado terminato da sei faccie, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi; sei vengono ad essere le loro scoperte e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei faccie, potremo fare 36 scoperte tra di loro differenti, poiché ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6 scoperte diverse; onde è manifesto, tali combinazioni essere sei volte 6, cioè 36. E se noi aggiungiamo il terzo dado, perché ciascuna delle sue faccie, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36 scoperte delli altri due dadi, avremo le scoperte di tre dadi esser sei volte 36, cioè 216, tutte tra di loro differenti. Ma perché i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16, cioè 3. 4. 5 sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, è necessario che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, avremo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterà fare tale investigazione dal 3 sino al 10, perché quello che converrà a uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

[...] per esempio, nella prima casella abbiamo il punto 10 e sotto di esso sei triplicità di numeri con i quali egli si può comporre,

1 3 6	10		9		8		7		6		5		4		3		
10	6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 1 1	3	1 1 1	1	
15	6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3					
21	5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1							
25	5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3									
27 108	4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3											
108	4 3 3	3	3 3 3	1													
216		27		25		21		15		10		6		3		1	

che sono 6. 3. 1, 6. 2. 2, 5. 4. 1, 5. 3. 2, 4. 4. 2, 4. 3. 3. E perché la prima triplicità 6. 3. 1 è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) essere fatta da 6 scoperte di dadi differenti; però[5] accanto ad essa triplicità 6. 3. 1 si nota 6, ed essendo la seconda 6. 2. 2, composta di due numeri eguali e di un altro diverso, non può prodursi se non in 3 differenti scoperte, però se gli nota accanto 3; la terza triplicità 5. 4. 1, composta di tre numeri diversi, può farsi da 6 scoperte, onde si nota col numero 6, e cosi dell'altre tutte, e finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede come il punto 10 può farsi da 27 scoperte di dadi differenti, ma il punto 9 da 25 solamente, e l'8 da 21, il 7 da 15, il 6 da 10, il 5 da 6, il 4 da 3 e finalmente il 3 da

▶

[5] Perciò.

> 1, le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte de sossopri, cioè dei punti 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18 si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibili a farsi colle faccie dei tre dadi, che sono 216. E da questa tavola potrà ognuno, che intenda il giuoco, andar puntualissimamente misurando tutti i vantaggi, per minimi che sieno, delle zare,[6] degl'incontri e di qualunque altra particolar regola che in esso giuoco si osserva.
>
> Galileo Galilei, *Opere*, t. XIV.

Per interpretare il documento

1. Ricava dalla prima parte del documento e riformula il testo del problema relativo ai punteggi 9 e 12, 10 e 11 nel lancio di tre dadi.
2. Come giustifica Galileo il fatto che nel lancio di due dadi i casi possibili sono 36?
3. Come giustifica Galileo il fatto che nel lancio di tre dadi i casi possibili sono 216?
4. Quando una "triplicità" è formata da numeri tutti diversi, a quante "scoperte" dà luogo? E se la "triplicità" è costituita da due numeri uguali e uno diverso? E se i tre numeri sono uguali?
5. Costruisci la parte mancante della tabella, vale a dire quella dei "sossopri", "cioè dei punti 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18".
6. Ricava dalla tabella realizzata al punto precedente perché il "9 e il 12 in altrettante maniere si compongono in quante il 10 e l'11" e perché, tuttavia, questi ultimi siano più "vantaggiosi".

Fai le tue ipotesi

1. I giocatori che hanno posto il problema a Galileo hanno rilevato "vantaggi", per "minimi che sieno, delle zare", hanno cioè rilevato la maggior probabilità di ottenere i punteggi 10 e 11 rispetto a 9 e 12. In base a quali elementi avranno fatto la loro scoperta?

---

[6] Il VI canto del *Purgatorio* nella *Divina Commedia* di Dante inizia con:
Quando si parte il giuoco della zara
Colui che perde si riman dolente
Ripetendo le volte, e tristo impara.
Nella terzina di Dante, viene delineata la situazione del giocatore perdente che, allorquando gli altri hanno abbandonato il tavolo, rimane a ripetere, diremmo, i casi possibili e quelli favorevoli ai diversi punteggi.

SCAMBI EPISTOLARI

Sono rimaste nella storia della matematica le lettere che Fermat e Pascal si scambiarono durante il 1654: in esse, il calcolo delle probabilità cessa di essere semplicemente un aspetto del calcolo combinatorio.

Anche a Pascal, un accanito giocatore aveva sottoposto dei quesiti legati al gioco d'azzardo. Qui riportiamo il problema delle parti che era stato affrontato da altri matematici nei secoli precedenti, con risultati non soddisfacenti in quanto le soluzioni prodotte non erano esatte (diciamo il peccato ma non i peccatori, che comunque erano matematici di valore e i cui nomi li potete trovare alle pp. 349-50-1 di un libro che si trova anche in qualche biblioteca comunale, vale a dire: Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni).

Il problema delle parti, nella forma analizzata da Pascal nella lettera qui riportata, si può formulare così: "Due contendenti si affrontano in un gioco, nel quale hanno uguale abilità, mettendo in palio ciascuno 32 monete: si aggiudica il montepremi totale chi per primo consegue 3 vittorie. Per motivi misteriosi però, devono interrompere il confronto e lasciarsi quando sono sul punteggio di 2 a 1. Come dovranno dividersi la posta in palio? E se fossero stati sul 2 a 0? E se fossero stati sull'1 a 0?"

Ecco, pressappoco, come faccio per sapere il valore di ciascuna partita, quando due giocatori giocano, per esempio, tre partite e ciascuno ha messo in gioco 32 monete: supponiamo che il primo ne abbia due e l'altro una; essi giocano adesso una partita della quale la sorte è tale che se la vince il primo, egli guadagna tutto il denaro che è in gioco, cioè 64 monete; se la vince l'altro, essi sano due a due e di conseguenza, se essi si vogliono separare, è necessario che ciascuno ritiri la sua posta, cioè ciascuno 32 monete. Considerate dunque, signore, che se il primo vince, gli toccano 64 [monete]; se egli perde gli toccano 32 [monete]. Dunque se essi vogliono arrischiare questa partita e separarsi senza giocarla, il primo deve dire: «Io sono sicuro di avere 32 monete, poiché la perdita stessa me le dà; ma per le altre 32, può essere che le avrò io, può essere che le avrete voi; il rischio è uguale; dividiamo dunque queste 32 monete a metà e datemi, oltre queste, le mie 32 che sono per me sicure». Egli avrà dunque 48 monete e l'altro 16.

Supponiamo adesso che il primo abbia due partite e l'altro nessuna, e che essi comincino a giocare una partita. La sorte di questa partita è tale che se la vince il primo egli prende tutto il denaro, 64 monete; se la vince l'altro, eccoci ricondotti al caso precedente, nel quale il primo avrà due partite e l'altro una.

Ora noi abbiamo già mostrato che in questo caso spettano, a quello che ha le due partite, 48 monete: dunque se essi non vogliono giocare questa partita, egli deve dire così: «Se io la vinco, guadagnerò tutto, che è 64; se la perdo mi apparterrà legittimamente 48: datemi dunque le 48 che mi sono certe nel caso che io perda e dividiamo le altre 16 a metà, perché c'è lo stesso rischio che le vinciate voi come che le vinca io». Così egli avrà 48 e 8, che sono 56 monete.

▶.

Supponiamo infine che il primo non abbia che una partita e l'altro nessuna. Voi vedete, signore, che se essi cominciano una nuova partita, la sorte è tale che, se il primo la vince, egli avrà appunto due partite e pertanto, per il caso precedente, gli apparterranno 56 [monete], se egli la perde, essi sono a pari: dunque gli appartengono 32 monete. Dunque egli deve dire: «Se non la volete giocare, datemi 32 monete, che mi sono sicure, e dividiamo il resto di 56 a metà. Da 56 togliete 32, resta 24; dividete 24 a metà, prendetene 12, ed io [ne prendo] 12, che con 32, fanno 44».

Ora, in questo modo, voi vedete mediante le semplici sottrazioni che, per la prima partita, gli appartengono 12 monete; per la seconda altre 12; e per l'ultima 8.

Lettera di Pascal a Fermat del 29 luglio 1654.

Per interpretare il documento

1. Punteggio 2 a 1: se il giocatore in vantaggio vincesse la partita successiva, conquisterebbe .... monete; se perdesse, il punteggio diventerebbe di parità e sarebbe giusto dividere le 64 monete in parti uguali: .... ciascuno.
   La media fra 64 e 32 è ....
2. Punteggio 2 a 0: se il giocatore in vantaggio vincesse la partita successiva, conquisterebbe .... monete; se perdesse, il punteggio diventerebbe 2 a 1 (caso precedente) e gli spetterebbero .... monete.
   Quindi la media fra 64 e 48 è ....
3. Punteggio 1 a 0: se il giocatore in vantaggio vincesse la partita successiva, conquisterebbe .... monete (caso precedente); se perdesse, il punteggio diventerebbe 1 a 1 e spetterebbero .... monete a testa.
   Quindi la media fra 56 e 32 è ....
4. Ricava il numero di monete del giocatore in svantaggio, in ciascuno dei tre casi esaminati, sottraendo a 64 le vincite dell'avversario.
5. Per calcolare la media aritmetica di due numeri a e b ci sono più strategie, ad esempio: $(a+b):2$ o anche $a+(b-a):2$. Dopo aver mostrato l'equivalenza delle due espressioni, individua quale viene utilizzata da Pascal.

LA CONCEZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITÀ

Fino agli inizi del XIX secolo il concetto di probabilità rimase ambiguo. A Laplace va il merito di averlo definito come rapporto fra il numero dei casi favorevoli a un determinato evento e il numero dei casi possibili.

Nel brano qui riportato, Laplace presenta un'introduzione divulgativa, per i non specialisti, al calcolo delle probabilità. Agli aspetti più strettamente matematici fa precedere considerazioni filosofiche.

Si potrebbe addirittura dire, a rigore, che quasi tutte le nostre conoscenze sono soltanto probabili; e anche nelle pochissime cose che noi possiamo conoscere con certezza, cioè nelle scienze matematiche, i principali mezzi per raggiungere la verità, cioè l'induzione e l'analogia, si fondano sulla probabilità; quindi l'intero sistema delle conoscenze umane si fonda sulla teoria che esponiamo in questo saggio.

[...]

Una intelligenza che in un determinato istante conoscesse tutte le forze che animano la natura, e la posizione relativa degli esseri che la compongono, se (questa intelligenza) fosse talmente potente da poter analizzare tutti questi dati, allora abbraccerebbe con una stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero; nulla sarebbe incerto per questa intelligenza ed il futuro sarebbe a lei presente così come il passato.[7]

Lo spirito umano ci offre una pallida idea di una intelligenza di questo tipo con la perfezione che ha saputo dare alle leggi della astronomia. Le sue scoperte nel campo della meccanica e della geometria, insieme a quelle sulla gravitazione universale, gli hanno permesso di comprendere sotto le stesse espressioni matematiche gli stati passati e futuri del sistema dell'universo.

[...]

Tutti gli sforzi nella ricerca della verità tendono ad avvicinare incessantemente lo spirito umano alla comprensione di ciò che concepiamo, ma da cui resterà sempre infinitamente distante.

[...]

Ora la regolarità che l'astronomia ci mostra nei movimenti delle comete ha luogo certamente in ogni altro fenomeno.

Infatti la curva descritta da una molecola di aria o di un vapore è regolata in modo altrettanto certo delle orbite dei pianeti; la sola differenza tra i due fenomeni è quella che vi è messa dalla nostra ignoranza.

La probabilità ha relazione da una parte con questa ignoranza e dall'altra parte con le nostre conoscenze.

[...]

Il rapporto del numero dei casi favorevoli a quello di tutti gli eventi possibili è la misura di questa probabilità; essa pertanto non è che una frazione il cui numeratore è il numero degli eventi favorevoli, e il denominatore è il numero di tutti gli eventi possibili.

La nozione che abbiamo dato di probabilità suppone che se si fanno crescere nello stesso rapporto i numeri degli eventi possibili e quello degli eventi favorevoli la probabilità rimanga la stessa.

▶

[7] Laplace fa intendere che le leggi ferree della natura non lasciano spazio alla libertà degli esseri viventi.

Per convincersi di questo si pensi a due urne A e B, la prima delle quali contenga quattro palline bianche e due nere, la seconda due bianche e una nera. Si può immaginare che le due palline nere della prima siano attaccate da un filo, che si rompe quando si estrae una pallina; e la stessa cosa si può pensare a coppie delle quattro bianche. Ora tutti gli eventi che conducono alla estrazione di una pallina nera sono costituiti dall'unico evento, rappresentato dal sistema nero.

Pensiamo ora che i fili non si rompano quando si estrae una pallina; è chiaro che il numero degli eventi possibili non cambierà così come non cambierà il numero dei casi favorevoli; soltanto, in questo caso, si estrarranno dall'urna due palline alla volta; ma la probabilità di estrarre una pallina nera sarà sempre la stessa.

Ma allora si ricade nel caso dell'urna B, con la sola differenza che le tre palline di quest'ultima siano sostituite da tre sistemi di coppie di palline, unite tra loro in modo inscindibile.

Quando tutti i casi possibili sono anche favorevoli ad un certo evento, la probabilità di questo si cambia in certezza, e la sua espressione diventa uguale ad 1.

[...]

Si cercano nelle estrazioni passate della lotteria francese i numeri usciti più frequentemente per formare delle combinazioni sulle quali si crede di poter scommettere con vantaggio.

Ma, dato il modo in cui si rimescolano i numeri prima di ogni estrazione, il passato non deve avere alcuna influenza sull'avvenire.

Il fatto che certi numeri siano sorteggiati più frequentemente di certi altri, dipende solo dalle anomalie del caso; ho fatto dei calcoli in vari casi e ho trovato che queste anomalie erano comprese sempre nei limiti consentiti dalla ipotesi non inverosimile di una uguale probabilità di sorteggio di ogni numero.

[...]

Dei diversi modi di avvicinarsi alla certezza

[…]

L'induzione sa scoprire i principi generali delle scienze, ma non basta per stabilirli in modo rigoroso. Occorre sempre confermarli con dimostrazioni, oppure con esperienze decisive; perché la storia della scienza ci mostra che l'induzione ha condotto talvolta a risultati inesatti.

Citerò come esempio un teorema sui numeri primi dovuto a Fermat: questo grande matematico, che aveva profondamente meditato sulla loro teoria, cercava una formula che esprimesse dei numeri primi, dando direttamente un numero primo più grande di quale si voglia numero assegnabile.

L'induzione lo condusse a pensare che il 2, elevato ad un esponente che fosse a sua volta una potenza di 2, addizionato alla unità, desse sempre un numero primo. Così si ha:

$$2^2+1=5$$

$$2^{2^2}+1=17$$

▶

Egli trovò che la cosa era ancora vera per la ottava potenza e per la sedicesima potenza di due, aumentata della unità.

Questa induzione, confortata da numerose considerazioni di aritmetica, gli fece pensare che il risultato fosse generale. Tuttavia egli confessa di non essere mai riuscito a dimostrare tale risultato. Infatti Euler stesso riconobbe che la proprietà non era vera per la trentaduesima potenza del 2, che, aumentata di 1, dà 4 294 967 297, numero che è divisibile per 641.

Pierre Simon Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*.

Per interpretare il documento

1. Limitatezza della conoscenza e calcolo delle probabilità: individua in quale relazione li colloca Laplace.
2. Se il "numero dei casi favorevoli" è n e "quello di tutti gli eventi possibili" è m, descrivi con una formula la definizione di probabilità data da Laplace.
3. Scrivi un tuo parere in merito alla giustificazione della definizione di probabilità esposta da Laplace: l'argomentazione ti sembra convincente? Quali argomenti riterresti più efficaci?
4. Qual è l'opinione di Laplace su chi vuole fare previsioni riguardo alla lotteria francese?
5. L'induzione e la matematica: descrivi l'esempio riportato nel documento.
6. Certezza e matematica: è cambiata la tua opinione dopo la lettura del brano di Laplace?
7. Come si conciliano i due aspetti apparentemente contraddittori, vale a dire concezione deterministica e teoria della probabilità, in Laplace?


Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

ALTRE CONCEZIONI DI PROBABILITÀ

La concezione frequentista deriva dall'idea che la probabilità vada determinata con riferimento esclusivo all'esperienza, rifiutando ogni assunzione a priori, al contrario di quello che era orientato a fare Laplace. Da John Venn (1834-1923) -quello dei diagrammi...- in poi, questo orientamento trovò applicazione in particolare nelle scienze sperimentali. La probabilità di un evento è il limite della frequenza relativa, con la quale esso si verifica, al crescere indefinito del numero di prove. Il brano che riportiamo è dovuto al matematico austriaco Richard von Mises (1883-1953).

La concezione soggettivista è stata diffusa dall'italiano Bruno de Finetti ed il documento che riportiamo ne introduce alcuni aspetti essenziali.

Ogni branca delle scienze esatte è la descrizione idealizzata, semplificata, logicamente costruita, di un certo settore del mondo osservabile. La geometria si occupa di linee, superfici, etc., cioè delle nozioni per le quali si danno definizioni in termini matematici, ma che al tempo stesso riflettono osservazioni reali. L'oggetto matematizzato del calcolo delle probabilità è formato da *sequenze infinite di esperienze uniformi* […] sequenze nelle quali il limite della frequenza relativa di ciascun risultato individuale esiste. Se tra gli N primi elementi della sequenza il risultato A si ripete N_1 volte, supponiamo che il limite ∞

$$\lim_{N=\infty} \frac{N_1}{N} = p_1$$

esista e lo chiamiamo la chance (o la probabilità, vedere sopra) di A in questa sequenza. […]

Il fatto che conta, è che ogni enunciato del calcolo delle probabilità è un enunciato concernente sequenze infinite che ammettono i limiti di frequenza. La probabilità che Omero fosse un personaggio del IX sec. a.C., autore dell'*Iliade* e dell'*Odissea*, non ha relazione alcuna col calcolo delle probabilità, in ogni caso non più di quanto la «forza» della legge, o la «forza» di una convinzione hanno a che fare con la nozione di forza in meccanica razionale.

Richard von Mises, *Sur les fondements du calcul des probabilités*, pp.1-2.

Per interpretare il documento

Richard von Mises
(1883-1953)

1. Soffermati sul fatto che l'oggetto del calcolo delle probabilità, secondo l'autore, è costituito da "*sequenze infinite*" e individua dove e come von Mises vi fa riferimento.
2. In quale delle due seguenti sequenze si può parlare di "*esperienze uniformi*"?
   a. Estrazione ripetuta di una pallina da un'urna contenente due palline nere e due verdi ad occhi bendati.
   b. Estrazione ripetuta di una pallina da un'urna contenete due palline nere e due verdi, a volte usando la benda, a volte senza benda.
3. Come si determina, utilizzando la definizione di Von Mises, la probabilità di ottenere testa nel lancio di una moneta?
4. Descrivi una situazione concreta nella quale si utilizza un approccio frequentista per esprimere un giudizio di probabilità.
5. Rifletti riferendoti alle ultime righe del documento: di quali eventi non si può calcolare la probabilità? Fai qualche esempio e discutilo con i tuoi amici.
6. "*Sequenze infinite*" non sono praticamente realizzabili e quindi, con una scelta "soggettiva", bisogna decidere quando interrompere le "esperienze": parti da questa affermazione per stabilire un collegamento fra la concezione di Von Mises e la successiva di de Finetti.

Di molte asserzioni, o *proposizioni*, spesso non sappiamo dire se sono «vere» o «false» (ad es. per quanto riguarda tutti gli eventi futuri), ma soltanto se sono più o meno *verosimili* o *probabili*. Anche qui si presentano le due alternative: di concepire tale valutazione di probabilità come avente un senso obbiettivo, o come avente semplicemente un senso soggettivo. Quasi sempre si cerca, anche con grandi sforzi, di persuadere o di persuadersi dell'esistenza di un significato obbiettivo; tutti questi sforzi ebbero però sempre un esito poco soddisfacente, tanto vero che nessuna definizione o concezione di probabilità ha mai saputo imporsi o affermarsi.

Il calcolo delle probabilità è la logica del probabile. Come la logica formale insegna a dedurre la verità o falsità di certe conseguenze dalla verità o falsità di certe premesse, così il calcolo delle probabilità insegna a dedurre la maggiore o minore verosimiglianza o probabilità di certe premesse. Per chi attribuisca alla probabilità un significato obbiettivo, il calcolo delle probabilità dovrebbe avere un significato obbiettivo, i suoi teoremi esprimere delle proprietà che nel campo del reale risultano soddisfatte. Ma è inutile fare simili ipotesi. Basta limitarsi alla concezione soggettiva, considerare cioè la probabilità come il grado di fiducia sentito da un dato individuo nell'avverarsi di un dato evento, e si può dimostrare che i noti teoremi nel calcolo delle probabilità sono condizioni necessarie e sufficienti perché le opinioni di un determinato individuo non siano intrinsecamente contraddittorie e incoerenti.

Bruno de Finetti, *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico*.

Per interpretare il documento

1. Quali sono le obiezioni che de Finetti muove alle altre concezioni della probabilità?
2. Enuclea la concezione soggettiva della probabilità.
3. Soggettività in matematica: esprimi un commento anche riferendoti alla tua personale esperienza scolastica.

Bruno de Finetti
(1906-1985)

Infinito

Fonte di paradossi, l'infinito è stato "domato" dai matematici negli ultimi secoli ma, com'è lecito aspettarsi, è ancora fonte di quesiti che animano la ricerca scientifica.

Nella piccola rassegna di documenti che proponiamo, vengono esaminate alcune delle riflessioni che l'infinito (l'infinitamente grande, l'infinitamente piccolo) ha fatto nascere. Si tratterà di ripensare a situazioni ed oggetti matematici a te noti da molto tempo, analizzandoli da nuovi punti di vista.

CORRIDORI, FRECCE, LEPRI, TARTARUGHE, …

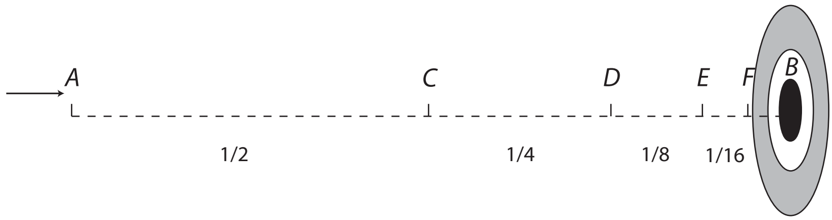
Riportiamo anzitutto un brano di Aristotele nel quale egli descrive il paradosso di Zenone riguardante il movimento, uno di quelli che "mettono di cattivo umore chi tenta di risolverli".

> [...] il cosiddetto Achille: questo intende provare che il più lento, correndo, non sarà mai sorpassato dal più veloce: infatti necessariamente l'inseguitore dovrebbe giungere prima là donde il fuggitivo è balzato in avanti; sicché necessariamente il più lento conserva una certa precedenza. Questo ragionamento è appunto quello della dicotomia,[8] ma ne differisce per il fatto che non divide in due anche la grandezza successivamente assunta. La conclusione di tale ragionamento è che il più lento non viene raggiunto; ma a questa conclusione si arriva mediante lo stesso procedimento fatto nella dicotomia (infatti la conclusione di entrambi i ragionamenti è che non si può giungere al limite, dal momento che la grandezza è divisa in un certo modo: ma nel secondo ragionamento si aggiunge il fatto che neppure l'eroe che è stato altamente celebrato come il più veloce, riesce a raggiungere nell'inseguimento la cosa più lenta); sicché necessariamente anche la soluzione sarà la medesima.
>
> Ma, in realtà, è falso ritenere che ciò che precede non viene raggiunto; ma tuttavia esso viene raggiunto, purché si ammetta che venga percorsa una distanza finita.
>
> Aristotele, *La fisica*, libro VI (Z), 9, 239 b, trad. di A. Russo, Edizioni Laterza, Bari, 1968.

[8] Si tratta del *paradosso della freccia*, vedi *Per interpretare il documento*.

Per interpretare il documento

1. Cerca su di un libro di filosofia il paradosso di Achille e della Tartaruga.
2. Il paradosso della *dicotomia* o della *freccia* si può illustrare come segue. Secondo Zenone, il movimento è legato all'apparenza e non può esistere come mostrano ragionamenti quali il seguente: per raggiungere il punto B, la freccia scagliata dalla posizione A deve prima raggiungere il punto C, a metà fra A e B, poi D, a metà fra C e B, poi E,...



   Individua nel documento quale argomentazione riporta Aristotele per confutare la tesi di Zenone. Perché ½+¼+⅛+... dà un risultato finito?
3. Senza farti mettere di cattivo umore, esprimi il tuo parere in merito a come tu risolveresti il paradosso di Zenone, eventualmente richiamando quanto dice Aristotele.

QUANDO IL TUTTO NON È MAGGIORE DELLA PARTE

Il paradosso aritmetico di Galileo e la proposizione di J. Farey aiuteranno ad interpretare la definizione di insieme infinito contenuta nel documento di Dedekind riportato più avanti. John Farey (1766-1826) era di professione geologo.

> […] Converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri,[9] poiché tanti sono quanti le lor radici, e radici son tutti i numeri; e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa […].
>
> Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638, p. 43.

Per interpretare il documento

1. Individua nel documento di Galileo quali passi suggeriscono che: a) ciascun numero naturale è radice quadrata di un altro numero naturale; b) **1**, 2, 3, **4**, 5, 6, 7,

---

[9] Numeri naturali.

8, **9**, 10, 11,…: i numeri in grassetto (i quadrati) sono meno di quelli che non sono in grassetto; c) da 1 a 100 ci sono più quadrati perfetti che da 101 a 200.

2. Completa la tabella seguente e realizza un grafico:

	Da 1 a 100	Da 101 a 200	Da 201 a 300	Da 301 a 400	...
I quadrati perfetti sono:					

[...] i numeri razionali (positivi) sono numerabili [...]

$1/1;\ 1/2;\ 2/1;\ 1/3;\ 2/2;\ 3/1;\ 1/4;\ 2/3;\ 3/2;\ 4/1;\ \ldots$

John Farey, *On a curious property of vulgar fractions*, "Philosophical Magazine", 47, 1816, pp. 385-86.

Per interpretare il documento

1. Ecco come 'contare' i numeri razionali positivi, cioè come mostrare che sono "numerabili":

$1/1$	$1/2$	$2/1$	$1/3$	$2/2$	$3/1$	$1/4$	$2/3$	$3/2$	$4/1$	$1/5$	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Prosegui nell'elenco dei numeri frazionari aggiungendo gli altri che hanno 6 come somma di numeratore e denominatore.
Elimina le 'ripetizioni' (i termini equivalenti: $1/1=2/2$, ... $1/2=2/4$, ...) e rifai la tabella.

2. Realizza un nuovo elenco per mostrare che i numeri interi (positivi, nulli, negativi) sono numerabili.
3. Realizza un nuovo elenco per mostrare che sono numerabili anche i numeri razionali (positivi, nulli, negativi).

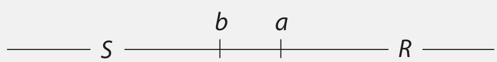
L'INFINITO, FONTE DI ALTRI PARADOSSI


Bernhard Bolzano (1781-1848)

Già gli esempi precedenti mostrano come per "domare" l'infinito sia necessario appianare situazioni apparentemente contraddittorie. Ai paradossi dell'infinito, Bolzano ha dedicato una sua opera: da essa è tratto il documento seguente.

Bernhard Bolzano (1781-1848) nacque e visse a Praga, fu teologo e matematico.

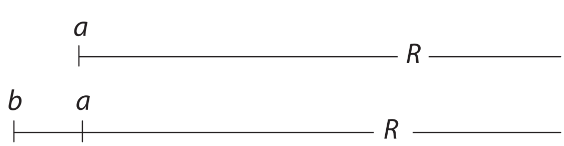
[...] non tutti gli insiemi infiniti possono essere considerati uguali tra loro *per quel che riguarda la loro molteplicità*; al contrario, molti di essi sono *più grandi* (o *più piccoli*) di un altro, nel senso di includere quest'altro come parte di se stessi (o viceversa di essere essi stessi solo una parte di quest'altro). Molti considerano anche questa affermazione come *paradossale*. In effetti, tutti coloro che definiscono l'infinito come qualcosa non suscettibile di ulteriore aumento debbono trovare non soltanto paradossale, ma addirittura *contraddittoria*, l'idea di un infinito che sia più grande di un altro. Noi però abbiamo testé visto che questa opinione poggia su un concetto di infinito che non è in accordo con l'uso linguistico del termine. La nostra definizione, che concorda non solo con l'uso linguistico, ma anche con gli scopi della scienza, non induce alcuno a ritenere contraddittorio, o anche solo sorprendente, che un insieme infinito sia maggiore di un altro. Per chi può non essere evidente, per esempio, che la lunghezza della retta che si prolunghi illimitatamente nella direzione *aR* è infinita? Che invece la retta *bR*, che dal punto *b* prosegue nella stessa direzione, sia da dirsi maggiore di *aR* della porzione *ba*? E la retta che prosegue illimitatamente tanto dalla parte *aR* quanto da quella *aS* sia da dirsi maggiore di una quantità che è essa stessa infinita? E così via.



Bernhard Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, nn. 19, 20.

Per interpretare il documento

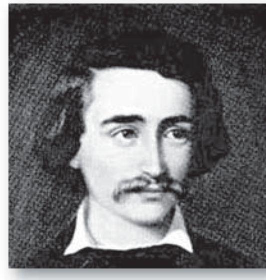
1. Bolzano suggerisce che, dato un insieme infinito, è possibile trovarne uno più grande: individua le argomentazioni da lui prodotte a sostegno di questa considerazione.
2. Una semiretta è un insieme infinito di punti. Prova a giustificare questa affermazione utilizzando la definizione di insieme infinito fornita da Dedekind (vedi oltre; pensa alla retta dei numeri reali e al punto x della semiretta aR fai corrispondere x-(a-b) sulla semiretta bR...).



3. Dunque per Dedekind la semiretta *bR* è "simile" alla semiretta *aR* e cioè non si può dire che contenga 'più punti'… Cantor (vedi oltre) ci spiegherà come trovare due insiemi veramente uno 'più grande' dell'altro. Rifletti allora sull'effettivo significato delle osservazioni di Bolzano…

SISTEMIAMO LE CONOSCENZE

L'esposizione sistematica dell'opera da cui è tratto il documento che segue indica che nella seconda parte del Diciannovesimo secolo si era giunti a padroneggiare molti dei concetti che creavano sconcerto nei decenni precedenti. Ripetiamo però che per la comprensione di questo è importante ricordare le situazioni esposte negli altri documenti.



J. W. Richard Dedekind (1831-1916)

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) nacque a Brunswick. Ha fornito basilari contributi all'analisi ed è annoverato fra i fondatori dell'algebra moderna.

§ 5. **Il *finito* e l'*infinito***

64. Definizione. Un sistema[10] S si dice *infinito* se è simile a una sua parte propria[11] [...]; nel caso contrario S si dice un sistema *finito*.

65. Teorema. Ogni sistema che consiste di un unico elemento è finito.
Dimostrazione. Infatti un tale sistema non possiede alcuna parte propria.

66. Teorema. Esistono sistemi infiniti.
Dimostrazione. Il mondo dei miei pensieri, cioè la totalità S di tutte le cose che possono essere oggetto del mio pensiero, è infinito. Difatti, se s indica un elemento di S, il pensiero s' che s può essere oggetto del mio pensiero è esso stesso un elemento di S. [...]

Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, n. 5.

Per interpretare il documento

1. Nella definizione di Dedekind, "simile" sta per "in corrispondenza biunivoca". Ad esempio, l'insieme dei numeri naturali è infinito perché è simile alla sua parte propria rappresentata dai quadrati perfetti. Utilizzando la spiegazione di Galileo, illustra questa corrispondenza biunivoca (dopo avere eventualmente ricercato sul libro di testo la definizione di corrispondenza biunivoca).
2. Indica le due parti di un insieme costituito da un unico elemento: hai trovato parti proprie?
3 *s*' è il pensiero che s può essere oggetto del mio pensiero,
s" è il pensiero che s' può essere oggetto del mio pensiero,
s"' è il pensiero che s" può essere oggetto del mio pensiero,
ecc.

[10] Insieme.
[11] Propria, che cioè non coincide con l'intero insieme né con l'insieme vuoto.

L'insieme {*s*, *s*', *s*'', *s*''',...} è infinito: costruisci una corrispondenza biunivoca che lo dimostri.

4. Una corrispondenza associa al numero naturale n il numero $2n+1$ (che non può che essere dispari…). Mostra che la corrispondenza così descritta, fra gli insiemi dei numeri naturali e dei numeri dispari, è biunivoca.
5. Costruisci una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e la sua parte propria rappresentata dai numeri pari.
6. Scegli altri insiemi infiniti, individua una loro parte propria tale da poter costruire una corrispondenza biunivoca.
7. Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e quello dei numeri naturali compresi fra 1 e 10?

§ 3

La continuità della retta

Ora è della massima importanza il fatto che esistono sulla retta L infiniti punti i quali non corrispondono a nessun numero razionale. Se un punto p corrisponde a un numero razionale a, allora la lunghezza op è notoriamente commensurabile con la unità di lunghezza prescelta nella costruzione, vale a dire esiste una terza lunghezza, la cosiddetta misura comune, di cui quelle due siano multiple intere. Ma già i Greci antichi sapevano e hanno dimostrato che esistono lunghezze incommensurabili con una data lunghezza unitaria, per es., la diagonale di un quadrato il cui lato si assuma per unità di lunghezza.[12] Se si porta una tale lunghezza sulla retta a partire dal punto o, allora il punto estremo che si ottiene non corrisponde a nessun numero razionale. Siccome inoltre si può dimostrare facilmente che esistono infinite lunghezze incommensurabili con la data lunghezza unitaria, possiamo affermare che la retta L è infinitamente più ricca di punti che non il campo razionale R di numeri.[13] Quindi i numeri razionali non bastano per poter seguire aritmeticamente tutti i fenomeni sulla retta, e appare perciò indispensabile raffinare sostanzialmente lo strumento R, creando numeri nuovi, di guisa che il campo dei numeri acquisiti sia altrettanto completo o, diciamo subito, altrettanto continuo, quanto lo è la retta.

[...]

§ 4

La creazione dei numeri irrazionali

[...] abbiamo rilevato che ogni numero razionale a determina una ripartizione[14] del sistema R in due classi A_1, A_2 di tale natura che ogni numero a_1 della prima classe A_1 è minore di ogni numero a_2 della seconda classe A_2; il numero a stesso è o il numero massimo della prima classe, o il numero minimo della seconda. Ora, noi chiameremo *sezione* e indicheremo ▶

[12] Vedi il documento sulla radice quadrata di 2, riportato nella parte dedicata alla geometria.

[13] Per indicare l'insieme dei numeri razionali, attualmente si preferisce usare il simbolo ***Q***.

[14] L'unione di A_1 e A_2 deve dare l'insieme ***Q***.

col simbolo (A_1, A_2) ogni ripartizione del sistema R in due classi A_1, A_2 che goda soltanto di questa proprietà caratteristica che ogni numero della classe A_1, sia minore di ogni numero della classe A_2. Possiamo dire allora che ogni numero razionale a determina una sezione o piuttosto due sezioni, le quali però noi non considereremo come essenzialmente distinte. Questa sezione gode *inoltre* della proprietà ulteriore, che o tra i numeri della prima classe esiste un numero massimo, o tra i numeri della seconda classe esiste un numero minimo. E inversamente, se una sezione gode di quest'ultima proprietà, allora essa è prodotta da questo numero razionale massimo o minimo.

Ma è facile provare l'esistenza di infinite sezioni non prodotte da nessun numero razionale. [...]

Nel fatto che non tutte le sezioni sono prodotte da numeri razionali consiste l'incompletezza o la discontinuità del campo R di tutti i numeri razionali.

Orbene, ogni volta che è data una sezione (A_1, A_2) che non sia prodotta da nessun numero razionale, noi *creiamo* un nuovo numero, un numero *irrazionale* α, che noi consideriamo come completamente definito da questa sezione; noi diremo che il numero α corrisponde a questa sezione e che esso la produce. Adesso dunque ad ogni sezione corrisponde uno ed uno solo numero determinato, razionale o irrazionale, e noi considereremo come distinti due numeri, quando e solo quando essi corrispondono a due sezioni sostanzialmente distinte.

Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

Per interpretare il documento

1. Come si può determinare una misura che sia comune ad un numero razionale e all'unità? Esempio: una misura comune a ¾ e 1 è ¼ perché (completa) ¼ · $\boxed{}$ = ¾ e ¼ · $\boxed{}$ = 1; "misura comune" potrebbe essere anche ⅛ perché ...
2. Scegli coppie di numeri razionali e determina una, come dice Dedekind, "misura comune" ai due numeri.
3. "[...] esistono infinite lunghezze incommensurabili con la data lunghezza unitaria": come $\sqrt{n}$, se $n \in \boldsymbol{N}$ e $n \neq m^2\ \forall m \in \boldsymbol{N}$. Interpreta quest'ultima scrittura simbolica utilizzando opportuni esempi numerici.
4. $\sqrt{2}$ è incommensurabile con l'unità e così pure π: anche $k \cdot \sqrt{2}$ con k intero non nullo lo è. Scrivi altri esempi di numeri irrazionali, ricorrendo anche ad una ricerca sul libro di testo o su altre fonti.
5. Cos'è una "sezione" nell'insieme dei numeri razionali?
6. In che senso un numero razionale determina due "sezioni" nell'insieme dei numeri razionali che però non vanno considerate "essenzialmente distinte"?
7. Considera i numeri razionali maggiori di $\sqrt{2}$ ed i numeri razionali minori di $\sqrt{2}$: rifletti se il numero irrazionale $\sqrt{2}$ produce una "sezione".
8. Riferendoti al documento, indica se un numero irrazionale può determinare due "sezioni" non "essenzialmente distinte".

Il paradiso di Cantor

Georg Cantor (1845-1918), nato a Pietroburgo da padre tedesco, è stato il paladino dell'*infinito attuale*. Ci ha abituati a pensare all'infinito come a un numero. Ci ha insegnato che non c'è una sola specie di infinito ma che - incredibile! - un infinito può essere più grande di un altro. Per seguirlo nei suoi ragionamenti bisogna svincolarsi della nostra ristretta realtà terrena... ma forse neanche tanto.

Georg Cantor
(1845-1918)

I NUMERI REALI SONO DI PIÙ DEI NATURALI

Ogni numero *reale* ha una rappresentazione decimale: periodica (incluso il periodo 0) per i numeri razionali, non periodica per gli *irrazionali*; Ad esempio: 0,200000000…; 9,0312121212…; 1,414213562…; 3,141592653... (i puntini ci indicano che si tratta di infinite cifre). Cantor si sofferma su "elementi" che, come i numeri reali, dipendono da infinite "coordinate".

(D) Siano m e w due caratteri qualsiasi distinti; consideriamo allora un aggregato di elementi $E=(x_1, x_2, ..., xv, ...)$, che dipendono da infinite coordinate $x_1, x_2, ..., xv, ...$, dove ciascuna di queste coordinate è m o w. Sia M la totalità di tutti gli elementi E.

Sono elementi di M - per esempio - i tre seguenti:

$E'=(m, m, m, ...)$

$E''=(w, w, w, ...)$

$E'''=(m, w, m, w, ...)$.

Asserisco ora che una tale varietà[15] non ha la potenza della serie 1, 2, 3, ... v, ...

Ciò risulta dalla seguente proposizione:
sia $E_1, E_2, ... E_v, ...$ una qualsiasi serie semplicemente infinita[16] di elementi della varietà M; allora esiste sempre un elemento E_0 di M, che non coincide con nessun E_v.

Per dimostrarlo si ponga

▶

[15] *M*.
[16] Numerabile, infinita come sono infiniti i numeri naturali.

> ($E_1=(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots)$
> $E_2=(a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots)$
> ...
> $E_\mu=(a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots)$
> ...
>
> Qui gli $a_{\mu,\nu}$ sono in maniera determinata *m* o *w*. Si definisca ora una serie $b_1, b_2, b_\nu, \ldots$, tale che b_ν sia ancora uguale ad *m* o *w* e differisca da $a_{\nu,\nu}$. Allora se $a_{\nu,\nu}=m$, $b_\nu=w$, se $a_{\nu,\nu}=w$, $b_\nu=m$.
>
> Consideriamo allora l'elemento
>
> $E_0=(b_1, b_2, b_3, \ldots)$
>
> di *M*; si vede senz'altro che l'uguaglianza $E_0=E_\mu$ non può essere soddisfatta per nessun valore positivo di μ, perché altrimenti per il μ considerato e per tutti i valori interi di ν $b_\nu=a_{\mu,\nu}$. Allora, in particolare, $b_\mu=a_{\mu,\mu}$, che è escluso dalla definizione di b_ν. Da questa proposizione segue immediatamente che la totalità di tutti gli elementi di *M* non si lascia portare nella forma di una serie $E_1, E_2, \ldots E_\nu, \ldots$, perché altrimenti si presenterebbe la contraddizione che una cosa E_0 sarebbe sia elemento di *M* che non elemento di *M*.[17]
>
> Questa dimostrazione appare degna di nota [...]
>
> Georg Cantor, *Über eine elementare Frage Mannigh.*

Per interpretare il documento

1. Per ogni punto della colonna di sinistra, nei casi in cui compaiono simboli letterali scrivi nella colonna centrale degli esempi di numeri in base due ottenuti sostituendo i valori 0 o 1; scrivi a destra la corrispondente citazione che ricavi dal documento di Cantor.

- Esprimiamo ciascun numero reale (non solo i numeri interi o i decimali periodici...) in base due, cioè usando solo le cifre 0 e 1.[18]		
- Sono numeri reali*, ad esempio: 0,0000... 1,11111... 0,101010101...		
- L'insieme dei numeri reali* comprende tutti e soli i numeri scritti nel modo or ora illustrato.		

▶

[17] E_0 sarebbe elemento di M perché scritto con i caratteri *w* e *m*; non sarebbe elemento di M se si suppone (per assurdo) che M si lasci scrivere "nella forma di una serie $E_1, E_2, \ldots E_\nu, \ldots$"

[18] Ci limiteremo a considerare numeri reali con parte intera uguale a 0 oppure a 1 e perciò in questa attività accanto al termine "reali" metteremo "*".

- Prendiamo $r_1, r_2, r_3, r_4, ..., r_i, ...$ numeri reali* (numerati con i numeri naturali). Allora troverò sempre un numero reale r diverso da ciascuno degli r_i: $r_1=a_{11}, a_{12}\ a_{13} ... a_{1j} ...$ $r_2=a_{21}, a_{22}\ a_{22} ... a_{2j} ...$ ... $r_i=a_{i1}, a_{i2}\ a_{i2} ... a_{ij} ...$ ... dove gli a_{ij} sono o 0 o 1. - Costruisco r in questo modo: se $r=b_1, b_2\ b_3 ... b_i ...$ scelgo $b_1 \neq a_{11}$ (quindi se $a_{11}=0$, scelgo $b_1=1$ o viceversa); scelgo $b_2 \neq a_{22}$; $b_3 \neq a_{33}$ e così via. - Se r coincidesse con uno degli r_i, diciamo ad esempio con r_3, allora, in particolare, $a_{3\,3}$ sarebbe uguale a b_3 ma ciò non è possibile per come abbiamo scelto b_3. - Se pensiamo alla "totalità di tutti" i numeri reali* e rifacciamo il ragionamento, capiamo che essi non si possono scrivere in un elenco $r_1, r_2, r_3, r_4, ..., r_i, ...$		

2. Qual è la parte intera dei numeri reali da 0 a 1 escluso (qual è, cioè, la loro prima cifra)? Quindi, la dimostrazione riportata nella prima colonna della tabella in realtà si riferiva ai numeri compresi in quale intervallo reale?
3. Giustifica l'ovvia conclusione che i numeri reali (proprio tutti gli elementi dell'insieme **R**) non sono numerabili.

CANTOR, SECONDO HILBERT

A pochi anni dalla morte di Cantor, David Hilbert (1862-1943) pubblica un articolo del quale riportiamo una parte in cui illustra alcune implicazioni del nuovo approccio all'infinito introdotto da Cantor. Si può così comprendere come questi abbia fornito un contributo al pensiero matematico la cui importanza va ben oltre i confini della disciplina.

David Hilbert
(1862-1943)

Delineeremo in breve la nuova concezione dell'infinito di Cantor [...] in analisi abbiamo a che fare solo con gli infinitamente piccoli e con gli infinitamente grandi - nel concetto di limite - come qualcosa di nascente, in divenire, in costruzione cioè, come si dice, con gli *infiniti potenziali*. Ma l'infinito non è questo. Lo capiamo quando, ad esempio, consideriamo la totalità dei numeri 1, 2, 3, 4,... come una unità determinata o vediamo i punti di un segmento come una totalità compiuta di oggetti. Questo tipo di infinito viene identificato come *infinito attuale*.

[...]

Cantor descrisse in modo esauriente il concetto di infinito attuale. Prendiamo i due esempi di infinito ricordati poc'anzi:

1. 1, 2, 3, 4, ...;
2. I punti del segmento da 0 a 1 vale a dire la totalità dei numeri reali da 0 e 1.

Considerati dal punto di vista della numerosità forniscono risultati un tempo ritenuti sorprendenti, che però oggi ogni matematico accetta. Consideriamo l'insieme di tutti i numeri razionali, quindi di tutte le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, …, $\frac{3}{7}$, … e si nota che questo insieme non è più grande dell'insieme dei numeri interi: si è soliti dire che i numeri razionali possono essere numerati o che sono numerabili.

[...]

Con il nostro secondo esempio si verifica una situazione analoga; contro ogni aspettativa, anche l'insieme di tutti i punti di un quadrato o di un cubo, dal punto di vista della numerosità, non è più grande dell'insieme dei punti da 0 a 1 [...]. Ad un primo esame sembra che dal punto di vista della numerosità ci sia un solo tipo di infinito. Invece no, gli insiemi dei nostri esempi 1. e 2. non sono, come si dice, «equipotenti»; inoltre l'insieme 2. non è numerabile ma è più grande dell'insieme 1. Qui sta la peculiarità del cambiamento introdotto da Cantor nell'edificazione del pensiero [Ideenbildungen]. I punti del segmento non possono essere numerati con 1, 2, 3, ...! Se accettiamo l'infinito attuale, non ci limitiamo a questo solito tipo di numerazione [...].

D. Hilbert, *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen, 1926, n. 95, pp.167-8-9.

Per interpretare il documento

1. Individua nel testo un esempio di "*infinito potenziale*" e uno di "*infinito attuale*".
2. Individua nel testo due coppie di insiemi "equipotenti".
3. "Ad un primo esame sembra che dal punto di vista della numerosità ci sia un solo tipo di infinito. Invece no, gli insiemi dei nostri esempi 1. e 2. non sono, come si dice, «equipotenti»", afferma Hilbert. Confronta questa citazione con il precedente documento tratto dall'opera di Cantor.

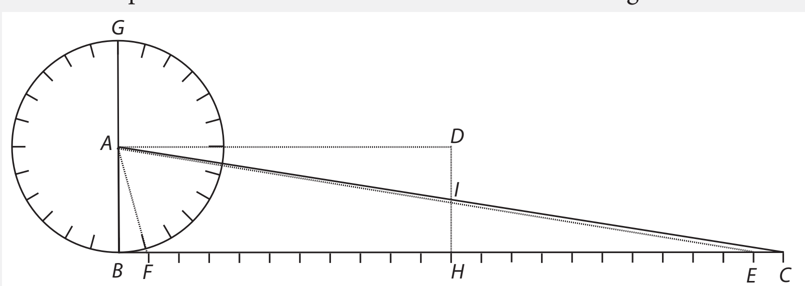
Infinitesimi prima di Newton

Gli storici ritengono che le premesse al calcolo differenziale di Leibniz e Newton siano da ricercare nell'opera di Archimede (metodo di *esustione*) e nei lavori di vari matematici del Cinque-Seicento come Stevin, Kepler, Galileo, Cavalieri, Torricelli…

IL CERCHIO

Johann Kepler (Keplero) (1571-1630) oltre che per i suoi studi di astronomia, è noto per la sua opera di matematico. Si occupò dei solidi di rotazione giungendo, con il proprio metodo, sia a ridimostrare proposizioni note fin dall'antichità che a fornire risultati originali. Ebbe un intenso scambio di lettere con Galileo.

(A) La circonferenza del cerchio BG ha tante parti quanti sono i suoi punti, cioè infiniti; ognuno di essi può essere considerato come la base di un triangolo isoscele di lati AB,



in modo che nell'area del cerchio c'è un numero infinito di triangoli, tutti col vertice nel centro A. Distendiamo ora la circonferenza del cerchio BG sulla linea BC uguale ad essa e immaginiamo quindi che le basi di questi infiniti triangoli o settori circolari siano poste sulla retta BC una dopo l'altra. Sia BF una di queste basi e sia CE un'altra uguale ad essa e congiungiamo i punti F, E, C con A. Dal momento che ci sono tanti triangoli ABF, AEC sulla linea BC quanti sono i settori nell'area del cerchio, che le basi BF, EC sono uguali e che tutti i triangoli hanno l'altezza BA in comune (che è anche quella dei settori), i triangoli EAC, BAF saranno equivalenti tra loro e equivalenti a uno dei settori del cerchio. Siccome tutti hanno la base su BC, il triangolo BAC, che consiste di tutti quei

▶

triangoli, sarà uguale a tutti i settori del cerchio e quindi uguale all'area del cerchio che consiste di essi. Questo è equivalente alla conclusione [...] di Archimede.

J. Kepler, *Nova stereometria doliorum*, teorema II.

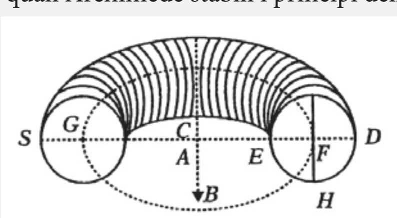
Per interpretare il documento

1. Leggi le affermazioni seguenti:
   a. un cerchio può essere diviso in infiniti triangoli isosceli;
   b. trasformiamo il cerchio in un triangolo;
   c. i triangoli che hanno le basi sulla retta BC (da ABF fino ad AEC) sono equivalenti perché hanno le basi uguali e così pure le altezze.

   Cerca le frasi di Kepler che illustrano ciascuna delle affermazioni precedenti.
2. Ricava dal documento una regola per calcolare l'area del cerchio, immaginando di conoscere la lunghezza del raggio (dopo averci pensato, se ti serve puoi arrivare alla risposta anche leggendo la domanda seguente).
3. Se non l'hai fatto al punto precedente, ecco come trovare l'area del cerchio, se il suo raggio è *r*, seguendo il ragionamento di Kepler:
   a. esprimi la lunghezza di BC usando il simbolismo letterale e ricordando che la lunghezza della circonferenza si trova moltiplicando per π il doppio del raggio (diametro);
   b. esprimi l'area del triangolo ABC;
   c. l'area del cerchio è uguale a quella del triangolo...

IL TORO

(B) Ogni anello con una sezione circolare o ellittica è uguale a un cilindro la cui altezza è uguale alla lunghezza della circonferenza descritta dal centro della figura ruotante e la cui base è uguale alla sezione dell'anello. Intendo con sezione quella che forma un piano passante per il centro dello spazio anulare e perpendicolare alla superficie dell'anello. La dimostrazione di questo teorema [...] può essere ottenuta con gli stessi elementi con i quali Archimede stabilì i principi della stereometria.



Infatti, se tagliamo l'intero anello GCD dal suo centro A in un numero infinito di dischi ED sottilissimi, ognuno di essi sarà tanto più sottile verso il cento A quanto la sua parte E è vicina più ad A di quanto non lo sia F e la retta per F perpendicolare ad ED nel piano secante,

▶

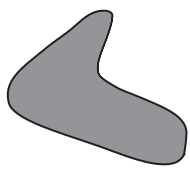
e sarà tanto più spesso verso l'esterno D; invero nei detti estremi, cioè D e E, considerati insieme, assume il doppio dello spessore, che ha nel mezzo dei dischi.

Questo ragionamento non sarebbe valido se le parti dei dischi ED al di qua e al di là della circonferenza FG e delle rette perpendicolari per F e G non fossero uguali e ugualmente poste.

Johann Kepler, *Nova stereometria doliorum*, teorema XVII.

Per interpretare il documento

1. Dice Kepler che ogni "anello" (modernamente lo chiamiamo "toro") è uguale (sarebbe meglio dire "equivalente") ad un cilindro... Descrivi questo cilindro utilizzando la spiegazione di Kepler.
2. Descrivi come vengono ottenuti i "dischi sottilissimi" che formano il toro.
3. Quali caratteristiche dei "dischi" vengono messe in evidenza da Kepler?
4. Un toro nel quale i "dischi" avessero la forma che vedi nella figura seguente sarebbe equivalente al cilindro ottenuto come nella descrizione di Kepler? Rispondi con riferimento all'osservazione contenuta nelle ultime righe del documento.



GLI INDIVISIBILI

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), ecclesiastico milanese, fu allievo di Galileo. Fra l'altro, introdusse per primo i logaritmi in Italia. Nel 1635 venne pubblicata la sua *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* nella quale è spiegato il metodo degli indivisibili che l'autore racconta di aver ricavato dallo studio sia dei classici che di alcuni matematici a lui contemporanei, come Kepler.

Bonaventura Cavalieri
(1598-1647)

Meditando dunque un giorno sulla generazione dei solidi, che sono generati da una rivoluzione intorno a un asse, e confrontando il rapporto delle figure piane generatrici con quello dei solidi generati, mi stupivo in verità moltissimo del fatto che le figure generate tralignassero a tal punto dalla condizione dei propri genitori, da mostrar di seguire un rapporto completamente diverso dal loro. Per esempio un cilindro, che sia ottenuto insieme ad un cono, della stessa base, per rotazione attorno a un medesimo asse, è il

▶

triplo di esso, mentre tuttavia nasce per rivoluzione da un parallelogramma doppio del triangolo che genera il detto cono. [...] Si può trovare la stessa verità anche in figure piane generate dalla rotazione di segmenti rettilinei intorno a un punto, quali sono i circoli. Si suppongano infatti dati parecchi circoli concentrici, aventi i raggi proporzionali ai numeri interi successivi a partire dall'unità; i circoli stessi non confermeranno la medesima proporzione dei raggi, ma staranno tra di loro come i quadrati dei raggi. [...] Ma, dopo avere considerato la cosa un poco più profondamente, pervenni finalmente a questa opinione, e precisamente che per la nostra faccenda dovessero prendersi piani non intersecantisi tra di loro, ma paralleli. In questo modo, infatti, investigati moltissimi casi, in tutti trovai perfetta corrispondenza tanto tra il rapporto dei corpi e quello delle loro sezioni piane, quanto tra il rapporto dei piani e quello delle loro linee [...]. Avendo dunque considerato il cilindro e il cono già detti, secati non più per l'asse, ma parallelamente alla base, trovai che hanno rapporto uguale a quello del cilindro al cono quei [piani] che chiamo nel libro II «tutti i piani» del cono, con riferimento la base comune (e precisamente l'insieme dei circoli che, all'interno del cono e del cilindro, si possono immaginare in certo qual modo come tracce lasciate dal piano che scorre da una base alla base opposta sempre ad essa parallelamente). Stimai perciò metodo ottimo per investigare la misura delle figure [quello di] indagare prima i rapporti delle linee in luogo di quello dei piani, e i rapporti dei piani in luogo di quello dei solidi, per procurarmi [poi] subito la misura delle figure stesse.

Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus quadam ratione promota*, prefazione.

Teorema I. Proposizione I

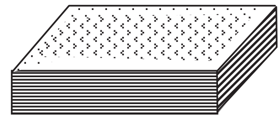
Figure piane quali si vogliano, collocate tra le medesime parallele, nelle quali - condotte linee rette qualunque equidistanti alle parallele in questione - le porzioni intercette di una qualsivoglia di dette rette sono uguali, sono del pari uguali tra di loro. E figure solide quali si vogliano collocate tra i medesimi piani paralleli, nelle quali - condotti piani qualunque equidistanti a quei piani paralleli - le figure piane generate nei solidi stessi da uno qualsivoglia dei piani condotti sono uguali, saranno del pari uguali tra di loro. [...]

Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus quadam ratione promota*, libro VII.

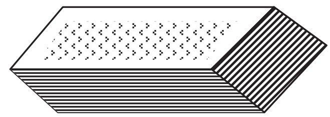
Per interpretare il documento

1. Sintetizza l'osservazione di Cavalieri contenuta nella prefazione, riferita a due solidi di rotazione e riguardante il rapporto fra le figure piane che li generano e quello fra i solidi medesimi.
2. Se a è il rapporto fra i raggi di due cerchi, qual è il rapporto fra le loro aree?
3. L'ultimo documento (tratto dal libro VII) richiama il contenuto della parte conclusiva del documento precedente (tratto dalla prefazione) essenzialmente per quanto riguarda l'idea di utilizzare "piani non intersecantisi tra di loro, ma paralleli" per poi confrontare figure solide... rifletti su questo legame fra le due parti del documento. Riferendosi invece alle figura piane ("piani"), cosa afferma Cavalieri nella prefazione a proposito del "rapporto dei piani e quello delle loro linee"?

4. Un mazzo di carte può essere ‘ben impilato’, così…:



…oppure no, ma il volume si mantiene costante…:



Stabilisci un collegamento fra questo semplice ‘esperimento’ e il contenuto del **“Teorema I. Proposizione I”**.

5. Associa alle figure le parti corrispondenti dell’ultimo documento di Cavalieri (oggi noto anche come *Principio di Cavalieri*).

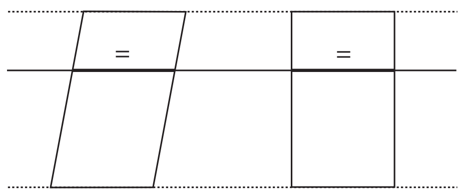


Figura 1

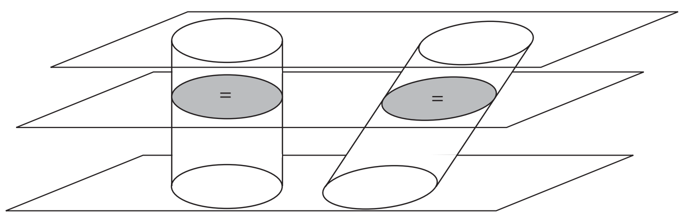
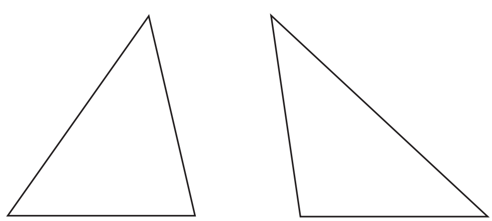
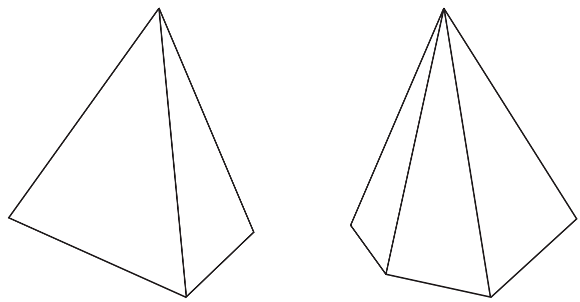


Figura 2

6. Utilizzando l’idea contenuta nel **“Teorema I. Proposizione I”**, spiega perché i due triangoli seguenti (aventi basi uguali ed altezze uguali) sono “uguali” (equivalenti).



7. In base al Principio di Cavalieri, come è possibile spiegare perché piramidi aventi basi equivalenti ed altezze uguali sono equivalenti? Cosa è necessario sapere a proposito delle “figure piane” (sezioni)?



8. In base al Principio di Cavalieri, spiega perché:
   a. prismi aventi equivalenti le basi ed uguali le altezze sono equivalenti;
   b. un cilindro ed un prisma aventi equivalenti le basi ed uguali le altezze sono equivalenti;
   c. un cono e una piramide aventi equivalenti le basi ed uguali le altezze sono equivalenti.
9. Aiutandoti con il disegno, mostra esempi di coppie di figure piane equivalenti, alle quali però non si può applicare il Principio di Cavalieri.
10. Ripeti l’esercizio precedente con figure solide.

Limiti, derivate, integrali (scusate se è poco)

Fra i temi della matematica moderna, quello del calcolo infinitesimale è forse il più fecondo. Straordinaria è la portata delle sue applicazioni: in fisica, statistica, tecnologia…

ISAAC NEWTON

Assieme a Leibniz, Isaac Newton (1642-1727) è considerato il fondatore del calcolo infinitesimale. In effetti i due matematici (chiamiamoli così, ma non dimentichiamo che il loro oggetto di studio è andato ben oltre la matematica) sono stati protagonisti di una vicenda straordinaria: sono arrivati alle stesse conoscenze pur operando l'uno in Germania, l'altro in Inghilterra. Viene da dire che allora quello che loro hanno scritto 'era nell'aria' e non hanno fatto altro che organizzarlo e renderlo coerente.

Isaac Newton
(1642-1727)

Considero in questo lavoro le grandezze matematiche non come costituite di parti piccole a piacere ma come generate da un moto continuo.

Le linee vengono descritte non come addizioni di parti, ma per moto continuo di punti; le superfici per moto continuo di linee; i solidi per moto di superfici; gli angoli per rotazione dei loro lati; i tempi per flusso continuo e così in altri casi analoghi.

Queste generazioni hanno veramente luogo in natura, e si osservano ogni giorno nel movimento dei corpi. In questo modo gli antichi indicarono le generazioni del rettangolo come descritto da un segmento mobile come descritto da un segmento fisso.

Considerando dunque che quantità generate, crescendo in tempi uguali, riescono maggiori o minori secondo la velocità maggiore o minore con cui crescono, ho cercato un metodo per determinare le grandezze dalle velocità dei moti o degli incrementi con cui si generano; chiamando *flussioni*[19] queste velocità di accrescimento, e *fluenti*[20] le quantità generate, giunsi a poco a poco negli anni 1665 e 1666 al metodo delle flussioni del quale qui faccio uso nella quadratura delle curve.[21]

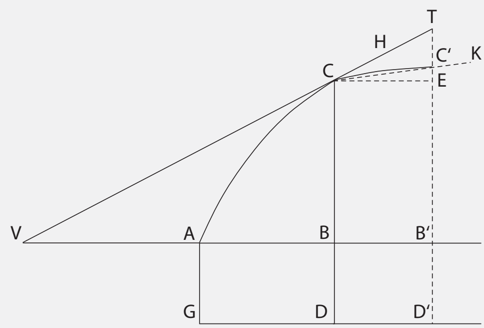
▶

---

19 Derivate.
20 Funzioni.
21 Con "quadratura", modernamente si intende la ricerca dell'area compresa fra una curva e una retta.

Le flussioni si possono rappresentare con approssimazione arbitrariamente grande come gli incrementi delle fluenti, generati durante intervalli uguali di tempo piccoli a piacere; in modo più preciso sono direttamente proporzionali agli incrementi istantanei delle fluenti, e si possono poi rappresentare mediante linee qualsiasi ad esse proporzionali.

Così, per esempio, l'area del triangolo mistilineo ABC e l'area del rettangolo ABDG, siano generate dal moto uniforme delle ordinate BC e BD che avanzano sulla base AB; allora le flussioni di queste aree staranno fra loro come le ordinate BC e BD che le generano; perché quelle ordinate stanno fra loro come gli incrementi istantanei delle aree.



Avanzi l'ordinata BC dalla sua posizione ad un'altra qualsiasi B'C'.

Si completi il parallelogramma BCEB' e si conduca la retta VT tangente alla curva in C, che incontri i prolungamenti di B'C' e BA rispettivamente nei punti T e V. E gli incrementi ora ottenuti dell'ascissa AB, dell'ordinata BC e della curva ACC' saranno rispettivamente BB', EC', e l'arco CC'. E direttamente proporzionali a questi incrementi istantanei sono i lati del triangolo CET; e perciò le flussioni delle stesse AB, BC e AC sono rispettivamente proporzionali ai lati di quel triangolo CET: CE, ET, TC, e si possono rappresentare mediante quegli stessi lati, o ciò che fa lo stesso mediante i lati del triangolo simile al primo VBC.

Si ricade negli stessi risultati se si trovano le flussioni applicando il metodo delle ultime ragioni[22] di grandezze evanescenti.[23] Si conduca la retta CC' e la si prolunghi sino a un punto K. Ritorni l'ordinata B'C' nella sua posizione primitiva BC e venendo a coincidere i punti C e C', la retta CK coinciderà con la tangente CH, e il triangolo evanescente CEC' nell'ultima sua forma diventerà simile al triangolo CET, ed i suoi lati evanescenti CE, C'E, C'C, saranno infine proporzionali ai lati dell'altro triangolo CET: CE, ET, TC, e perciò saranno proporzionali a tali segmenti anche le flussioni delle linee AB, BC, CA. Se i punti C e C' distano di un intervallo comunque piccolo, la retta CK divergerà di un piccolo angolo dalla tangente CH. Perché la retta CK coincida con la tangente CH e si trovino le ragioni ultime delle linee CE, EC', C'C, devono sovrapporsi e coincidere i punti C e C'. Gli errori, anche minimi, in matematica non sono da trascurarsi.

Isaac Newton, *Tractatus de quadratura curvarum, Introduzione*, 1704.

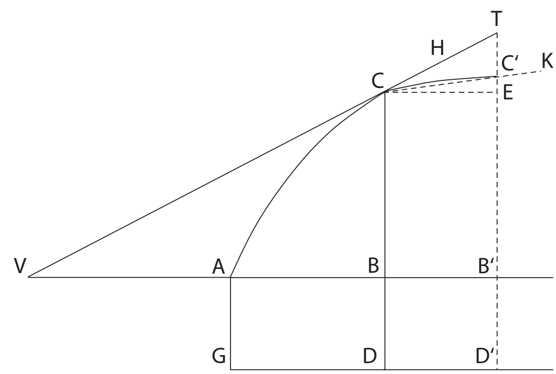
Per interpretare il documento

1. Rivedi nel documento sugli indivisibili in che modo Bonaventura Cavalieri considera, al contrario di Newton, le grandezze matematiche come costituite di parti piccole a piacere.

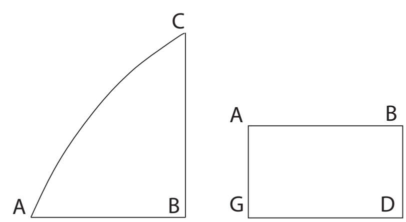
[22] "Ragione" sta per "rapporto o quoziente".

[23] "Ultime ragioni di grandezze evanescenti", cioè "limiti di rapporti di funzioni che tendono a zero".

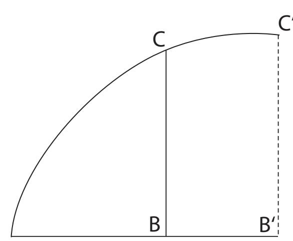
2. Vediamo qui di seguito come Newton utilizza la figura presente nel testo e riprodotta qui:



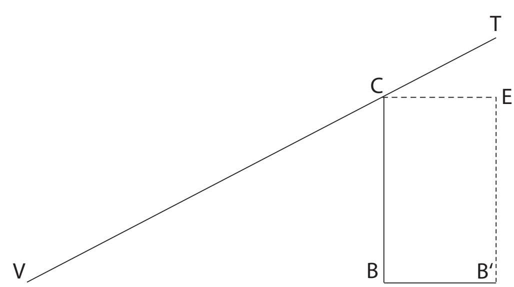
"l'area del triangolo mistilineo ABC e l'area del rettangolo ABDG, siano generate dal moto uniforme delle ordinate BC e BD che avanzano sulla base AB."



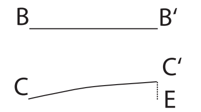
"Avanzi l'ordinata BC dalla sua posizione ad un'altra qualsiasi B'C' ".



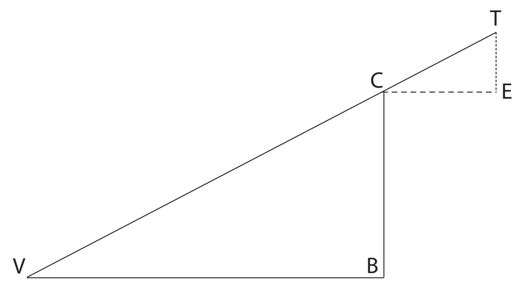
"Si completi il parallelogramma BCEB' e si conduca la retta VT tangente alla curva in C [...]".



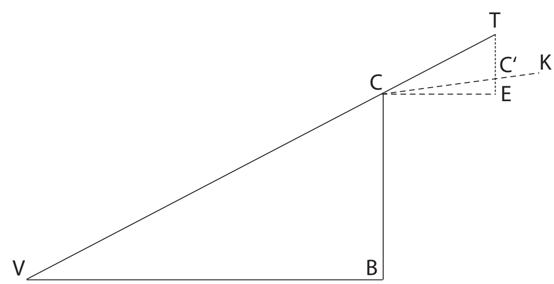
"gli incrementi ora ottenuti dell'ascissa AB, dell'ordinata BC e della curva ACC' saranno rispettivamente BB', EC', e l'arco CC' [...]"



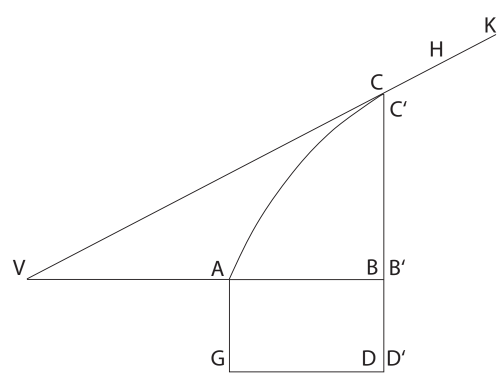
"E direttamente proporzionali a questi incrementi istantanei sono i lati del triangolo CET; e perciò le flussioni delle stesse AB, BC e AC sono rispettivamente proporzionali ai lati di quel triangolo CET: CE, ET, TC, e si possono rappresentare mediante quegli stessi lati, o ciò che fa lo stesso mediante i lati del triangolo simile al primo VBC".



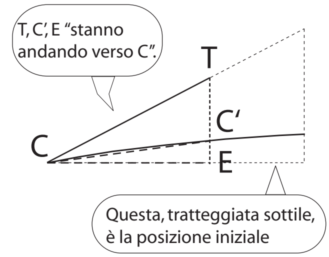
"Si conduca la retta CC' e la si prolunghi sino a un punto K".



"Ritorni l'ordinata B'C' nella sua posizione primitiva BC e venendo a coincidere i punti C e C', la retta CK coinciderà con la tangente CH [...]"

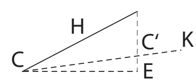


"e il triangolo evanescente CEC' nell'ultima sua forma diventerà simile al triangolo CET, ed i suoi lati evanescenti CE, EC', C'C, saranno infine proporzionali ai lati dell'altro triangolo CET: CE, ET, TC".



"e perciò saranno proporzionali a tali segmenti anche le flussioni delle linee AB, BC, CA".[24]

"Se i punti C e C' distano di un intervallo comunque piccolo, la retta CK divergerà di un piccolo angolo dalla tangente CH. Perché la retta CK coincida con la tangente CH e si trovino le ragioni ultime delle linee CE, EC', C'C, devono sovrapporsi e coincidere i punti C e C' ".



3. Integrale - derivata: ricerca sul libro di testo la formulazione moderna di questo legame.
4. Rivedi il brano ed in esso evidenzia i passi nei quali Newton affronta i seguenti temi:
   a. derivata dell'area sottesa al grafico della funzione e funzione stessa;
   b. derivata in un punto e pendenza del grafico;
   c. "ultime ragioni di grandezze evanescenti" e metodo delle "flussioni".

Si obietta che non esiste l'ultimo rapporto di quantità evanescenti,[25] in quanto esso, prima che le quantità siano svanite, non è l'ultimo e allorché sono svanite non c'è affatto. Ma con lo stesso ragionamento si può giustamente sostenere che non esiste la velocità ultima di un corpo che giunga in un certo luogo, dove il moto finisce. La velocità, infatti, prima che un corpo giunga nel luogo non è l'ultima, e quando vi giunge non c'è. La risposta è facile: per velocità ultima si intende quella con la quale il corpo si muove, non prima di giungere al luogo ultimo nel quale il moto cessa, né dopo, ma proprio nel momento in cui vi giunge; ossia quella stessa velocità con la quale il corpo giunge al luogo ultimo e con la quale il moto cessa. Similmente, per ultime ragioni delle quantità evanescenti si deve intendere il rapporto delle quantità non prima di diventare nulle e non dopo, ma quello col quale si annullano. ▶

[24] Newton ripete quanto scritto sopra e illustrato nella quartultima delle figure precedenti.
[25] Vedi nota precedente: "ultime ragioni di quantità evanescenti" equivale a "limiti di rapporti di funzioni che tendono a zero".

[...]

Le ultime ragioni con cui quelle quantità si annullano non sono in realtà le ragioni delle ultime quantità, ma i limiti ai quali le ragioni delle quantità decrescenti si avvicinano sempre, illimitatamente, e ai quali si possono avvicinare per più di qualunque differenza data, e che, però, non possono mai superare, né toccare prima che le quantità siano diminuite all'infinito. [...] Nel seguito, dunque, allorché per essere capito facilmente, menzionerò le quantità minime o evanescenti o ultime, non bisognerà supporre che si tratti di quantità di determinata grandezza, ma bisognerà pensare sempre a quantità che diminuiscono illimitatamente.

Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica, libro I, sezione I,.*

Per interpretare il documento

1. Ripercorri quest'ultimo documento di Newton ricercando il significato delle seguenti espressioni (parole chiave): "quantità decrescenti", "ultimo rapporto", "velocità", "luogo ultimo", "limiti".
2. Esamina il seguente esempio di rapporto di funzioni che tendono a zero, soffermati sulla tabella di dati ed esamina:
   a. le "quantità decrescenti";
   b. il limite della "ragione [o rapporto]";
   c. i valori delle "quantità decrescenti" quando la "differenza" fra il limite e la "ragione" è minore di 10^{-3}.

x	Log x	x-1	Log x / (x-1)	
1,5	0,17609126	0,5	0,352182518	1
1,25	0,09691001	0,25	0,387640052	2
1,125	0,05115252	0,125	0,40922018	3
1,0625	0,02632894	0,0625	0,42126302	4
1,03125	0,01336396	0,03125	0,42764677	5
1,015625	0,00673338	0,015625	0,43093649	6
1,0078125	0,00337974	0,0078125	0,432606803	7
1,00390625	0,00169316	0,00390625	0,433448453	8
1,001953125	0,0008474	0,00195313	0,433870918	9
1,000976563	0,00042391	0,00097656	0,434082562	10
1,000488281	0,00021201	0,00048828	0,434188487	11
1,000244141	0,00010602	0,00024414	0,434241476	12
1,00012207	5,3011E-05	0,00012207	0,434267977	13
1,000061035	2,6506E-05	6,1035E-05	0,434281229	14
1,000030518	1,3253E-05	3,0518E-05	0,434287855	15
1,000015259	6,6268E-06	1,5259E-05	0,434291169	16
1,000007629	3,3134E-06	7,6294E-06	0,434292825	17
1,000003815	1,6567E-06	3,8147E-06	0,434293654	18
1,000001907	8,2835E-07	1,9073E-06	0,434294068	19
1,000000954	4,1418E-07	9,5367E-07	0,434294275	20
1,000000477	2,0709E-07	4,7684E-07	0,434294378	21
1,000000238	1,0354E-07	2,3842E-07	0,43429443	22
1,000000119	5,1772E-08	1,1921E-07	0,434294456	23
1,00000006	2,5886E-08	5,9605E-08	0,434294469	24
1,00000003	1,2943E-08	2,9802E-08	0,434294475	25
1,000000015	6,4715E-09	1,4901E-08	0,434294479	26
1,000000007	3,2357E-09	7,4506E-09	0,43429448	27

3. Nel primo documento (ricavato dal *Tractatus*) Newton scrive: “Le flussioni si possono rappresentare con approssimazione arbitrariamente grande come gli incrementi delle fluenti, generati durante intervalli uguali di tempo piccoli a piacere”. Recupera dal tuo libro di testo la definizione di derivata come limite del rapporto di certe grandezze e stabilisci un confronto con quanto Newton dice nella citazione testé riproposta e nell’ultimo documento.

Non ci fermiamo qui… e la storia continua...

Pochi matematici hanno lasciato il segno nella storia come Pierre de Fermat.

Fermat lesse l'*Aritmetica* di Diofanto (che contiene l'intera conoscenza sui numeri delle scuole di Pitagora e di Euclide). Il problema 8 dell'*Aritmetica* dice: "Dividere un quadrato in due quadrati". Diofanto fornisce l'esempio:

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{256}{25}+\frac{144}{25}=\frac{400}{25}=16$$

dunque è possibile dividere il numero quadrato 16 in altri due quadrati razionali. In margine a questo problema, Fermat scrisse una nota...

Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet.	È impossibile dividere un cubo in due cubi o una quarta potenza in due quarte potenze o, in generale, nessun numero che sia potenza di grado superiore al secondo in due altre potenze dello stesso grado. Dispongo di una dimostrazione veramente mirabile che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina.

La "mirabile dimostrazione" di Fermat non è mai stata ritrovata...

Fermat scrisse molte affermazioni senza dimostrazione a margine dell'*Aritmetica*, e con il passare del tempo tutte vennero dimostrate, tranne quella sopra riportata che fu denominata *Ultimo teorema di Fermat*.

Moltissimi matematici si sono cimentati nella dimostrazione di questo teorema, per secoli, riuscendo al massimo a dimostrarne solo alcuni casi particolari. Si distinsero:

- Eulero, che dimostrò il caso per n=3 e n=4 e scoprì che bastava dimostrare il teorema per n numero primo;
- Sophie Germain (1776-1831), che fornì un metodo per dimostrare il teorema per ogni numero primo p tale che 2p+1 sia ancora un primo (metodo che usarono contemporaneamente e in autonomia anche Dirichlet e Legendre per dimostrare il caso p=5, e Lamè per il caso p=7).

Nel 1994 Andrew Wiles fornì la dimostrazione (130 pagine!) riunendo molte scoperte sulla teoria dei numeri del 20° secolo.

Così ora possiamo affermare con certezza che $x^n+y^n=z^n$ per $n>2$ *non ha soluzioni intere* (che non siano banali).

Scorrendo le tavole dei numeri primi, si nota che ci sono varie coppie di *primi gemelli*, cioè che differiscono di 2: ad esempio 3 e 5, 5 e 7, 9 e 11...

I primi gemelli sono infiniti? A questa domanda la ricerca non ha ancora dato una risposta.

Nel 1742 il matematico Christian Goldbach descrisse in una lettera a Leonhard Euler (Eulero) la sua celebre congettura: "Ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi". In effetti: 4=2+2, 6=3+3, 8=5+3 e così via.

A distanza di oltre due secoli e mezzo ci si chiede ancora se la congettura di Goldbach sia vera in generale oppure no.

Esistono dei numeri naturali molto speciali, come il 6: prendiamo i suoi divisori, vale a dire 1, 2, 3 e 6. Scartiamo quest'ultimo e facciamo la somma degli altri: 1+2+3 è proprio uguale a 6. In effetti i numeri di questo tipo sono 'molto rari'; il successivo è 28, poi bisogna arrivare a 496 e poi a 8128 (noti già ai Greci). Oggi se ne conoscono alcune decine.

Un numero che, come i precedenti, si può ottenere come somma di tutti i suoi divisori, tranne ovviamente il numero stesso, viene chiamato *perfetto*.

Ma esistono numeri perfetti dispari? Questo è ancora un problema aperto...

La storia della matematica ha… un grande futuro davanti a sé.