III Congresso Nazionale
Mathesis - Società Italiana di Matematica
Genova, 21- 24 ottobre 2012

Gino Loria

Eccentricità e misteri dei numeri

La fonte di tutta la matematica
risiede nei numeri interi.

MINKOWSKI.

Signori,

I.

Alcuni anni or sono io soggiornai durante l'estate in una delle più famose stazioni balneari e climatiche d'Italia. L'antica e ben giustificata reputazione di quelle acque, la purezza del cielo, la dolcezza del clima, l'ineffabile bellezza del circostante paesaggio facevano accorrere a frotte in quella meravigliosa conca di smeraldo i desiderosi di riacquistare la salute. E siccome la durata della cura era di regola breve, mentre io feci colà una dimora assai lunga, così il numero di persone che sfilarono sotto i miei occhi venne da me giudicato ingentissimo; anzi, il ricordo dei dolori e delle speranze che mi si erano parati innanzi era nel mio animo così vivo che tal numero finì per assumere nella mia mente proporzioni fantastiche.

Per rendermi un conto esatto dell'entità di esso chiesi qualche informazione alla Direzione di quello Stabilimento e così seppi che, anche nelle stagioni più affollate, il numero dei bagnanti non supera mai *diecimila*, onde, a calcolare largamente, le persone da me viste non potevano essere in numero superiore a *cinquemila*.

Questa notizia, mentre fece crescere considerevolmente il mio rispetto per questo numero *cinquemila* (che avevo udito tante volte disprezzato e vilipeso quando rappresentava il compenso massimo concesso dal Ministero della pubblica istruzione alle fatiche annue de' suoi dipendenti) mi fece riflettere che avrei dovuto assistere per un secolo intero, dal principio alla fine di ogni stagione, a quella sfilata di pazienti, per formarmi un concetto del numero *un milione*, di cui molti ritengono di avere un'idea precisa, mentre, pronunciandone il nome, non fanno che ripetere automaticamente una parola udita sino dalla nascita.

Benchè l'ottimo ed illustre Direttore dello Stabilimento in questione si facesse meco mallevadore essere l'efficacia delle acque ivi somministrate, così portentosa che io avrei potuto di sicuro ripetere cento volte quell'esperienza, pure io ho rinunciato a provarmivi. Ma, con l'umiliazione prodotta dall'orgoglio ferito, confessai a me stesso che, mentre Natura mi aveva largita in qualche misura *intuizione geometrica* in tutti gli spazi, mi aveva totalmente negata l'analoga dote relativa all'aritmetica; sicchè GIORGIO DARWIN avrebbe certamente sentenziato essere il mio « occhio matematico » aperto soltanto per metà.

II.

In processo di tempo alcuni nuovi fatti giunti al mio orecchio arrecarono qualche lenimento al mio dolore (a dir vero, la consolazione dei disperati) perchè mi mostrarono che l'incapacità, avvertita in me, di concepire il numero che corrisponde ad un'ingente totalità d'individui doveva essere comune retaggio della povera umanità!

Ed infatti, come spiegare altrimenti che l'Amministrazione del celebre Palazzo di Cristallo di Londra, pubblicando nel 1864 la statistica delle persone che lo avevano visitato nel primo decennio di vita (dalla quale risultava che tal numero supera i *quindici milioni*), abbia reputato necessario illustrare questo dato, esponendo al pubblico un nastro di cotone sul quale stavano regolarmente marcati *un milione* di punti neri? Evidentemente chi si attenne a tale sistema giudicava che la semplice enunciazione del numero *quindici milioni* era insufficiente a porgere un'idea adeguata della fiumana di persone che avevano oltrepassata la soglia del famoso edifizio.

Dello stesso genere ed espressione della stessa manchevolezza è un espediente a cui si ricorse assai più di recente: poco tempo fà un dilettante di statistica propose di calcolare con bastante approssimazione il numero degli ordinari volumi in 8°, che verrebbero riempiti da tutto quanto uscì dalla penna dell'uomo, dalla creazione del mondo sino ad oggi; ora il numero risultante è di tale inconcepibile grandezza che si credette aggiungere, a titolo di chiarimento, che una persona la quale leggesse ogni giorno uno di quei volumi (ed i direttori delle Biblioteche circolanti si fanno garanti che siffatti « divoratori di libri » sono assai meno rari di quanto volgarmente si creda) potrebbe esaurire quell'enorme *stock* di carta stampata in *trentamila anni* (1).

III.

Da questi fatti — e da molti altri congeneri, che la discrezione mi consiglia di passare sotto silenzio — fui tratto a concludere che il rappresentare i numeri astratti sopra collezioni di persone o di cose, scambio di agevolarne, ne ostacolasse il concepimento; e pensai che a rappresentazioni veramente utili si sarebbe forse giunti, ricorrendo a corrispondenze fra numeri ed intervalli di tempo, le quali parevami fossero state implicitamente suggerite dall'HAMILTON, quando insegnava essere « l'algebra la scienza del puro tempo » (2). Ma anche qui mi si preparava una delusione amarissima!

Invero, un minuto primo è ritenuto un intervallo di tempo così breve (anche se misurato durante un discorso noioso) che si sarebbe propensi a giudicare essere *non* enormente lungo il periodo risultante da *un miliardo* di minuti. Or bene è stato calcolato dal compianto matematico HERMANN SCHUBERT che il 28 aprile 1902, alle 10.40 del mattino, compì appunto un miliardo di minuti dalla nascita di Cristo. Ora, se si fa una rassegna mentale degl'innumerevoli radicali rivolgimenti politici e sociali avvenuti in quel lasso

(1) E. MOREL nel *Mercure de France* del 16 febbraio 1912.

(2) Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, *Theory of conjugate functions or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time* (*Trans. of the R. Irish Acad.*, Vol. XVII, Part. II, 1835).

di tempo, all'enorme lavoro compiuto in tutti gli svariatissimi campi in cui si è finora estrinsecata l'attività dell'uomo, nelle arti della pace e della guerra, nelle scienze pure ed applicate, nell'industria e nei commerci, e si tiene anche il debito conto degli scoloriti periodi di stasi o di regresso, durante i quali il genere umano sembrò immerso in sterile torpore od invaso da pazzo furore, si è forzati a concludere che un miliardo di minuti è un periodo estremamente più considerevole di quanto erasi a prima giunto supposto, e che quindi *un miliardo* è una totalità assai più ingente di quanto giudicano persino coloro che ne menano vanto come loro blasone.

Nè minori ostacoli o minori illusioni e delusioni attendono chi ricorre a rappresentazioni spaziali dei numeri. Infatti, chi mai può in coscienza affermarsi capace di concepire la più modesta delle lunghezze che si considerano in Astronomia — quella che si assume per distanza fondamentale del nostro sistema planetario, cioè l'intervallo che separa la terra dal sole — la quale, in base alle calcolazioni più recenti, ascende all'incirca a 150 milioni di chilometri? Ben si avvidero di tale impossibilità i più esperti espositori della materia, i quali, a scopo di dilucidazione, si affrettarono a soggiungere che un'automobile la quale coprisse 50 chilometri all'ora, ove non fosse afflitta da alcuna *panne*, per percorrere quella distanza richiederebbe 340 anni.

IV.

Le accennate difficoltà che s'incontrano oggi nel concepire numeri molto grandi sembra siano state avvertite sino dall'Antichità più remota. E invero nella Sacra Scrittura si cerca indarno qualche numero maggiore a *diecimila*; mentre i Babilonesi, che pure ebbero fama di eccellenti calcolatori, non si spinsero oltre *centomila*. Gli Egiziani andarono più in là; ma il fatto che *un milione* in geroglifici viene rappresentato con la figura di un uomo che alza le braccia in atto di somma meraviglia, è sintomo non dubbio del terrore quasi religioso che quel numero incuteva nei sudditi de' Faraoni. I popoli dell'Asia sembrano essersi spinti assai più oltre percorrendo la serie naturale dei numeri, chè da secoli i Cinesi toccarono il numero rappresentato dall'unità seguita da quattordici zeri e gl'Indiani quello analogo con ventuno zeri; ma la loro energia mentale era sufficiente perchè concepissero realmente numeri di tale stupefacente entità? Ci sia lecito dubitarne!

Neppure i Greci — questo popolo nato alla ricerca scientifica e che, specialmente nelle scienze esatte, lasciò dietro a sè una scìa di abbagliante splendore — seppero riuscire vittoriosi degli ostacoli che offre il concepire numeri molto elevati. Infatti, l'avere ARCHIMEDE reputato non indegno di lui e giovevole ai suoi contemporanei lo scrivere un'opera (l'*Arenario*) avente lo scopo apparentemente futile di mostrare *essere erroneo il ritenere infinito il numero dei granelli di arena costituenti il fondo dei mari*, mostra ad evidenza l'incapacità di coloro a cui il grande matematico si rivolgeva d'immaginare numeri superiori ad un certo limite, dal momento che essi, giunti ad un certo punto, quasi spossati dall'immane sforzo compiuto, al proseguire preferirono annegarsi nell'infinito, il

Mar che non ha fondo e non ha lido.

Per conseguire il proprio intento il sommo Siracusano concepì uno speciale sistema di numerazione assai ingegnoso e così potente che, al dir dell'inventore, abilita a scrivere, non soltanto il numero che erasi preteso infinito, ma anche quello esprimente quanti pulviscoli capirebbero in una sfera concentrica alla terra e passante per il sole. È facile vedere che ARCHIMEDE non esagerava nel vantare la potenza dello strumento aritmetico da lui creato, dal momento che ha somministrato i mezzi per rappresentare graficamente tutti i numeri compresi fra l'unità ed il numero che oggi si scriverebbe facendo seguire 1 da ottanta milioni di zeri. È superfluo avvertire che quì si parla esclusivamente di possibilità *teorica*; chè, supposto una persona rimanga al lavoro ogni giorno durante il periodo legale di otto ore e scriva una cifra per secondo, in un anno non raggiungerebbe i quaranta milioni di cifre, onde *duemila* anni le sarebbero necessari per scrivere il surriferito numero, il quale occuperebbe una biblioteca di ottantamila volumi (1): ora

(1) Nel fare questo calcolo si è ritenuto che ogni pagina contenga 2000 cifre e ciascun volume 500 pagine, onde in ogni volume vengano a trovarsi un milione di cifre.

(pur troppo!) fra tutte le portentose invenzioni e scoperte che gli antichi attribuiscono ad ARCHIMEDE non si trova alcuno specifico per moltiplicare a dismisura la durata della vita dell'uomo!

V.

Le enormi difficoltà in cui si è imbattuta e contro cui dà ancora di cozzo chiunque voglia formarsi una chiara immagine dei numeri di considerevole grandezza — difficoltà delle quali le circostanze surriferite offrono prove indiscutibili ed impressionanti — sembrano trascinare alla conclusione che l'*intuizione aritmetica* sia una facoltà estremamente più rara dell'*intuizione geometrica*. Ora, siccome non v'ha dubbio che i più grandi calcolatori che ricordi la storia, raggiunsero la fenomenale abilità con cui stupirono il mondo, coltivando una rara qualità latente con l'esercizio incessante, anzi con un sapiente allenamento, così si è naturalmente condotti a pensare che esistano dei procedimenti per sviluppare l'intuizione aritmetica non dissimili da quelli che si sogliono impiegare per uno scopo analogo nel campo geometrico (1). Chi voglia rendersi conto della somma importanza educativa, anche dal punto di vista della vita sociale, di cui sarebbe ricca un'azione in questo senso, non ha che tenere presente che questa miopia aritmetica, così deplorevolmente diffusa nel tempo e nello spazio, spiega il senso d'ingenua meraviglia, che talora degenera in incredulità cieca, ostinata e persino sciocca, da cui molti si sentono invasi, udendo enunciare l'enormità dei risultati a cui guidano alcune semplicissime operazioni aritmetiche; ora sia pure che, come voleva BACONE, la meraviglia sia madre di scienza, ma è pur sempre figlia dell'ignoranza!

La più antica, e forse anche la più celebre circostanza in cui si è manifestato questo senso di scettico stupore è collegata all'invenzione del giuoco degli scacchi. Le cronache del tempo narrano

---

(1) Volendo iniziare ricerche in tale senso converrebbe tener conto dei geniali studi fatti intorno alla psicologia dei calcolatori eccezionali, studi i cui più interessanti risultati sono raccolti nel volume di A. BINET, *Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs* (Paris, 1894).

che l'indiano Sissa Ben Daher, al quale viene attribuito il mirabile trovato, chiese al proprio Re, quale compenso alla sua fatica, la massa di frumento che nasce deponendone un chicco nella prima casella della scacchiera, 2 nella seconda, 4 nella terza, e così via. Il risultante numero di grani è così enorme (1) che non tardò a divenire proverbiale, sicchè fu invocato anche da Dante, il quale, giunto al cospetto di Dio, vide un tale sfavillio di punti brillanti, che, nell'impossibilità di assegnare quante fossero le scintille da cui era abbagliato, scrisse che

> . . . eran tante, che il numero loro
> Più che il doppiar degli scacchi s'immilla (2).

La storia nulla ci apprende intorno all'inquietante problema se Sissa Ben Daher avesse coscienza di quanto indiscreta fosse la sua modesta richiesta. Ma quando il suo Re riconobbe che la quantità di grano richiesta, distribuita uniformemente sul suolo avrebbe ricoperta tutta la terra, formandovi uno strato dello spessore d'un centimetro, per quanto fervidamente ammirasse il celebre giuoco, avrà dovuto riconoscere che il premio non era proporzionato all'indiscutibile pregio dell'ingegnosa invenzione. Da quel giorno l'umanità, che un tempo nutriva completa fiducia nell'onesta aritmetica, fu avvertita che questa purissima scienza era capace di tendere tranelli ed insidie a coloro che ignoravano l'immane potenza che si nasconde sotto il velame di procedimenti di semplicità infantile.

Nè minore fu lo scetticismo che molti manifestarono allorquando nel 1871 venne imposto dalla Germania alla Francia il pagamento di cinque miliardi di franchi a titolo d'indennità di guerra; con generale stupore venne allora notato che tale enorme somma la nostra sorella latina avrebbe trovato nelle casse dello Stato ove nel 1413 (cioè poco dopo la morte di Giovanna d'Arco) il re Carlo VI avesse avuta la previdenza di porre *una lira* all'interesse composto del 5 %.

A siffatte stupefacenti genesi di grandi numeri, provenienti

---

(1) Questo numero è $2^{64} - 1 = (2^{32} + 1)(2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1) = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

(2) *Paradiso*, Canto XXVIII, vv. 91-92.

dall'applicazione delle progressioni aritmetiche, ne fanno riscontro altre, non meno sorprendenti, che hanno la propria radice nell'analisi combinatoria; giacchè il numero dei gruppi che si possono formare con una certa totalità, anche non numerosa, di elementi è enormemente più grande di quanto volgarmente si creda. Da siffatta deplorevolissima ignoranza traggono larghi profitti gli organizzatori delle bische alte e basse, ufficiali e clandestine, per assegnare premi assolutamente irrisori ai credenzoni adescati dal miraggio di far fortuna.

La stessa ignoranza spiega come sia oggetto di estesissima meraviglia il fatto che, con le sole sette note musicali sia possibile comporre tanti motivi quanti son quelli che da secoli formano la delizia del genere umano. Vero è che, da qualche tempo a questa parte si sarebbe tentati di pensare che la miniera musicale si avvii verso l'esaurimento, chè agli *anni di abbondanza* caratterizzati dai nomi gloriosi di GOUNOD, MEYERBEER, ROSSINI, hanno seguìto *anni di carestia*, in cui un'unica idea musicale, sapientemente ammanita e prudentemente diluita, serve ad intrattenere il pubblico per un'intera serata. Ma il matematico, in grado di far bene i calcoli, incuora e sprona al lavoro i giovani maestri, accertandoli che le combinazioni di note tuttora inedite (anche se ci si restringe a quelle che obbediscono alle leggi dell'armonia) sono tanto numerose da permettere la creazione di un immenso numero di capolavori.

VI.

Per assistere la misera umanità nell'arduo còmpito di concepire i numeri della serie naturale, qualunque ne sia la grandezza, da tempo immemorabile è invalso il costume di rappresentarne gli elementi sopra altrettanti punti equidistanti di una retta indefinita. Ora, contro tale artificio nulla si può obbiettare se si ritiene che vi si giunse, quasi inconsciamente, scrivendo i numeri 1, 2, 3..., di seguito ed a distanze eguali, non trovando ragione per far governare gl'intervalli di separazione da una legge diversa dall'uguaglianza. Ma se invece s'intese di stabilire una rappresentazione esprimente analogie sostanziali e profonde fra enti matematici differenti, concedetemi, Signori, che io dichiari francamente che io ritengo mai sia stata suggerita corrispondenza più grossolana, anzi infedele e traditrice. Essa infatti fa corrispondere l'eterogeneo all'omogeneo; chè mentre, se si astrae dalla posizione occupata, nulla abilita a distinguere un punto di una retta da tutti gli altri, si può dire che, al contrario, ogni elemento della serie naturale abbia qualità specifiche che lo caratterizzano e servono a distinguerlo da tutti gli altri. Così — per citare un solo esempio — un notissimo aritmologo francese, EDOARDO LUCAS, ha dimostrato che 5 è *l'unico numero* che sia somma dei quadrati di due numeri consecutivi ed il cui quadrato sia esprimibile nello stesso modo e che 7 è, a sua volta, *l'unico numero* che sia eguale al doppio di un quadrato meno uno ed il cui quadrato si possa presentare sotto il medesimo aspetto (1).

Da tale disparità di contegno degli elementi della serie naturale trae origine la presenza nella Teoria dei Numeri di proposizioni curiosissime, il cui enunciato è intelligibile a *tutti*, la cui verità può essere da *tutti* riconosciuta agevolmente in innumerevoli casi e che perciò *tutti* s'illudono di poter dimostrare in generale, mentre (se si prescinde dai rari casi in cui si possono stabilire mediante l'*induzione completa*) celano le più gravi difficoltà. E si noti che il sormontarle è tanto più urgente giacchè i matematici sono così propensi alle più ampie generalizzazioni, che anche scienziati dallo sguardo d'aquila, nel campo aritmetico, furono trascinati ad affermazioni che i posteri non poterono ratificare; sicchè nell'alta Aritmetica, più che in qualunque altra disciplina, bisogna tenere in rigorosa quarantena qualunque proposizione che non sia stata peranco stabilita in modo inoppugnabile.

Tale completa eterogeneità della serie naturale venne avvertita sino dai primi albòri della ricerca matematica; in pari tempo si percepì la necessità imprescindibile di porre un po' d'ordine in quella illimitata successione d'individui, avvicinando e riunendo in ampie schiere i numeri aventi qualche qualità in comune.

Una prima ripartizione (che si suole far risalire a PITAGORA, ma che certamente non rimase sconosciuta ad alcun popolo che

---

(1) *Sur les propriétés caractéristiques des nombres 5 et 7* (*Nouvelles Annales de mathém.*, II Sér. T. XVIII, 1879).

siasi elevato al disopra della più rozza barbarie) è quella di tutti i numeri in *pari* e *dispari*. Per quanto semplice e naturale essa sia, tale distinzione è fondamentale, non soltanto dal punto di vista prettamente aritmetico, ma per la Matematica tutta. E per convincervene, Signori, io v'invito a spiccare un volo, degno del più ardito aviatore, verso le più eccelse regioni della nostra scienza; sarete così in grado di constatare come le quàdriche di uno spazio lineare godano proprietà differentissime secondochè il numero delle dimensioni dello spazio ambiente sia *pari* o *dispari*; similmente la Cinematica di uno spazio lineare manifesta fenomeni radicalmente differenti a norma della parità della dimensione di questo; ed anche nella teoria dei determinanti di specie superiore è ineluttabile la necessità di distinguere il caso in cui questa sia espressa da un numero *pari*, da quello in cui lo sia da uno *dispari*.

VII.

Altrettanto antica (come vien dimostrato da innumerevoli squarci delle opere di PLATONE) della separazione di tutti gl'interi in pari e dispari, ma ancora più feconda di mirabili conseguenze, è la distinzione di tutti i numeri in *primi* e *composti*. Ora se si percorre passo passo la serie naturale e si contrassegnano quegli elementi che sono numeri primi ci si accorge che, man mano che si procede, i numeri segnati divengono più rari, onde nasce spontaneamente il sospetto che, a partire da un determinato elemento, di quella serie, tutti i numeri siano composti. Tale sospetto dev'essere di antichissima data, dal momento che *papà* EUCLIDE (od altri prima di lui) reputò necessario di mostrarne l'infondatezza con l'insegnare a costruire una successione illimitata di numeri *tutti primi*. La fondamentale proposizione risultante può enunciarsi dicendo che *la progressione aritmetica che ha l'unità tanto per primo termine quanto per differenza costante abbraccia infiniti numeri primi*. Sussiste un teorema analogo per qualsia altra progressione aritmetica? Evidentemente affinchè ciò succeda è *necessario* che il primo termine e la differenza costante non abbiano alcun fattore comune; ma quella condizione è dessa anche *sufficiente*? Per tale venne ritenuta dal

LEGENDRE (1) e tale fu stabilita poi *elementarmente* per alcuni speciali valori della ragione. In generale necessità e sufficienza vennero inoppugnabilmente dimostrate dal LEJEUNE-DIRICHLET come esempio impressionante di applicazione dell'Analisi infinitesimale all'Aritmetica (2). L'argomentazione da lui all'uopo congegnata è senza dubbio meritevole della sconfinata ammirazione che ha dovunque destato; ma essa occupa non meno di ventisei pagine in-4°, ed è di natura così elevata che da molti vien giudicata

Tanto amara che poco è più morte;

essa costringe all'assenso, ma non rivela l'intima ragione della verità a cui mira, come accade a tutti quei ragionamenti in cui entrano in giuoco considerazioni non aventi legami necessari ed evidenti con lo scopo che si prefiggono, quale sarebbe, per citare un esempio noto a tutti, il processo logico che, attraverso un passaggio al limite, conduce all'espressione del volume della piramide. Se non che, mentre per questo teorema, in seguito alle ricerche del DEHN (3), si è oggi sicuri che le considerazioni infinitesimali sono inevitabili, altrettanto non si può ripetere per la proposizione aritmetica surriferita. Sicchè ci troviamo inaspettatamente di fronte ad un enigma che attende un Edipo che ce lo spieghi; anzi alla ricerca di un ragionamento aritmetico che guidi a stabilire la presenza d'infiniti numeri primi in qualsivoglia progressione aritmetica si attribuisce oggi tanta importanza che chi riuscirà ad effettuarla... o a dimostrare che la cosa è impossibile, può anticipatamente fare assegnamento sul vedere il proprio nome scritto a caratteri d'oro nei fasti della nostra scienza.

Non è questo l'unico punto della Teoria dei Numeri che sia ancora avvolto nel mistero, chè tale disciplina sembra compiacersi di cospargere di baratri spaventevoli e di vette inaccessibili la via che il giovane viaggiatore fiducioso ed inesperto giudica piana e sicura. Ne volete altre prove, Signori? Eccomi pronto a fornirvele!

---

(1) *Mém. de l'Académie des Sciences*, Paris, 1785. Nella *Théorie des nombres* (IV Partie, § 9) si trova anche un primo tentativo di dimostrazione.

(2) *Abhandlungen der K. Preuss. Akad. der Wissensch.*, 1837.

(3) M. DEHN, *Ueber den Rauminhalt* (*Mathem. Annalen*, T. LV, 1902).

Nel 1845 un celebre matematico francese, GIUSEPPE BERTRAND, nel corso di alcune ricerche sulla teoria delle sostituzioni (1) fu indotto ad ammettere che *se il numero* n *è superiore a* 7, *fra* $\frac{n}{2}$ *e* n — 2 *esiste sempre un numero primo*. Quale proposizione più modesta ed umile si può immaginare! E tuttavia l'eminente geometra vide frustrati tutti gli sforzi da lui ripetutamente fatti per dimostrarla. Ciò non ostante, non nutrendo dubbio alcuno intorno alla verità di essa, coraggiosamente l'introdusse nella scienza sotto il nome di *postulato*: ed a ragione si appigliò a tale partito, perchè, dieci anni dopo, il sommo geometra russo TCHÉBYCHEFF riuscì a dimostrarla rigorosamente, cioè a trasformarla in un vero e proprio *teorema* (2).

Così, verso la metà del secolo XVIII, un oscuro aritmologo, il GOLBACH, riscontrò sopra moltissimi esempi che *qualsia numero pari può decomporsi* (anzi, in parecchi modi) *nella somma di due numeri primi* (3) e segnalò questo teorema come *probabile* in una lettera scritta addì 7 Giugno 1742. Un investigatore contemporaneo lungimirante, LEONARDO EULERO, si affrettò a dichiarare (4) di nutrire piena fede nella verità di tale legge, senza però riuscire a congegnarne una solida dimostrazione. Nè miglior fortuna arrise ai matematici posteriori; sicchè alla fine del secolo passato GIORGIO CANTOR giudicò opportuno istituire ricerche sperimentali intorno alla verita della legge di Goldbach e, col valido concorso di un suo egregio discepolo (5), potè constatare che sussiste per tutti i numeri non superiori a 3000. La probabilità che essa valga sempre venne così notevolmente accresciuta, ma la certezza non venne peranco raggiunta. L'arrivarvi costituisce oggi uno dei più ardenti *desiderata* dell'Aritmetica superiore; a cimentarsi all'ardua prova si può essere spronati ed incoraggiati dalla speranza di giungere ad un ragionamento atto

(1) *Journal de l'Ecole polytéchnique*, XXX Cahier.

(2) *Mémoire sur les nombres premiers* (*Journ. de mathém. pures et appliquées*, T. XVI, 1854; oppure *Œuvres de P. L. Tchebycheff*, T. I., St.-Pétersbourg, 1899, p. 49.

(3) *Correspondanee mathématique et physique de quelques célèbres géometres du* XVIII *Siècle*, T. I. (St. Pétersbourg, 1843), p. 127.

(4) Ivi, p. 135.

(5) R. HAUSSNER, *Tafeln für das Goldbach'sche Gesetz* (*Nova Acta Leopol. Carol. Akad.*, Bd. LXXII, 1897).

a porre in evidenza gli eventuali casi in cui la legge di Goldbach si trova in difetto e capace anche di decidere se (come ebbe a congetturare il principe DE POLIGNAC) sussiste l'analoga proposizione: *qualsia numero pari può considerarsi come differenza di due numeri primi.*

Siami lecito segnalarvi ancora, Signori, un'altra questione tuttora irresoluta collegata alla teoria dei numeri primi. Nel 1878 un egregio matematico inglese (1). ha fissato la propria attenzione sopra le coppie di numeri dispari consecutivi, entrambi primi, quali ad esempio sarebbero 11 e 13, 29 e 31; ed ha notato che fra 1 e 100,000 si trovano 1125 coppie siffatte, mentre fra 1,000,000 e 1,100,000 non ve ne sono che 725 e fra 8,000,000 e 8,100,000 che 518. Ora tale constatazione di fatto porta a supporre una tendenza di quelle coppie a scomparire di mano in mano che si procede nella serie naturale dei numeri; onde si è portati a *domandarsi* se, al di là di un certo limite, di tali coppie se ne trovino ancora; si *può domandare*, ma, per quanto mi consta, oggi non si *sa rispondere.*

VIII.

Ai teoremi aritmetici, di enunciato intelligibilissimo a tutti, ma di dimostrazione estremamente ardua o sinora ignota, collegati alla decomposizione dei numeri ne' loro fattori primi, fanno riscontro analoghi problemi non meno traditori, di aspetto oltremodo semplice, ma la cui soluzione oppone ostacoli di eccezionale gravità a chi intenda o sia costretto a risolverli nell'ipotesi che i dati siano numeri molto grandi.

Fra essi è veramente tipica la questione di decomporre un numero ne' suoi fattori primi, in particolare di stabilire un criterio sicuro per decidere se un dato numero sia primo o composto. Qualunque modesto trattato di aritmetica espone una soluzione assai piana della prima, la cui scoperta si perde nella notte dei

---

(1) J. W. L. GLAISHER, *An enumeration of prime pairs* (*Messenger of Mathematics*, II Ser., T. VIII, 1878).

$2^n \pm 1$ per n compreso fra 1 e 64, abbia fatta la seguente impressionante dichiarazione (1).

« Di tutte le decomposizioni da noi effettuate nessuna ha richiesti tanto tempo e tanta pazienza quanto quella del numero $2^{58} + 1$. Gli ultimi due fattori di tale numero hanno ciascuno *nove* cifre. Il loro prodotto, che si trattava appunto di decomporre, è il numero *diciasette* cifre

57 646 075 230 342 349.

Se quei fattori venissero a perdersi ci mancherebbe il coraggio di ricominciare il lavoro fatto ed è probabile che passerebbero molti secoli prima che si riuscisse a ritrovarli ».

Non è certo il caso che io mi arresti in questo momento ad esporre, nemmeno in ristrettissimo compendio, gli espedienti, molti dei quali veramente profondi ed ingegnosissimi, che furono proposti per venire a capo delle difficoltà che ho segnalate, almeno per numeri di forme particolari, espedienti i quali, *se raccolti con discernimento, e coordinati con arte e scienza darebbero origine ad una monografia oltremodo utile ed interessante,* che potrebbe fungere quale punto di partenza per ulteriori investigazioni (2). E nemmeno mi è dato di descrivere i potenti metodi analitici che vennero mobilitati e posti in azione per determinare la distribuzione, o, come si preferisce dire, la « frequenza » dei numeri primi, metodi che, dopo le meritorie fatiche di GABRIELE TORELLI ed EDMONDO LANDAU, sono a portata di mano di chiunque voglia penetrare in un campo la cui strana fecondità costituisce una delle meraviglie della Matematica odierna.

Al contrario voglio e debbo arrestarmi un istante a rilevare come la mancanza di un criterio sicuro per decidere se un dato numero sia o non primo, ossia l'ignoranza di una espressione analitica che comprenda tutti e soli i numeri primi, abbia per deplorevole conseguenza la presenza nella nostra scienza di problemi

(1) Riferita da E. LUCAS nella sua *Théorie des nombres*, T. I. (Paris, 1888), p. 326.

(2) Molti elementi per tale lavoro si trovano nelle annate recenti di *The educational Times*.

tempi, mentre le difficoltà insite nella seconda sembrano state segnalate da molti secoli, dal momento che ERATOSTENE, un geometra del periodo greco-alessandrino, credette opportuno di fornire, col suo celebre « staccio », la soluzione empirica di essa risultante dalla costruzione di una tavola di numeri primi. Ora che nella pratica il metodo consueto per risolvere un numero nei suoi elementi semplici presti soccorsi di molto discutibile valore è dimostrato da un curioso errore commesso dal terzo de' matematici che portarono il nome di GIOVANNI BERNOULLI, il quale sostenne (1) che il numero $10^{11} + 1$ non possiede altri fattori primi che 11 e 23, mentre ne ha altri due di quattro cifre ciascuno (2).

Forse di un metodo di decomposizione sufficiente a soddisfare in qualunque caso le esigenze della pratica era in possesso il fondatore dell'odierna Aritmetica superiore, il FERMAT; induce a congetturarlo il fatto che, con impressionante disinvoltura, ad analoga domanda del Padre MERSENNE, rispose (3) essere il numero di *dodici* cifre

$$100\ 895\ 598\ 169$$

da lui propostogli il prodotto dei due numeri di *sei* cifre ciascuno

$$898\ 423 \quad , \quad 112\ 203.$$

Se quell'ipotesi è conforme al vero, se cioè FERMAT recò seco nella tomba questo come altri importantissimi segreti, dalla Città superna ove egli indubbiamente si trova, contemplerà, forse sorridendo sdegnosamente, i suoi posteri che nuotano affannosamente per raggiungere una sponda in cui egli giunse ad approdare felicemente. E poichè troppo mi dorrebbe che qualcuno di voi, Signori, mi ritenesse capace di caricare le tinte per artificio oratorio, reputo opportuno riferire come uno dei più intrepidi calcolatori che hanno esistito, il LANDRY, colui al quale si è debitori della composizione in fattori primi di tutti i numeri della forma

(1) In un lavoro *Sur les fractions décimales périodiques* inserito nei *Mem. de l'Acad. de Berlin*, 1771.

(2) Cfr. P. SEELHOFF, *Ein Rechnenfehler von J. Bernoulli* (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, T. XXXI, 1886).

(3) Lettera del 6 aprile 1643 pubblicata in *Œuvres de Fermat*, T. II, p. 256.

importanti, anche fuori del campo prettamente aritmetico, la cui soluzione da tempo, ma invano, ardentemente s'invoca.

E poichè, come ben disse NEWTON, *exempla plus prosunt quam praecepta*, citerò, a sostegno di tale asserto, un fatto notissimo: GAUSS ha dimostrato potersi costruire con riga e compasso tutti e soli quei poligoni regolari di cui il numero dei lati è espresso da $2^{2^{\mu}} + 1$ ed inoltre è primo. Ora per $\mu = 1$, 2 e 3 si ottengono da questa formola i numeri 5, 17, 257 che son primi; FERMAT credeva che altrettanto accadesse qualunque fosse il valore attribuito all'esponente μ, ma non si tardò a riconoscere che egli si era ingannato, chè, sino dal 1732, EULERO dimostrò che $2^{32} + 1$ è divisibile per 641 (1); più tardi EISENSTEIN asserì che la formola di GAUSS abbraccia infiniti numeri primi; ma, sino a che ciò non sia dimostrato, *si ignora se i poligoni regolari costruibili elementarmente siano o non in numero illimitato.*

Affine a siffatta questione geometrica è un'altra d'indole schiettamente aritmetica proveniente dalla considerazione di « numeri perfetti », tali, cioè, che ciascuno pareggi la somma de' suoi divisori. EUCLIDE ha assegnata la seguente espressione generale dei numeri perfetti PARI (*ed oggi ancora si ignora se ve ne siano di* DISPARI (2)), $(2^n - 1)\, 2^{n-1}$, con la clausola che $2^n - 1$ sia un numero primo; orbene se fosse dimostrato che per valori di n superiori ad un certo limite, il numero $2^n - 1$ è sempre composto, si sarebbe *ipso facto* in diritto di affermare che *i numeri perfetti pari sono in numero finito*; mentre se per converso si fosse sicuri che nella formola $2^n - 1$ sono inclusi innumerevoli numeri primi, si sarebbe subito autorizzati a concludere che *la serie dei numeri perfetti è illimitata*. Ora quale di queste due proposizioni è vera? Mistero!

---

(1) Veggasi la memoria *Observationes de theorema quodam Fermatiano ad numeros primos spectantibus* (*Comment. Acad. Petrop.*, T. VI).

(2) Il BOURLET ha dimostrato (nell'articolo *Sur les nombres parfaits*, *Nouv. Annales de mathem.*, III Sér., T. XV, 1896) che, se esistono, superano il numero 2197895.

IX.

La straordinaria fecondità di utili conseguenze palesata dalla rappresentazione dei numeri come prodotto dei loro fattori primi ha destata l'idea di cercare altre decomposizioni fondate, non più sull'uso della moltiplicazione, ma su quello dell'addizione. Già il teorema di PITAGORA, trasportato nel campo aritmetico, aveva condotto alla scoperta di infiniti numeri quadrati esprimibili ciascuno come somma di DUE quadrati. Più tardi il sommo aritmologo greco DIOFANTO (se non altri prima di lui) aveva mostrata la possibilità di trasformare in certi casi la somma nella differenza di due cubi, e così suggerita la questione (di cui EULERO stesso non sdegnò di occuparsi (1)) di trasformare, quando ciò sia possibile, un cubo nella somma di TRE altri. Ma la prima « decomposizione additiva » applicabile a qualunque numero venne scoperta da FERMAT, il quale asserì che *ogni numero è esprimibile come somma di* QUATTRO *numeri quadrati* (2), lasciando a LAGRANGE la gloria di dimostrare questa importantissima proposizione. Anzi, a ciò non si arrestò il sommo matematico francese, il quale sin dallo scorcio dell'anno 1636, affermava (3) che, similmente *ogni numero è esprimibile come somma di* TRE *numeri triangolari, e di* CINQUE *numeri pentagonali*, ecc.; al genio di CAUCHY era riserbato di dissipare, nel 1815, ogni dubbio intorno alla verità di questa proposizione bellissima fra le belle (4)

Accanto a queste decomposizioni generali, la cui prima radice risiede nella considerazione di *numeri* (se così posso esprimermi) *planimetrici*, ne esistono innumerevoli altre le quali nascono da considerazioni *spaziali* od *iperspaziali*; esse vennero segnalate, al tramonto del secolo XVIII, da un eminente geometra inglese,

---

(1) Cfr. anche L. KRONECKER in *Journ. f. fie reine und angew. Mathematik*, T. LVI, 1859, e K. SCHWERING in *Archiv. f. Mathem. u. Phys.*, III Reihe, T. 2, 1902.

(2) *Démonstration d'un théorème d'arithmétique* (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1770).

(3) Lettera al Mersenne pubblicata in *Œuvres de Fermat*, T. II, p. 65. Cfr. anche un passo del Commento a BACHET DE MÉZIRIAC che si legge ivi T. I, p. 305 e T. III, p. 252.

(4) *Démonstration générale du théorème de Fermat sur les nombres polygores* (*Mem. de l'Institut de France*, T. XIV).

EDOARDO WARING, il quale asserì che *ogni numero può rappresentarsi come somma di un determinato numero* N *di potenze* n-*esime* (1). N ha un determinato valore per ogni valore di n. Così per $n = 2$ si ha $N = 4$. conformemente al surriferito teorema di Fermat-Lagrange. Per $n = 3$ si ha invece $N = 9$ secondo il WARING; la proposizione così emergente attrasse l'attenzione di JACOBI (2), il quale, nell'assenza di un'argomentazione capace di fugare ogni dubbio intorno alla verità di essa, con l'aiuto del famoso calcolatore DAHSE, dimostrò che essa sussiste per tutti i numeri non superiori a 12,000; mezzo secolo più tardi si riconobbe la sua validità sino a 40,000 (3).

L'elegante proposizione generale segnalata dal WARING, durante più di un secolo, accrebbe di uno il numero degli impertinenti punti interrogativi di cui è cosparsa la Teoria dei Numeri. Gli è soltanto quattro anni or sono che un matematico, la cui erculea forza logica sembra capace di piegare qualunque difficoltà — parlo di DAVIDE HILBERT — pose fuori di discussione la verità del teorema di Waring ed in tal modo aggiunse un nuovo articolo al codice delle leggi osservate da tutti i numeri (4). Ma poichè egli pervenne a questo fondamentale risultato applicando concetti, formole e metodi dell'analisi infinitesimale, così, mentre da un lato porse una novella prova della intima e profonda « entente cordiale » che esiste fra due provincie matematiche che un tempo si riteneva dovere restare perennemente disgiunte e estranee l'una all'altra, ha lasciato ai contemporanei ed i posteri di pronunciare l'ardua sentenza se sia questo o non uno dei casi in cui la considerazione dell'infinito sia sussidio indispensabile all'investigazione aritmetica.

Malgrado l'importanza veramente straordinaria del progresso che l'HILBERT fece compiere alla scienza dei numeri, egli non ha

---

(1) *Meditationes algebraice*, III ed., Cambridge, 1782, p. 349. È probabile che sussista un teorema analogo in cui entrino in giuoco numeri piramidali o iperpiramidali.

(2) Cfr. *Journal f. die reine und angew. Mathematik*, T. XLII, 1851, oppure *Ge. Werke*, T. VI, p. 322 e segg.

(3) v. STERNECK, *Sitzungsber. der k. k. Akad. von Wien*, T. CXII, 1903.

(4) *Beweis für die darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl* n-*ter Potenzen* (*Waringsches Problem*) (*Mathem. Annalen* T. LXVII, 1909).

peranco scritta la parola FINE al gruppo d'indagini aventi per nocciolo il così detto « problema di Waring », scopo del quale è di determinare il minimo valore che può assumere il numero N in corrispondenza di un assegnato valore di n. Tale problema venne sino ad ora attaccato adottando l'opportunissima tattica delle approssimazioni successive.

Così per $n = 3$, il MAILLET trovò dapprima $N = 17$; in seguito il FLECK abbassò questo numero a 13; finalmente il WIEFERICH ha stabilito (con un ragionamento che venne ben presto reso in ogni sua parte perfetto) essere sempre $N = 9$, onde oggi si è certi che sussiste il teorema: *ogni numero si può rappresentare come somma di* NOVE *cubi* (1).

Similmente: per $n = 4$ il numero N dal valore 53, ottenuto nei primordi della ricerca, venne successivamente abbassato a 47, 45, 41, 39, 38 e 37; al dire del WARING il valor minimo di N sarebbe 19; se fosse possibile farlo scendere fino a 16 risulterebbe dimostrato che *ogni numero si può rappresentare con somma di sedici quarte potenze*. Nascerebbe allora, e sarebbe ben giustificata, la speranza che in un giorno, forse terribilmente lontano, il teorema di Waring potesse venire meglio precisato così: *ogni numero si può rappresentare come somma di* n^2 *potenze* n-*esime*.

X.

Non v'ha chi non vegga come siffatte considerazioni segnalino una miniera ricca e profonda, rigurgitante di nobile metallo, la quale è da augurarsi chiami da tutto il mondo esploratori esperti e coraggiosi, tanto più che, per vie sotterranee, essa viene a congiungersi ad altri cospicui giacimenti auriferi tuttora inesplorati.

Ed invero, il fatto che qualsivoglia numero può esprimersi sotto la forma di somma di un determinato numero N di potenze n-esime, non esclude (come viene provato da parecchi esempi) che per numeri di specie particolari il numero degli addendi possa scendere al disotto del nnmero N, donde il problema generale di

(1) *Mathem. Annalen*, T. LXVI, 1909, p. 95-101.

determinare il minimo di quel numero di addendi per speciali categorie d'interi. In particolare ci si trova di fronte alla questione di determinare il minimo numero di potenze n-esime in cui si può decomporre ogni potenza n-esima; essa fu risolta nel caso più semplice, perchè si conoscono infiniti numeri quadrati che sono somme di un numero di quadrati non inferiore a QUATTRO, ma si ignora se vi siano cubi rappresentabili con meno di NOVE cubi. Nel caso generale, ove si riuscisse ad assodare che, se n è più grande di 2, quel minimo è sempre maggiore di 2 e non può abbassarsi sino a 2 nemmeno per numeri particolari, sarebbe in pari tempo dimostrato che *se* n *è superiore a 2, la somma di due potenze* n-*esime non è mai una potenza* n-*esima.*

È questo il « grande teorema di Fermat », il più celebre ed oscuro enigma che offra oggi, non soltanto la Teoria dei Numeri, ma tutta la Matematica. Mentre il celebre scienziato francese garantiva di essere in grado di dimostrarlo con un ragionamento elementare di poche pagine, a ricostruirlo non riuscirono i più eminenti analisti dei secoli posteriori, i quali arrivarono soltanto a restringere sempre più il campo di valori dell'esponente pei quali il teorema in questione è tuttora «sub judice». Grazie a tali ricerche, molte delle quali portano l'impronta del genio, venne straordinariamente accresciuta la probabilità che quel teorema sia incondizionatamente vero (1); ma nessuno può oggi in piena coscienza farsi mallevadore che fra i numeri della serie naturale non si trovi qualche originale che, assunto come esponente, faccia cadere in difetto l'asserzione di FERMAT. A dissipare tale penosa incertezza si provarono miriadi di matematici di primo... e di ultimo ordine, ma sempre indarno; sicchè sino al momento presente nessuno è riuscito a toccare la cima dell'albero della cuccagna, ove la generosità esemplare del compianto dottor WOLFSKEHL ha collocato, quale calamita ultrapotente, la somma di centomila marchi.

---

(1) Per $n = 3$ il teorema di Fermat fu dimostrato da EULERO, onde da tempo si è certi che la curva di terz'ordine $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ non contiene alcun punto razionale; da ciò si è condotti all'importante (e tuttora irresoluta) questione: quali sono le curve di terz'ordine a coefficienti razionali che contengono uno e quindi infiniti punti razionali? Una questione analoga sussiste per le cune di un ordine superiore a 3.

Signori,

La Teoria dei Numeri ha sempre esercitato un fascino invincibile sopra tutti coloro che l'hanno una volta accostata; ed io mi avveggo, ormai troppo tardi, di non aver avuta la capacità di resistervi e di avere così (pur senza aver percorso che una piccola parte del delizioso campo che si stendeva dinanzi ai miei occhî) abusato della vostra indulgente pazienza. Vogliate scusarmene, Colleghi ed Amici! E vogliate altresì accordarmi il vostro perdono se io — in questi giorni nei quali la Sezione genovese della « Mathesis » esulta per la presenza nel suo seno di tanti ospiti graditi — in luogo d'innalzare un inno per celebrare le splendide vittorie della scienza che ci affratella, mi sono dilungato a segnalare, piuttosto gli abissi tuttora inesplorati, che le cime su cui sventola il nostro vessillo trionfale; e se, astretto dall'inesorabile concatenazione dei fatti, prendo commiato da voi col ripetere le melanconiche parole di AMLETO: « O Orazio, esistono in cielo e sulla terra assai più misteri di quanto sogni la nostra filosofia » (1).

(1) *There are more things in heaven and earth, Horatio,*
Than are dreamt in our philosophy.