MATEMATICA E AMMINISTRAZIONE

NELLA MESOPOTAMIA DEL IV E III MILLENNIO a.C.

Sergio Alivernini[1]

SUNTO

I termini "Mesopotamia", "Iraq" o anche "Babilonia" indicano la regione geografica cui viene attribuita, da molti testi generali di storia della matematica, l'origine della matematica "pura". Come è noto la maggior parte dei testi matematici della Mesopotamia pre-classica è datata al periodo paleo-babilonese (ca. 2000-1600 a.C.) Questo lavoro intende presentare una panoramica generale delle conoscenze matematiche in Mesopotamia nei periodi precedenti al paleo-babilonese utilizzando non soltanto testi puramente matematici ma anche documentazione amministrativa: ciò permetterà di mostrare le unità di misura utilizzate, le tecniche di conteggio e misurazione e le "formule" utilizzate per effettuare calcoli.

ABSTRACT

Almost every general textbooks on the history of mathematics assign the origin of "pure" mathematics to the geographical area called "Mesopotamia", "Iraq" or "Babylon". As is well known most of the mathematical texts of Mesopotamia comes mainly from the so-called Old-Babylonian period (ca. 2000-1600 BC). This paper is aimed at showing a general overview of the mathematical knowledge of Mesopotamia before Old-Babylonian period, in the IV and III millennium, using for this purpose, not only the mathematical documentation but also the administrative one: it will show the units of measurement used, the techniques of counting and measuring, and "formulas" used to perform calculations.

Parole chiave: Mesopotamia, matematica, documentazione amministrativa.
Keyword: Mesopotamia, mathematics, administrative texts.

[1] Dottore di ricerca in "Studi filologici e letterari sul Vicino Oriente antico e l'Iran pre-islamico". "Sapienza" Università di Roma, Facoltà di Lettere e Filosofia, Dipartimento Istituto Italiano di Studi Orientali. Email: sergio.alivernini@gmail.com

INTRODUZIONE

Come è noto, la maggior parte dei testi matematici della Mesopotamia pre-classica proviene essenzialmente da due periodi: il periodo cosiddetto paleo-babilonese (ca. 2000-1600 a.C.) e un periodo compreso tra la conquista persiana e l'età seleucide (ca. 500-100 a.C.).[2] Specialmente il periodo paleo-babilonese ci ha lasciato migliaia di testi matematici che ci hanno mostrato il livello di sofisticazione raggiunto dalla matematica mesopotamica: testi di problemi su figure piane (regolari e irregolari) e solide, tavolette che elencano radici quadrate e cubiche, logaritmi ecc. Il periodo paleo-babilonese ha anche prodotto testi che mostrano come fosse conosciuto il valore della radice quadrata di due, nonché terne di numeri, da noi conosciute come "Terne Pitagoriche", che identificano i lati di un triangolo rettangolo. Tuttavia la storia della Mesopotamia comincia con la nascita della scrittura intorno al 3500 a.C., documentata da migliaia (e durante certi periodi, centinaia di migliaia) di testi amministrativi; infatti, circa il 95% della documentazione è di natura amministrativa e registra tutti gli aspetti legati alla gestione e all'organizzazione dello Stato: unità produttive (mulini, campi ecc), conteggi di lavoratori e beni, assegnazioni di cibo e così via. Questa complessa organizzazione burocratica necessitava di avanzate conoscenze matematiche ma solo pochissimi documenti matematici posso essere datati al IV e III millennio a.C. Ma come è possibile studiare la matematica in assenza o carenza di testi matematici? Partiamo da un affermazione di E. Robson, la grande studiosa inglese di matematica cuneiforme:

[2] Per una panoramica completa della matematica Mesopotamica dalle origini fino all'eta seleucide si vedano Robson, 2008 e Friberg, 1987-1990.

"Clearly not all cuneiform texts with numbers in them are mathematical, and mathematical texts do not necessarily contain many numbers. A distinction must be made between texts which are of mathematical interest and texts which are primarily about mathematics, i.e. which have been written for the purpose of communicating or recording a numerical technique or aiding a quantitative procedure to be carried out." (Robson, 2008, pp. 289-290).

Questo lavoro intende presentare una panoramica generale delle conoscenze matematiche della Mesopotamia[3] nel periodo precedente al paleobabilonese utilizzando a tal scopo, non solo la documentazione matematica in senso stretto, ma anche quella che E. Robson chiama "*of mathematical interest*" che, nel caso della Mesopotamia del IV e III millennio, è appunto documentazione amministrativa: essa ci mostrerà le unità di misura utilizzate, le tecniche di conteggio e misurazione e le "formule" utilizzate per effettuare calcoli.

Questo periodo è convenzionalmente così suddiviso:[4]

Antico Uruk	3500 - 3200
Tardo Uruk	3200 - 3000
Periodo Jemdet Nasr	3000 - 2900
Proto-dinastico I	2900 - 2750
Proto-dinastico II	2750 - 2600
Proto-dinastico IIIa	2600 - 2450
Proto-dinastico IIIb	2450 - 2350
Periodo sargonico	2350 - 2112
Periodo della III Dinastia di Ur	2112 - 2004

[3] Un piccolo accenno verrà anche fatto di documentazione matematica proveniente dall'esterno della Mesopotamia: nel paragrafo 3 si accennerà alla città di Ebla in Siria.
[4] Le date sono tutte da intendersi "a.C.".

L'area geografica è invece la seguente:

Fig. 1. Mappa della Mesopotamia

(da https://oi.uchicago.edu/research/lab/map/maps/iraq.html)

1. L'ORIGINE DELLA SCRITTURA E DEI SISTEMI NUMERICI NEL IV MILLENNIO

Nel IV millennio l'aumento della produzione di cibo portò ad una rapida crescita della popolazione, in particolare nella regione sud dell'Iraq, che era allora un insieme di fertili pianure e paludi verdeggianti. La città di U-ruk, che dà il nome a questo primo periodo, crebbe fino a misurare circa 250 ettari intorno al 3000 a.C., con almeno 280 ulteriori ettari di campagne. La complessità del commercio e dell'amministrazione superò la capacità della memoria e la scrittura divenne il metodo più affidabile di registrazione e di presentazione delle transazioni in forma permanente.

Il sistema di scrittura sviluppato durante la metà del IV millennio è stato scritto su tavolette di argilla, per mezzo di una canna utilizzato come uno stilo. Le impressioni lasciate dalla stilo erano a forma di chiodo o cuneo, da cui il nome di "scrittura cuneiforme". Oggi sappiamo che questo sistema di scrittura fu utilizzato per scrivere lingue molto diverse fra loro (sumerico, accadico, elamita, hurrita e ittita) in un'area che va dalla Turchia fino all'I-ran e in un periodo che va approssimativamente dal IV millennio a.C. ai primi secoli dopo Cristo.

Il cuneiforme mesopotamico fu tradotto, per la prima volta, intorno alla metà del XIX secolo e portò alla decifrazione delle due principali lingue della Mesopotamia: l'accadico, una lingua semitica imparentata con l'arabo e l'ebraico, e il sumerico, una lingua isolata di cui ancora oggi non è nota nessuna affiliazione. Queste due lingue coesistettero fino all'inizio del II millennio, quando il sumerico divenne una lingua morta: essa continuò però ad essere usata, accanto all'accadico, per scrivere testi letterari o reli giosi (un po' come succedeva con il latino nel medioevo).[5]

La prima manifestazione della scrittura è costituita dai sistemi di misura. Gli scribi, per semplificare e ridurre il numero di segni da incidere sulle tavolette, inventarono i cosiddetti "sistema numerici", cioè allo stesso segno cuneiforme vennero talvolta assegnati diversi valori numerici sulla base dell'oggetto contato o misurato.

I numeri sono traslitterati dagli studiosi nel formato "N_X", con il pedice "x" che rappresenta un numero che identifica inequivocabilmente il numero del segno cuneiforme, dal momento che, ancora oggi, non sappiamo come questi segni venissero pronunciati.

Principalmente, ci sono cinque diversi sistemi numerici nella Mesopotamia del IV e della prima parte del III millennio:[6]

Nome del sistema numerico	**Oggetto misurato**
E (EN)	?
S (Sessagesimale)	Registrazioni di persone, animali e misure lineari
B (Bi-Sessagesimale)	Cibo
Š (ŠE = Orzo)	Volumi
G (GAN_2 = Campo agricolo)	Superfici

Il sistema E è documentato solo nei testi più antichi e l'oggetto misurato non è stato ancora identificato a causa della mancanza di attestazioni (meno di trenta testi).

[5] In questo articolo, seguendo la consuetudine assiriologica, le parole accadiche sono scritte in corsivo, quelle sumeriche in stampatello. I numeretti in pedice a certe parole sumeriche servono per distinguere il segno cuneiforme corrispondente dagli omofoni (diversi segni cuneiformi che però hanno lo stesso suono).

[6] In aggiunta a questi cinque sistemi principali ve ne sono alcuni cosiddetti "derivati" per un approfondimento dei quali si veda Englund, Damerow, Nissen, 1993, pp. 25-29.

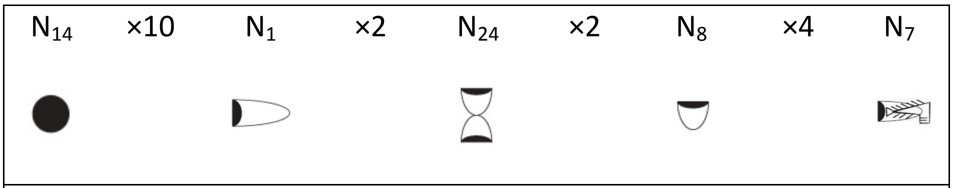


Figura 2 - Sistema E

Il sistema numerico S (sessagesimale), normalmente utilizzato nel conteggio dei lavoratori, degli animali e delle misure lineari, è caratterizzato dal rapporto tra questi segni-base:

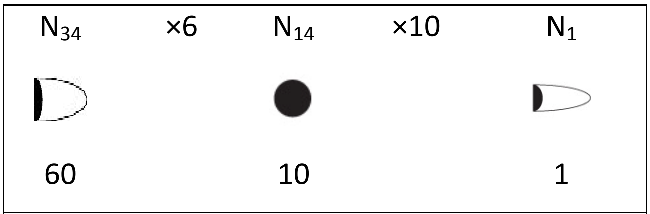


Figura 3 - Sistema S, segni-base

Questo sistema prevedeva anche multipli e un valore frazionario N_8.

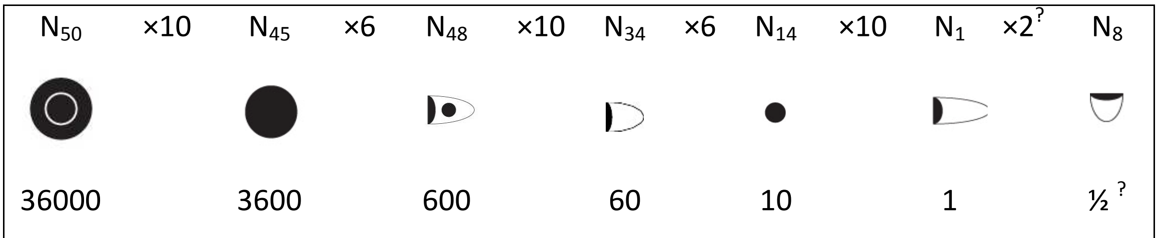


Figura 4 - Sistema S completo

Il sistema B (Bi-sessagesimale) è utlizzato nei testi arcaici nei conteggi di cibo (per esempio pane o formaggio). Il nome Bi-sessagesimale deriva dalla presenza del segno N_{51}, che vale il doppio N_{34}, ed è quindi pari a $2 \times 60 = 120$.

N_{56}	×6	N_{54}	×10	N_{51}	×2	N_{34}	×6	N_{14}	×10	N_1	×2[?]	N_8
7200		1200		120		60		10		1		½

Figura 5 - Sistema Bi-sessagesimale

Il sistema Š è utilizzato per misurazioni volumetriche (o capacità) di cereali. Il sistema prende il nome dal simbolo "ŠE" che significa "orzo".

N_{48}	×10	N_{34}	×3	N_{45}	×10	N_{14}	×6	N_1	×5	N_{39}[7]

Figura 6 - Sistema Š

L'unità N_{39} possiede poi vari sottomultipli:

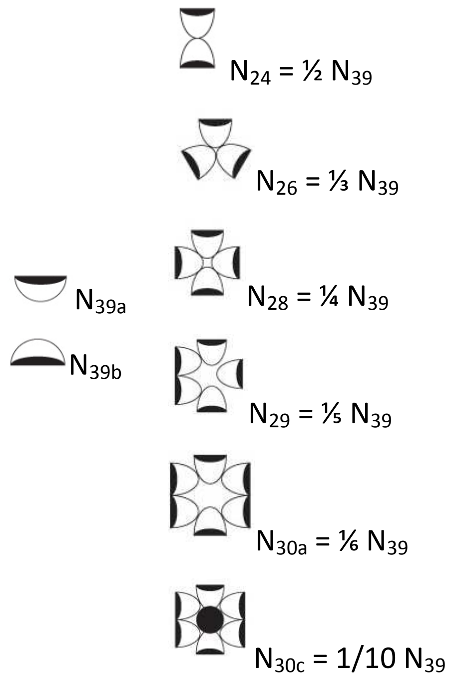


Fig. 7 - Sottomultipli N_{39}

[7] Il segno N_{39} presenta due varianti: N_{39a} rivolto verso l'alto e N_{39b} rivolto verso il basso.

Basandosi sul nome di queste unità di misura nei periodi seguenti, l'unità di base in questo sistema (N_1) è chiamato "barig" (ca. 24 litri). Il sistema comprende multipli e frazioni di questa unità. Il primo multiplo del barig ($N_{14} = 6 \times N_1$) si chiama "gur" mentre il suo primo sottomultiplo (N_{39} = 1/5 N_1) "ban". Il secondo sottomultiplo (N_{30a} = 1/30 N_1) è chiamato "sila$_3$" (0,8 litri).

Il sistema G (dalla parola "GAN$_2$" che significa "campo agricolo") è usata per misurare superfici:

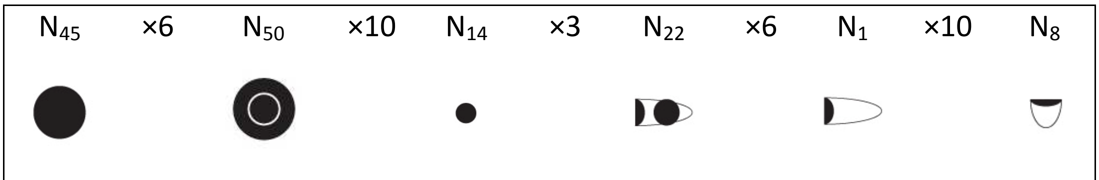


Figura 8 - Sistema G

L'unità di base si chiama IKU (N_1) ed equivale a:

10 nindan × 10 nindan = 100 nindan^2.

Siccome, sulla base dei testi di epoche successive, sembra che 1 nindan equivalesse a circa 6 metri, 1 IKU dovrebbe corrispondere a 3600 metri quadrati.

2. LE TECNICHE DI MISURAZIONE DI CAMPI NEL IV MILLENNIO

Nell'amministrazione della IV millennio a.C. gli scribi utilizzavano solo le quattro operazioni matematiche di base: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Sembra però che già in quel periodo le conoscenze matematiche dovessero essere sviluppate, dal momento che alcuni calcoli venivano effettuati utilizzando formule semplificate, la cui approssimazione doveva essere nota. In caso contrario, gli errori nei risultati delle operazioni avrebbero causato problemi nella gestione dell'amministrazione centrale, per esempio nel dare valore ai campi assegnati ai vari funzionari. I funzionari dell'amministrazione centrale misuravano i perimetri dei campi e siccome la maggior parte dei campi aveva una forma pressoché rettangolare, gli ispettori annotavano la misurazione dei quattro lati. Come osserva S. F. Monaco, abbiamo diversi esempi di testi arcaici che mostrano queste misure.[8]

Si veda ad esempio il seguente testo:[9]

Foto **Copia**

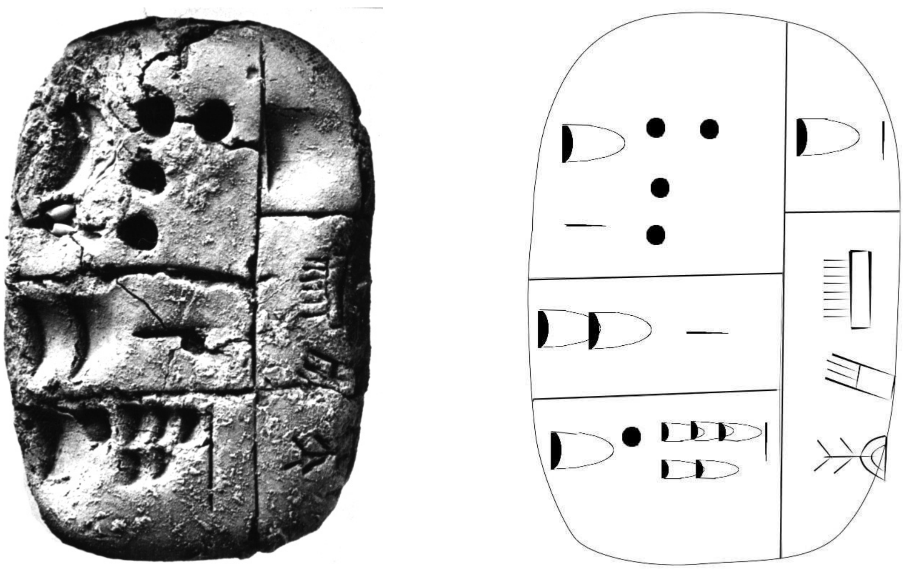


Figura 9 - IM 65116, la foto è da http://cdli.ucla.edu/dl/photo/P003436.jpg, la copia da Monaco, 2011, p. 11.

[8] Monaco 2011, p. 11.

[9] Il testo è conservato presso l'Irak Museum di Baghdad (numero di inventario IM 65116). I numeri fanno riferimento al sistema S (si veda figura 3).

La traslitterazione del testo e la traduzione sono le seguenti:

Traslitterazione	**Traduzione**
Colonna I	**Colonna I**
$1{\times}N_{34}$ $4{\times}N_{14}$ $1{\times}N_{57}$	60+40 N_{57}
$2{\times}N_{34}$ $1{\times}N_{57}$	120 N_{57}
$1{\times}N_{34}$ $1{\times}N_{14}$ $5{\times}N_{1}$ $1{\times}N_{58}$	60+10+5 N_{58}
Colonna II	**Colonna II**
$1{\times}N_{34}$ $1{\times}N_{58}$	60 N_{58}
E_d SUKKAL TU_b	*Assegnatario del campo*

I tratti orizzontali (N_{57}) e verticali (N_{58}) servono per identificare le coppie di lati opposti. In questo esempio il gruppo di segni alla fine della tavoletta identifica probabilmente l'assegnatario del campo. Le misure lineari si riferiscono al sistema numerico sessagesimale, la cui unità corrisponde al "nindan" (≈ 6 metri). Nel testo sopra abbiamo dunque:

100 nindan

120 nindan

75 nindan

60 nindan

La forma del campo è quindi la seguente:

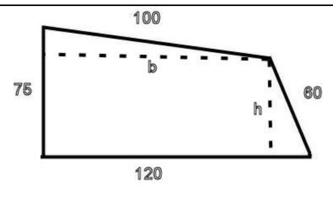


Figura 10 - Forma del campo registrato in IM 65116, da Monaco, 2011, p. 12.

Se si volesse calcolare esattamente l'area di questo quadrilatero, il metodo più semplice sarebbe quello di suddividerlo in un rettangolo e due triangoli rettangoli (come mostrato nella figura 9), calcolare le tre aree e poi sommarle.

La formula semplificata sarebbe :

$A = (b \times h) + [½b \times \sqrt{} (100^2 - b^2)] + [½h \times \sqrt{} (60^2 - h^2)]$

Tuttavia, la principale difficoltà nell'applicare tale formula è che, per calcolare b e h, si dovrebbe conoscere almeno un altro angolo del quadrilatero, così come il teorema di Pitagora. Gli amministratori IV Millennio superarono tale difficoltà inventando la cosiddetta "*field surveyors' formula*", che semplifica drasticamente i calcoli, con risultati piuttosto accettabili (essendo l'approssimazione nell'ordine del 1% per quadrilateri non eccessivamente irregolari). Con questo metodo il calcolo della superficie del quadrilatero si riduce al calcolo abbastanza semplice della superficie del rettangolo (quasi) equivalente calcolando le semi-somme (cioè le medie aritmetiche) delle due coppie di lati opposti.

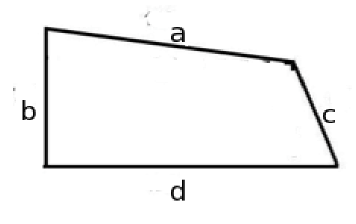


Figura 11 - Forma del campo registrato in IM 65116

Con riferimento alla figura sopra, la formula semplificata per calcolare l'area "A" è perciò la seguente:

$A = [½ (d + a)] \times [½ (b + c)]$

Introducendo i dati della tavoletta, la superficie risultante del campo è 74,25 IKU:

$A = [½ (120 +100)] \times [½ (75 +60)]$

$A = 110 \times 67{,}5 = 7425$ $\text{nindan}^2 = 74{,}25$ IKU

Di conseguenza, la procedura comprendeva tre fasi:

1. misurazione *in situ* dei lati del campo;
2. calcolo delle semi-somme delle coppie di lati opposti;
3. preparazione della tavoletta finale con il risultato del calcolo della superficie del campo.

Tutti questi tre passaggi vengono registrati in una tavoletta da una collezione privata:[10]

$240 + 2\ N_{57}$

$120 + 6\ N_{58}$

$180 + 50 + 4\ N_{57}$

$120 + 4\ N_{58}$

$180 + 50 + 8\ N_{57}$

$120 + 5\ N_{58}$

297,5

Questa tavoletta rappresenta un testo di grande interesse matematico, poiché mostra come venivano eseguiti i calcoli. Nelle prime quattro righe sono riportate le misure dei quattro lati del campo (242, 126, 234, 124). Nella quinta e sesta riga sono registrati i risultati del calcolo della base

[10] La tavoletta non è stata ancora pubblicata ma è citata in Monaco, 2011, p. 13.

(B = 238) e dell'altezza (H = 125) del rettangolo equivalente. Nell'ultima riga infine è registrata la superficie risultante del campo (B × H):

$A = [½ (242 +234)] \times [½ (126 +124)] = 238 \times 125 = 29750$ $nindan^2 =$

$=$ 297 ½ IKU.

La mancanza del nome dell'assegnatario del campo (come è invece nel caso della tavoletta IM 65116) potrebbe indicare che questa particolare tavoletta sia in realtà un testo scolastico giacchè verrebe a mancare un'indicazione fondamentale per un documento amministrativo. É molto probabile infatti che nelle scuole dove questi agrimensori venivano formati, l'esercizio tipico dovesse essere quello di applicare la "*field surveyors' formula*". Esistono alcuni esempi di questi testi che fornivano solo i quattro lati del campo senza la soluzione finale o il nome dell'assegnatario del campo: questi testi probabilmente rappresentavano gli esercizi che venivano dati agli studenti affinchè applicassero tale formula. Esistono alcuni indizi che possono indicare se un testo è una "vera" misurazione di un campo (cioè un testo ammnistrativo) o se si tratta di un esercizio (cioè un testo scolastico):

- le dimensioni del campo sono numeri tondi così come la superficie risultante;
- la presenza del nome dell'assegnatario del campo (nelle tavolette amministrative);
- l'assenza del nome dell'assegnatario (nelle tavolette scolastiche).

3. IL III MILLENNIO FINO ALL'UNIFICAZIONE DI SARGON

Per gran parte del terzo millennio la struttura politica della regione rimase abbastanza stabile. Presumibilmente tutte le grandi amministrazioni dovevano formare i loro scribi nelle varie attività anche se sopravvivono pochi documenti scritti risalenti all'inzio del III millennio (cosiddetta proto-dinastico I- II). Durante il periodo proto-dinastico III, le singole città-stato, come Šuruppak (proto-dinastico IIIa), e più tardi Adab e Ebla (proto-dinastico IIIb), formarono alleanze economiche e militari con i loro vicini, mentre controversie in materia di risorse idriche e terrestri venivano risolte dalla guerra o dalla diplomazia. Anche città al di fuori della Mesopotamia, come appunto Ebla, in Siria occidentale, partecipano a questo scambio regionale, che diffonde il cuneiforme in gran parte del Vicino Oriente. La scrittura gradualmente accrebbe le sue funzioni: se prima veniva usata per l'amministrazioni di beni e uomini in realtà locali, viene ora utilizzata per una gran varietà di scopi istituzionali, dalla registrazione di contratti legali alla documentazione di eventi politici. Mentre molte persone e famiglie senza dubbio continuano a vivere senza l'ausilio della scrittura, le economie istituzionali utilizzano sistemi in cui la scrittura è ormai indispensabile, sistemi che sono realizzati da professionisti del "leggere, scrivere e far di conto". L'alfabetizzazione rimane prevalentemente nelle mani di burocrati che gestiscono enormi quantitativi di campi agricoli, lavoratori, bestiame, cibo ecc. Questi burocrati però non si limitarono ad utilizzare la scrittura per l'amministrazione, ma, a partire dalla metà del III millennio, iniziarono a sviluppare altri usi della scrittura che possono essere chiaramente identificati come letteratura e matematica.

Il più grande *corpus* di documenti scolastici proviene, per quanto riguarda questo periodo, dalla città di Šuruppak, nota anche con il suo nome moderno, Fara. Circa cinquecento tavolette sono state scavate da questo sito, quasi tutti scritte poco prima che un incendio la distrusse nel 2450 a.C. circa. Cinque tavolette possono chiaramente essere identificato come matematiche: una tavoletta metrologica e quattro problemi che indicano anche la risposta. Un'altra mezza dozzina di tavolette potrebbero essere esercizi matematici di qualche tipo, ma la loro lettura è incerta. Dei cinque testi matematici, due forniscono soluzioni per trovare il numero di lavoratori che possono essere alimentati da una certa quantità di cereali; un'altro calcola il grano necessario per alimentare un determinato numero di lavoratori. La tavoletta metrologica e l'ultimo dei quattro problemi riguardano la relazione tra i lati e la superficie di un quadrato.[11]

Gli archivi centrali del palazzo della grande città siriana di Ebla è datato a più o meno allo stesso periodo.

Figura 12 - Localizzazione di Ebla

(*da http://www.studibiblici.eu/medio%20oriente%20dettaglio%20ebla.jpg*)

Scavi italiani a metà degli anni '70 hanno prodotto circa duemila tavolette, per lo più da una piccola stanza utilizzata come archivio, L.2769, nel Palazzo G. Le tavolette sono stati trovate come se fossero cadute dagli scaffali durante o subito dopo la distruzione finale di Ebla, avvenuta probabilmente intorno al 2350 a.C.

[11] I quattro testi di problemi sono conservati nel *İstanbul Arkeoloji Müzeleri* (numeri di museo: Ist Š 50, 81, 188, 671) e pubblicati in Jestin, 1937. La tavoletta metrologica è conservata al *Vorderasiatisches Museum* di Berlino (numero di museo: VAT 12593) e pubblicata in Deimel, 1923.

Solo quattro testi matematici[12] sono stati trovati lì: due sembrano essere problemi che riguardano la divisione di grandi quantità di grano, uno sembra registrare delle equivalenze tra pesi di metallo (stagno e bronzo) e grano, uno sembra elencare una serie di problemi mentre l'ultimo sull'ultimo testo sono incisi segni di numeri elevati.
Da Ebla proviene infine un altro testo, non propriamente matematico, ma molto interessante in quanto registra i numeri 1-10 in sillabe e rappresenta l'unico documento che ci dica come i numeri fossero pronunciati in sumerico nel III millennio. Il sistema sembra essere a base 5:

1 - dig or aš

2 - min

3 - eš

4 - limu

5 - ya

6 - yas (da ya + aš)

7 - umin (da ya + min)

8 - ussa

9 - ilīmu (da ya + limu)

10 - □aw

Purtroppo i numeri vengono quasi sempre scritti come numerali, il che significa che probabilmente non sapremo mai come fossero pronunciati numeri più grandi.

[12] I testi sono conservati nel Museo Nazionale Siriano. (numeri di scavo: TM 75.G.1392, TM.75.G.1572, TM 75.G.1693 e TM 75.G.2346). Per un'analisi di questi testi si vedano Archi, 1989 e Friberg, 1986.

4. IL PRIMO "IMPERO": SARGON DI AKKAD UNIFICA LA MESOPOTAMIA

Quando il re Sargon conquistò il potere nel nord Babilonia intorno al 2340 a.C. c'era poco che indicasse che il suo regno avrebbe segnato una svolta decisiva nella storia politica o intellettuale di antica dell'Iraq . Poco si sa, da fonti contemporanee, sulla vita e le opere di questo monarca, anche se il suo nome e la sua fama sopravissero per quasi due millenni nella tradizione cuneiforme.

L'unificazione di gran parte della Mesopotamia sotto un unico potere centrale ebbe come conseguenza la necessità di creare un'amministrazione uguale in tutto l'Impero e questo portò alla definizione di unità di misura *standard*.[13] Queste unità di misura posero radici profonde e vennero utilizzate nei testi matematici, pur con alcune aggiunte e modifiche, fino alla fine della storia mesopotamica.[14]

4.1. I sistemi di misura

La conoscenza dell'esatta relazione tra le varie unità di lunghezza, superficie, peso, ecc. era (ed è tuttora) indispensabile per la comprensione dei testi matematici e molti di questi testi erano senza dubbio dedicati all'insegnamento della metrologia.

Sistema di misura di lunghezza

L'unità base del sistema di misura per la lunghezza era il "nindan" (ca. 6 m.).

[13] Robson, 2008, p. 55.
[14] Powell, 1987-1990, p. 458.

danna	×30	UŠ	×60	nindan	×12	$kuš_3$	×30	šu-si
10,5 km		360 m		6 m		50 cm		17 mm

Figura 13 - Sistema di misura per le lunghezze

Sistema di misura di superfici

L'unità base per la superficie è il "sar" che equivale alla superficie di un quadrato avente il lato di un "nindan", tale che 1 sar = 1 $nindan^2$ = 36 m^2

iku	×100	sar	×60	gin_2	×180	še
3600 m^2		36 m^2		0,6 m^2		33 cm^2

Figura 14 - Sistema di misura per le superfici

Sistema di misura di volume

I nomi delle unità di misura di volume sono uguali a quelle della superficie. Le unità di volume hanno origine da un'unità di area moltiplicata per l'altezza di "1 $kuš_3$". Quindi l'unita di volume "sar" non equivale a "1 $nindan^3$" ma è uguale a 1 $nindan^2$ × 1 $kuš_3$.

Sistema di misura di peso

Le unità di peso erano di grandissima importanza in quanto il peso dell'argento equivale a quello che noi oggi chiamiamo "moneta". L'unità base era il "ma-na".

gu_2	×60	ma-na	×60	gin_2	×180	še
30 kg		500 g		8 g		0,04 g

Figura 15 - Sistema di misura per i pesi

Sistema di misura di capacità

Per misurare olio, orzo e altri generi alimentari non si usavano le unità di volume ma speciali unità di misura.

gur	×5	bariga	×6	ban$_2$	×10	sila$_3$	×60	gin$_2$
300 l		60 l		10 l		1 l		17 ml

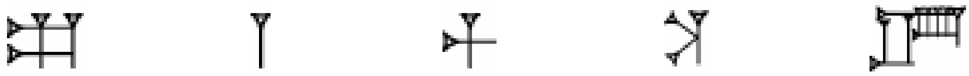


Figura 16 - Sistema di misura di capacità

4.2. I testi matematici del periodo Sargonico

Ventidue tavolette matematiche di questo periodo sono state pubblicate fino ad oggi. Questi testi possono essere raggruppati in cinque diverse tipologie e imitavano documenti amministrativi:

1. tipo di problema "a": trovare il lato corto di un rettangolo dato il lato lungo e la superficie (cinque tavolette); è la tipologia più lontana dalla prassi professionale, sia per lo scenario del problema sia per il fatto che l'area del rettangolo è sempre un numero preciso o rappresenta singole unità di superficie;
2. tipo di problema "b": trovare l'area di un quadrato dato il suo lato (cinque tavolette).

Entrambi i tipi , soprattutto questi ultimi, usano il verbo "pa" o "pa$_3$" che in sumerico significa "trovare", e che rappresenta il primo termine attestato per un uso esclusivamente matematico piuttosto che amministrativo. Si veda, ad esempio, un testo appartenente alla collezione dell'Università di Liegi:[15]

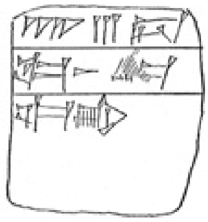
Tavoletta	Traslitterazione	Traduzione
	**Recto:**	**Recto:**
	1. 4.3 us$_2$	1. Il lato lungo è 270 <ninda>
	2. sag 1(iku) GAN$_2$	2. (Quale è) il lato corto di un campo che ha la superficie di 1 iku?
Revers	3. sag-bi	3. Il suo lato corto
	*spazio vuoto*	*spazio vuoto*
	Verso:	**Verso:**
	1. pa$_3$-de$_3$-dam	1. è da trovare

Figura 17 - Testo di problema di epoca sargonica (copia da Limet, 1973, p. 39)

Le altre tipologie di problemi sono:

3. tipo di problema "c": trovare l'area di un quadrilatero irregolare;
4. tipo di problema "d": trovare l'area di un campo rettangolare e dati agricoli associati;
5. tipo di problema "e": trovare il volume di un prisma rettangolare.

Come detto sopra, questi testi cercano di imitare la struttura e la terminologia di un "vero" documento amministrativo con l'aggiunta di informazioni circostanziali di persone o luoghi; ma la loro natura scolastica ci è indicata dalla dimensione irrealistica dei parametri numerici e da errori ortografici e/o artimetici.

Ad esempio in un testo conservato nel Museo di Istanbul[16] (tipo di problema "c") si legge:

[15] Numero di Museo PUL 31.

[16] Numero di Museo Ist L 2924.

Tavoletta	Traslitterazione	Traduzione
	**Recto:**	**Recto:**
	1. 16 kur 20 la$_2$ 3	16 il lato est 17
	2. 37 mer 31,5	37 il lato nord 31,5
	3. a-ša$_3$-bi <...>	La sua area è (*vuoto*)
	4. Bar-ra-an šabra	Baran l'amministratore del tempio
	5. 40 mer 25,5	40 il lato nord più 25,5
	6. 30 kur 25,5	30 il lato est (più) 25,5
	7. a-ša$_3$-bi <...>	La sua area è (*vuoto*).
	8. Iri-na šabra	Irina l'amministratore del tempio
	9. 4(iku) 1(ubu) GAN$_2$ [...]	4 (iku) 1(ubu) campo [...]
	10. Du-du [...]	Dudu [(*titolo*)]

Figura 18 - Testo di problema di epoca sargonica (copia da Donbaz – Foster 1982, p. 80)

In entrambi i casi, i due lati paralleli vengono registrati secondo la loro posizione ("mer", cioè [lato] nord e "kur", cioè [lato] est) senza unità metrologiche allegate. Le aree risultanti non sono state scritte sulla tavoletta. La superficie registrata alla fine è significativamente più piccola rispetto ai due campi e non può quindi rappresentare il loro totale.

Per quanto riguarda i nomi che compaiono su queste tavolette e possibile che fossero quelli degli studenti che effettuavano gli esercizi.

5. LA III DINASTIA DI UR E LO SVILUPPO DEL SISTEMA SESSAGESIMALE POSIZIONALE

Con il ritiro dell'autorita centrale dovuto alla caduta dell'Impero di Sargon intorno al ventiduesimo secolo, vi è una carenza notevole di testi scritte tranne che in piccole realtà politiche come le città di Girsu e Uruk.

Ma un nuovo impero si formò dalle ceneri di quello di Sargon. La Terza Dinastia di Ur (comunemente abbreviata Ur III) venne fondata a Ur nell'estremo sud della Mesopotamia alla fine del terzo millennio e crollò circa un secolo più tardi. Il periodo è convenzionalmente datato tra il 2112 e il 2004 a.C., e anche se possiamo essere abbastanza sicuri del lasso di tempo, le date assolute non sono certe.

L'epoca della III Dinastia di Ur rappresenta uno dei periodi meglio documentati di tutta la storia antica conseguenza del ruolo primario che la burocrazia svolgeva nella gestione di tutti i livelli dello Stato. Questa grande organizzazione burocratica necessitava di conoscenze computazionali avanzate, ma abbastanza sorprendentemente, solo otto testi matematici possono essere datati a questo periodo: una tavoletta lenticolare su cui è inciso un esercizio che riguarda il volume di un muro e poi il corrispondente numero di mattoni,[17] un altro esercizio su un conteggio di mattoni di un tempio,[18] una piccola raccolta di problemi coordinati che riguardano la costruzione di un terrapieno e l'aratura di un campo[19] e cinque tavolette di reciproci.[20] Questa carenza di documentazione è ancora più sorprendente

---

[17] Conservata nel Museo del Louvre (numero di museo: AO T 304).

[18] Conservata nella Yale Babylonian Collection (numero di museo: YBC 9819).

[19] Il testo appartiene ad una collezione privata ed è stato pubblicato in Jones - Snyder, 1961, p. 318.

[20] Due sono conservate nel *İstanbul Arkeoloji Müzeleri* (numeri di museo: Ist T 7375, Ist Ni 374), due presso il British Museum (BM 106425, BM 106444) e una presso la Collezione Hilprecht a Jena (HS 201). Vale la pena sottolineare che si tratta di un nuovo genere di testo matematico che avrà poi grande sviluppo in epoca-paleobabilonese: si tratta di tavolette che elencano nella colonna di destra un numero e accanto il suo reciproco. L'uso di queste tabelle era particolarmente importante in quanto la divisio-

se si considera la ricchezza della documentazione matematica (liste metrologiche, tabelle di costanti e coefficienti, tavole di algoritmi ecc.), che risale al seguente periodo paleo-babilonese (ca. 2000-1600 a.C.). L'assenza di testi cuneiformi matematici del periodo Ur III non significa, naturalmente, che la matematica non esistesse come un elemento importante nel *curriculum* delle scuole scribali di Ur III: anche Šulgi, il secondo e più importante re della III Dinastia di Ur, si vanta della sua capacità in materia di contabilità. In un suo inno il re afferma:[21]

> Io, Šulgi il nobile, sono stato benedetto con un destino favorevole fin dal grembo materno. Quando ero piccolo, nella scuola, ho imparato l'arte scribale dalle tavolette di Sumer e di Akkad. Nessuno dei nobili potrebbe scrivere come me. Là, dove la gente va regolarmente per apprendere l'arte scribale, io mi sono qualificato pienamente in **sottrazione, addizione, calcolo e contabilità**. La fiera Nanibgal, Nisaba, mi ha fornito ampiamente di conoscenza e comprensione. Io sono uno scriba esperto che non trascura nulla.

Inoltre, va evidenziato come una parte sostanziale del *corpus* di testi cuneiformi matematici paleo-babilonesi fosse dedicato a "esercitazioni pratiche" (costruzione di muri, dighe, canali, mattoni, semina dei campi agricoli, ecc), problemi che naturalmente coinvolgevano gli abitanti del sud Mesopotamia anche durante il periodo di Ur III. Questa sezione dell'articolo si concentrerà ora su un particolare tipo di documentazione amministrativa di Ur III, la misurazione di campi, cercando di rilevare le operazioni matematiche pratiche utilizzate.

---

ne era un'operazione usata molto raramente e quando si voleva dividere un numero per un altro si moltiplicava il primo numero per il reciproco del secondo: $X:Y = X \times 1/Y$.

[21] Si tratta dell'inno convenzionalmente chiamato "Una poesia di lode a Šulgi" o "Šulgi B".

Informazioni sulla misurazione dei campi ci sono dati da due tipi di documenti:

- piani di campi disegnati su tavolette accompagnate da didascalie e misurazioni;
- testi che misurano la superficie dei campi agricoli e la loro produzione, le cosiddette, "tavolette rotonde": si tratta di un gruppo di testi che venivano elaborati poco prima del raccolto per registrare la produzione di ogni campo e prendono il nome dalla loro forma circolare.

Esistono circa 30 piante di campo. Questi documenti registrano, sul *recto*, la pianta: poiché i campi sono spesso irregolari, la loro forma è divisa in figure regolari (rettangolari o triangolari) per effettuare più facilmente il calcolo della superficie totale. Sul *verso* della tavoletta lo scriba registrava poi la superficie totale (che risultava dall'aggiungere o sottrarre le parti in cui il campo era diviso) e, talvolta, altre informazioni, come il nome del campo, la data della tavoletta o i funzionari che l'avevano misurato; si veda, ad esempio, una tavoletta appartenente alla collezione della *Freie Universität* di Berlino:[22]

Recto **Verso**

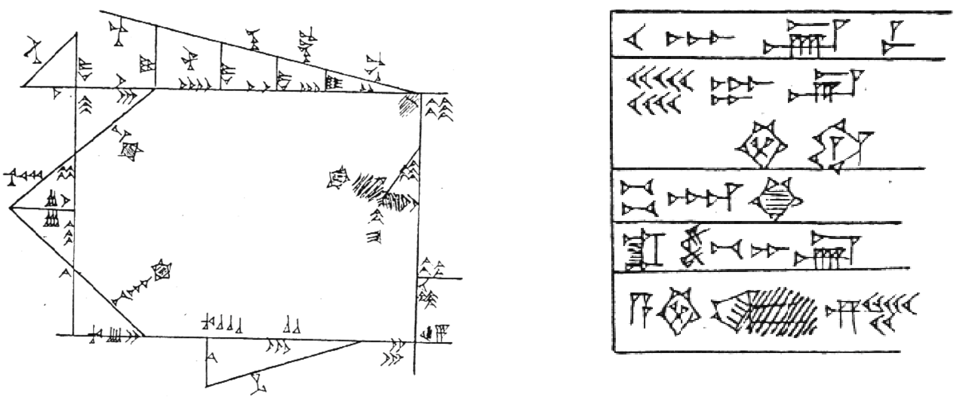


Figura 19 - Pianta di campo dell'epoca della III Dinastia di Ur (copia da Deimel, 1922, p. 57).

[22] Numero di Museo: AOFU Wengler 32

La traslitterazione e la traduzione del *verso* sono:

1.0.3 GAN_2 bar	21 (iku) è la superficie (definita) "bar"
9.0.5 GAN_2 / $ša_3$ temen	167 (iku) è la superficie (definita) "temen"
0.2.3 1/2 ki	15,5 (iku) è la superficie (definita) "ki"
šu-$nigin_2$ 10.1.2 GAN_2	Totale: 188 iku
a-$ša_3$ du_{11}-ge	(Nome del) campo: Du_{11}-ge

Dal disegno possiamo vedere che il campo ha una forma irregolare e che è stata diviso in tre settori: un rettangolo regolare, tre settori all'interno di questo rettangolo e un settore (ulteriormente suddiviso in triangoli e trapezi) al di fuori del rettangolo. Tale divisione è confermato anche dal *verso* della tavoletta che definisce le tre parti come "temen" (il rettangolo), "ki" (i settori all'interno del rettangolo) e " bar" (i settori al di fuori del rettangolo). Tale suddivisione è confermata anche dalle "tavolette rotonde" che hanno la seguente struttura:

1. misurazione del lato lungo e lato corto del campo (il settore che possiamo definire ora definire "temen": i due lati sono registrati come "mer" , cioè [lato] nord e "kur", cioè [lato] est[23]);
2. misurazione della superficie definita "bar" esterna al rettangolo regolare "temen";
3. misurazione della superficie definita "ki" interna al rettangolo regolare "temen";
4. misurazione della superficie totale coltivata (cui poi seguono indicazioni amministrative come il responsabile del campo, il raccolto previsto ecc.);

[23] Le definizioni di "mer" e "kur" erano usate per indicare i lati di un campo anche nei testi sargonici per cui si veda, ad esempio, il testo in figura 16.

La superficie totale del campo coltivato (definita qui S_{tot}) si ottiene moltiplicando i lati del campo (definiti come detto sopra, "mer" e "kur"), più la superficie "bar", meno la superficie "ki" (che rappresentava, forse una zona incolta assegnata a magazzini o altre installazioni).

S_{tot} = (mer × kur) + bar - ki

Nel calcolo della superficie totale è comune trovare piccole discrepanze nell'ordine di 10 sar o meno che non sono da interpretare come errori di calcolo ma rappresentano arrotondamenti effettuati dagli stessi scribi. Per esempio in una tavoletta conservata nel *British Museum*[24] abbiamo i seguenti dati:

mer = 460 nindan

kur = 23 ½ nindan

bar = 8,50 iku

ki = 1 iku

S_{tot} = (460 nindan × 23 ½ nindan) + 8,50 - 1 = 10810 + 8,50 - 1 = 115,60 iku

La superficie totale registrata nel testo è invece 115,50 iku. La differenza è 0,10 iku e siccome 1 iku = 100 sar l'approssimazione è nell'ordine di 10 sar.

5.1. Il sistema posizionale sessagesimale

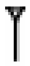
L'invenzione che più di ogni altra appartiene a questo periodo è il sistema sessagesimale posizionale che verrà ampiamente utilizzato nel corso del periodo paleo-babilonese (ca. 2000-1600 a.C.) per scrivere le cifre dei testi matematici.

Prima del periodo paleo-babilonese, sia nel IV che nel III millennio a.C., molte unità metrologiche erano già strutturate, almeno parzialmente, su una base 60.

[24] Numero di Museo BM 18063. La parte cui ci si riferisce è registratta nella colonna II del *recto*, righe 4-7.

Ad un certo punto all'inizio del periodo di Ur III, le frazioni sessagesimali e le frazioni per le unità di misura vennero combinati per creare un nuovo strumento: il sistema sessagesimale posizionale.

L'attuale sistema di rappresentazioni dei numeri è basato sul sistema indo-arabico e su un sistema di notazione posizionale. In questo sistema la posizione di una cifra in un numero determina il suo valore: una cifra "a" in una posizione n+1 ha il valore $a\times10^n$. Muovendo una cifra verso sinistra il suo valore aumenta di un fattore 10. Il sistema sessagesimale è basato su un principio leggermente diverso: le cifre sono rappresentate da numeri più piccoli di 60 e muovendosi verso sinistra il suo valore aumenta di un fattore di 60. Viceversa, muovendosi verso destra il suo valore diminuisce di un fattore di 60. I numeri sono scritti mediante l'uso di due soli simboli:

 Che rappresenta 1 (cioè 60^0), 60, o ogni potenza di 60

 Che rappresenta 10

Il numero "22" si scriverà pertanto

Mentre il numero "143" si scriverà

Il problema di questo sistema è che non contempla né l'uso della virgola né dello "0" di conseguenza un numero scritto in questo modo

ovvero 1 12 3 può essere "tradotto" come

$(1 \times 60^2) + (12 \times 60) + 3 = 4323.$

ma anche come

$(1 \times 60) + (12) + (3 \times 1/60) = 72, 05$

oppure

$(1) + (12 \times 1/60) + (3 \times 1/60^2) = 1{,}20083333$

In pratica i numeri hanno un valore "fluttuante" e solo il contesto può dirci quale è il loro "valore assoluto".[25]

Un'ultima importante considerazione sul sistema sessagesimale posizionale è che esso non fu mai usato per le misurazioni ma rappresentava solo uno strumento per effettuare i calcoli: una volta che i calcoli erano stati effettuati, lo scriba riconvertiva il numero sessagesimale nell'appropriata unità di misura.

Fino al 1976, il sistema sessagesimale posizionale non era mai stato datato a prima del periodo paleo-babilonese. Tuttavia, nel 1976 un articolo di Marvin Powell apparso su Historia Mathematica 3 mostrò come fu il periodo di Ur III a svolgere un ruolo fondamentale nella creazione di questo sistema.

[25] I numeri sessagesimali sono "tradotti", in questo articolo, utilizzando la virgola per separare tra loro i numeri interi e il punto e virgola per separare i numeri interi dai frazionari. I numeri frazionari sono separati tra loro da uno spazio. 10,7,33 = $(10 \times 60^2) + (7 \times 60) + 33 = 36453$, ma 10,7;30 = $(10 \times 60) + 7 + 30/60 = 607{,}5$. Infine ;10 7 33 = $10/60 + 7/60^2 + 33/60^3 = 0{,}16876376$

Il testo che ha mostrato a Powell che tale sistema fosse già utilizzato durante la III Dinastia di Ur è un testo amministrativo conservato nella Yale Babylonian Collection che registra una transazione d'argento.[26]

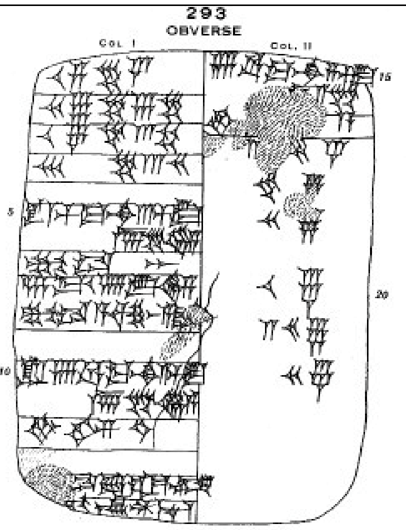


Figura 20 - Transazione d'argento - Ur III (da Keiser 1919, p. 293).

Concentriamoci ora sulle prime sei righe della parte superiore sinistra della tavoletta:

Traslitterazione	**Traduzione**
14 54	;14 54
29 56 50	;29 56 50
17 43 40	;17 43 40
30 53 20	;30 53 20
spazio vuoto	*spazio vuoto*
ŠU.NIGIN$_2$ 1 1/2 ma-na 3 1/2 gin$_2$ la$_2$ 7 še ku$_3$-a	Totale: 1,5 mana 3,5 gin$_2$ meno 7 še in argento

[26] Numero di Museo YBC 1793.

Il totale di argento, se trasformiamo tutto in "mana" (l'unità di base per il peso) è di ca. 1,5576 da:

1 mana = 60 gin_2

1 mana = 10800 še

Il numero 1,5576 scritta sistema posizionale sessagesimale è 1;33 27 40 che è uguale alla somma della linea 1-4:

;14 54 + ;29 56 50 + ;17 43 40 + ;30 53 20 = 1;33 27 50.

La differenza tra 1;33 27 40 e la somma della linea 1-4, 1;33 27 50, può essere facilmente spiegata dal fatto che le approssimazioni sono una pratica comune nelle misurazioni sia per quanto riguarda i pesi sia per quanto riguarda le misure di superfici (come abbiamo visto nel paragrafo 5).

Per riassumere, non c'è dubbio che l'inizio del II millennio, cioè il periodo paleo-babilonese, ci abbia lasciato, di gran lunga, il maggior numero di testi matematici di tutti e tre i millenni di cultura cuneiforme. Tuttavia la matematica paleo-babilonese non rappresenta un fenomeno isolato: l'uso di formule semplificate, alcune tipologie di testi, lo sviluppo del sistema sessagesimale posizionale sono tutti elementi che indicano come la sua origine possa essere chiaramente ricondotta più indietro nel tempo in periodi precedenti fino alla nascita della scrittura nel IV millennio a.C.

Bibliografia

Archi A. (1989), Tables de comptes eblaites, *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale* 83/1, pp. 1-6.

Deimel A. (1922), *Orientalia Series Prior* 5, Roma, Pontificio Istituto Biblico.

Deimel A. (1923), *Die Inschriften von Fara*, *2. Schultexte aus Fara*, Lipsia, J.C. Hinrichs.

Donbaz V. - Foster B. (1982), *Sargonic Texts from Telloh in the Istanbul Archaeological Museums*, *American Research Institute im Turkey Monographs* 2, Philadelphia 1982.

Englund R. K. - Damerow P. - Nissen H. J. (1993), *Archaic Bookkeeping, Early Writing and Techniques of Economic Administration in the Ancient Near East*, Londra - Chicago, The University of Chicago Press.

Friberg J. (1986), *The early roots of Babylonian mathematics 3: Three remarkable texts from ancient Ebla*, Vicino Oriente 6, pp. 3-25.

Friberg J. (1987-1990), *Mathematik*, Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie 7, pp. 531-585.

Jestin R. (1937), *Tablettes sumériennes de Shuruppak conservées au Musée de Stamboul*, Parigi, E. de Boccard.

Jones T. B. - Snyder J. W. (1961), *Sumerian Economic Texts from the Third Ur Dynasty*, Minneapolis, University of Minnesota Press.

Keiser C. (1919), *Selected Temple Documents of the Ur Dynasty*, *Yale Oriental Series* 4, New Haven, Yale University Press.

Limet H. (1973), *Etude de Documents de la Période d'Agade*, Parigi, Les Belles Lettres.

Monaco S. F. (2011), *Archaic field measurements texts*, Rivista degli Studi Orientali, Nuova Serie 84, pp. 11-16.

Powell M. (1976), *The antecedents of Old Babylonian place notation and the early history of Babylonian mathematics*, Historia Mathematica 3, pp. 417-439.

Powell M. (1987-1990), *Masse und Gewichte*, Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie 7, pp. 457-517.

Robson E. (2008), *Mathematics in Ancient Iraq*, *a Social History*, Princeton - Oxford, Princeton University Press.