L'evoluzione dell'insegnamento della matematica elementare nell'ultimo secolo (*)

DI

ALPINOLO NATUCCI

Parte 1ª: *geometria*

L'anno 1867 il Governo italiano imponeva che nelle scuole secondarie classiche la Geometria si insegnasse con la scorta degli *Elementi di Euclide.* La recisa prescrizione mirava a ricondurre a purezza la trattazione della Geometria razionale elementare, che il *Legendre* e i suoi ammiratori avevano offuscata, adoperando sovente il calcolo aritmetico a dimostrare delle proposizioni che si sarebbero potute agevolmente stabilire in modo geometrico diretto; e mirava altresì a spazzar via i tanti libercoli, mal pensati e peggio scritti da indotti speculatori, che infestavano i nostri licei.

La decisione del Ministero della P. Istruzione fu sollecitata dagli insigni matematici *Enrico Betti* e *Francesco Brioschi;* i quali, nel novembre dello stesso anno, pubblicarono, presso l'editore Le Monnier di Firenze, una traduzione italiana degli Elementi, modellata su quella di *Vincenzo Viviani,* con opportune modificazioni di forma e di sostanza.

Ma l'esposizione degli Elementi, prolissa e ricca di ripetizioni, riesce modesta al lettore moderno (1); e così lo stesso Ministero qualche anno dopo, con apposita circolare, dichiarava che «prescrivendo gli Elementi di Euclide, si è inteso di prescrivere, non già l'uso del testo Euclideo, ma i limiti dentro i quali deve tenersi l'insegnamento della geometria e il metodo di tale insegnamento».

(*) Comunicazione letta all'VIII Congresso dell'U.M.I. (Trieste 2-9 ottobre 1967); Sezione VI: Storia e didattica della Matematica.

(1) Si veda la bella edizione dovuta a Federico Enriques col concorso di vari collaboratori, in 4 voll. il 1° edito da Alberto Stock in Roma, il 1925; i successivi dallo Zanichelli di Bologna.

Prima di procedere, vogliamo osservare che *Betti* e *Brioschi* si sono ispirati a un concetto del rigore molto ristretto; concetto che ormai è di gran lunga superato: e se era bene espellere dalla scuola i libercoli cui sopra si allude, non era certo spregevole la geometria di *A. M. Legendre*, matematico di 1° ordine, la quale ha avuto larga e meritata diffusione in Francia (oltre 14 edizioni) e in altre nazioni.

Nelle successive edizioni il *Legendre* corredava la sua opera di Note molto interessanti; qui ricorderemo la nota VI della 5ª edizione, (1804) nella quale si stabilisce il teorema relativo alle rette sghembe: «esiste un segmento e uno solo perpendicolare ad entrambe, che dà la minima distanza fra i punti dell'una e i punti dell'altra».

Per quanto possa sembrare strano, questa notevole proprietà non era stata notata da nessun'altro (2).

Ricorderemo altresì la pregevole dimostrazione del postulato delle parallele, sotto la forma «la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti», che trovasi nelle edizioni successive alla 8ª. Il *Legendre* costruisce una specie di triangoli nei quali la somma degli angoli rimane costante, che hanno la base AB, AB′, AB″, ... su una retta, e il vertice C, C′, C″, ... che si va successivamente avvicinando alla retta della base. Nella dimostrazione si ammette che la somma degli angoli rimane invariata anche quando il vertice C cade sulla retta, e il triangolo si riduce a un segmento (3).

Una volta stabilito che non era conveniente adoperare il testo euclideo, che risale a oltre 22 secoli, nella forma originale (4), i geometri italiani cominciarono a pubblicare libri di geometria elementare. Così nel 1869 apparve la 1ª edizione dei bellissimi Elementi di geometria di *A. Sannia* ed *E. D'Ovidio*, che hanno soltanto il difetto di essere troppo ampî rispetto al tempo concesso alla matematica nelle scuole italiane, cosicché l'insegnante accorto doveva tralasciare le parti meno importanti (5).

Nel 1884 furono pubblicati gli Elementi di Geometria di *Riccardo De Paolis*, prof. di geometria superiore nella R. Univ. di Pisa (6), nei

(2) Si veda: A. NATUCCI; *Minima distanza di rette sghembe*. Periodico di Matematiche, vol. XIII, 1933, pag. 47.

(3) Si veda: A. NATUCCI; *Pseudo dimostrazioni del postulato delle parallele date da Legendre*. Periodico di Matematiche, vol. XIII, 1933, pag. 301. È superfluo notare che l'ammissione citata, è assai meno evidente del consueto postulato: Per un punto si può condurre una sola parallela a una retta.

(4) Fra le altre cose manca totalmente la teoria della misura, tanto che Betti e Brioschi dovettero supplire con una Appendice. È noto altresì che *Archimede*, nelle sue opere immortali, stabilì la misura approssimata del cerchio, e il famoso teorema che la superficie della sfera equivale a quella del cilindro circoscritto. Egli trovò anche il volume della sfera, del segmento sferico ecc.

(5) Io posseggo copia della 11ª ediz. Napoli, ed. Pellerano, 1902.

(6) Torino, Ermanno Loescher editore. In questa opera l'A. abbandona l'an-

quali sono stabilite rigorosamente le teorie dell'equivalenza, dei limiti, della misura.

Non so quando sia comparsa la 1ª edizione degli ottimi Elementi di geometria di *Aureliano Faifofer*, professore nel R. Liceo Foscarini di Venezia (7). Questo libro mi è particolarmente caro perché mi ha servito di testo nel mio insegnamento nei licei.

Nel 1900 è comparsa la 1ª edizione degli Elementi di geometria di *Giuseppe Veronese*, professore nell'Università di Padova, con la collaborazione di *Paolo Gazzaniga*, insegnante nel R. Liceo di Padova (8).

Notevole è in questo libro la definizione di rette parallele: dopo aver definito quand'è che due figure si dicono opposte l'una all'altra rispetto ad un punto O, e che si intende per segmento (e per retta) trasversale di due rette, si pone la definizione: Due rette si dicono parallele, se una di esse contiene due punti opposti a due punti dell'altra rispetto al punto di mezzo di una loro trasversale comune. Il postulato delle parallele prende la forma:

Se due rette sono parallele, esse sono figure opposte l'una all'altra rispetto al punto di mezzo di ogni loro segmento trasversale.

Poi si dimostrano i teoremi: 1° - Per un punto dato fuori di una retta si può condurre una, ed una sola, retta parallela alla data; 2° - Due rette parallele e distinte non hanno alcun punto comune, ecc. L'A. introduce i concetti di fascio di raggi, fascio di piani, stella, e asserisce che è assai utile, anche in geometria elementare, far uso delle analogie che presentano enti diversi, come ad es. la retta, il fascio di raggi, la circonferenza e il fascio di piani e il cono; il piano, la stella e la sfera, ecc.; seguendo in questo il *De Paolis*.

Il prof. *Michele De Franchis*, ordinario di geometria proiettiva e descrittiva nell'Università di Catania, ha pubblicato nel 1909, presso la casa editrice Sandron di Palermo, una Geometria elementare ad uso dei Licei e dei Ginnasi superiori e degli Istituti tecnici (1° biennio) (9), di pag. 512.

---

tica separazione della geometria piana dalla solida, perché — come dice nella prefazione — esiste molta analogia fra certe figure del piano e certe figure dello spazio, e studiandole separatamente si rinuncia a conoscere molte cose che questa analogia insegna e si cade in ripetizioni inutili. In seguito questa fusione fu adottata da altri AA. sui quali è inutile insistere.

(7) Io posseggo la 13ª edizione; Venezia, tip. Sorteni e Vidotti, 1909. L'opera ha avuto l'onore di una traduzione francese per opera del prof. Fr. Talanti; Paris. A. Rogier, ed. 1903.

(8) Fratelli Drucker librai, editori, Padova-Verona. Nella prefazione alla 1ª edizione, il Veronese osserva che è da evitare la solita def. di rette parallele (due rette del piano che prolungate indefinitamente non si incontrano mai), perché due tali rette nessuno le ha mai vedute.

(9) Nella prefazione l'A. dichiara che il suo libro contiene uno svolgimento

Il 1° Cap. espone gli scopi della geometria ed i mezzi logici per raggiungerli (enuncia fra l'altro il principio delle inverse); il 2° Cap. tratta delle classi di enti, e delle corrispondenze ed operazioni sugli enti; il Cap. 3° introduce il punto, il segmento, la semiretta, la retta.

Dopo vari teoremi relativi ai gruppi di punti e al loro ordinamento, si ha la definizione di semiretta (ciascuno dei prolungamenti di un segmento) e di retta (pag. 19): Dati 2 punti distinti A, B, diremo retta AB la figura formata dal segmento AB e dai suoi prolungamenti.

Segue il teorema: per due punti distinti passa una retta.

Il Cap. 4° è dedicato alle figure convesse e alle figure lineari. Si chiama lineare una figura che goda della proprietà di contenere tutte le rette che passino per due punti qualsivogliano di essa. Si hanno teoremi come: «la retta e la semiretta sono figure convesse; lo spazio è una figura lineare; la retta è un figura lineare, ecc.».

Basta questo saggio per far comprendere che il libro del *De Franchis*, ammirevole dal punto di vista scientifico, non è consigliabile dal lato didattico.

Lo stesso giudizio deve darsi per il Trattato di geometria elementare ad uso delle scuole secondarie superiori di *G. Marletta* [10], libero docente nell'Università di Catania ed insegnante (nel 1911) nel Liceo di Bari. Nella prefazione dice di credere di non aver ecceduto nel rigore, ma in realtà che cosa deve pensarsi di un libro che introduce come primitivo soltanto il concetto di punto, poi introduce il segmento, con un postulato, come figura individuata da due punti, indipendentemente dall'ordine col quale sono dati, e poi definisce i prolungamenti di un segmento, come insiemi di punti, e infine introduce la retta come la figura formata da un segmento e dai suoi due prolungamenti?

Si nota qui una stretta analogia con la trattazione del *De Franchis*.

Molto originale è la def. di rette parallele: Due rette si dicono parallele, se esiste un semipiano avente una di esse per origine e contenente tutti i punti dell'altra retta.

Si dimostra che: Due rette distinte parallele, non hanno alcun punto comune; e si introduce il postulato: Per un punto che non appartenga a una retta, passa una retta ed una sola parallela a questa.

Torniamo qualche anno indietro per ricordare gli Elementi di Geo-

---

esclusivamente logico-deduttivo della geometria elementare, il che non toglie che ai postulati verificabili sperimentalmente, non si premettano delle osservazioni empiriche, in modo da far riguardare la geometria come scienza di ragionamento fondata su basi sperimentali.

([10]) Catania, Cav. Nicolò Giannotta, editore, 1912 (pag. 332).

metria ad uso delle scuole secondarie superiori di *Federigo Enriques* e *Ugo Amaldi* ([11]). In questo libro è notevole la trattazione dell'eguaglianza delle figure geometriche. Si adopera il movimento per stabilire l'eguaglianza fra segmenti e fra angoli e verificarne le prime proprietà. L'uguaglianza non è così definita logicamente, ma assunta come concetto fondamentale, e le relative proprietà sono da riguardarsi come postulati. La uguaglianza dei triangoli, e delle figure rettilinee nel piano, viene definita mediante il confronto di segmenti e angoli. Una particolarità notevole è la considerazione di figure a lati circolari, e l'uso, nelle costruzioni, oltreché della riga e del compasso, della squadra e della riga graduata. Le parallele sono definite, nel modo consueto, come rette complanari che non si incontrano, e il postulato è preso sotto la forma semplice: Per un punto passa una sola parallela a una retta data.

Nel 1927 sono stati pubblicati gli Elementi di Geometria di *Francesco Severi* ([12]). Per ora occupiamoci del capitolo delle parallele. Ammesso il postulato: Una perpendicolare ed un'obliqua ad una medesima retta si incontrano, si stabiliscono i teoremi: Se in un piano due rette non si incontrano, ogni perpendicolare a una di esse è perpendicolare all'altra; se due rette complanari non si incontrano, sono equidistanti.

Ciò posto si chiamano parallele due rette equidistanti: ma la definizione richiede il teorema: In un piano il luogo dei punti situati da una parte di una retta, e aventi da questa una data distanza, è una retta.

Terminata così una rapida rassegna dei principali testi di geometria per scuole italiane, pubblicati dal 1867 al 1930 ([13]), passiamo a vedere le più importanti semplificazioni introdotte successivamente nell'insegnamento della geometria.

Eguaglianza delle figure geometriche. Riteniamo che il metodo seguito da *Enriques* e *Amaldi* sia il migliore. Quanto alle figure spaziali, questi A. introducono un teorema molto complesso: Condizione nec. e suff. per l'eguaglianza di due diedri è che siano uguali due loro sezioni

---

([11]) Bologna, N. Zanichelli editore, 1903. Questo libro ha avuto molte edizioni e una grande diffusione nelle scuole. Fino alla 6ª edizione (1913), si hanno effettivi miglioramenti sotto l'aspetto didattico ed anche delle notevoli semplificazioni in varie dimostrazioni. Le edizioni successive, per mania di facilitazioni, rappresentano un notevole regresso.

([12]) Editore Vallecchi, Firenze Oltre all'edizione completa, con la copertina di color cenerino, ne è stata pubblicata nel 1933 una edizione ridotta, con la copertina di color nocciola, adatta specialmente a Istituti magistrali o tecnici per geometri, e in seguito una edizione ancora più breve, con la copertina di color verde.

([13]) Molti altri buoni trattati dovremmo esaminare, ma non lo facciamo per non dilungarci troppo. Citiamo quelli di Baroni e Fontebasso; Bompiani e Longo; Rosati e Benedetti, e quelli altresì di Barzaghi, Forti, Riboni, Tortorici, Solini.

ugualmente inclinate sullo spigolo; e se ne servono per stabilire il 1° e il 3° criterio di uguaglianza dei triedri. Il *Severi* si serve del movimento per dimostrare questi criteri.

Parallele. Confrontate le varie trattazioni e considerate le difficoltà alle quali si va incontro, lasciando la via tradizionale (*Veronese, Marletta, Severi*), si conclude che dal punto di vista didattico, questa costituisca il metodo migliore, cioè:

Def. Due rette complanari si dicono parallele, se non hanno nessun punto comune; Post. Per un punto si può condurre una sola parallela e una retta data.

Proporzioni fra grandezze. La teoria euclidea, che risale ad *Eudosso,* ha sempre costituito, nei secoli, ammirazione da parte dei matematici che l'hanno studiata, per la genialità della definizione, che ha evitato lo scoglio della incommensurabilità, e il rigore logico della trattazione, ma nella scuola costituisce una grave difficoltà.

Nei primi anni del mio insegnamento la svolgevo, seguendo il *Faifofer,* ma perdevo un tempo enorme, a scapito di parti più importanti del programma, e d'altra parte gli alunni di 1ª liceo non erano in grado di apprezzarla. Così compresi presto che bisognava cambiar sistema (14). Introducendo il concetto di rapporto, si urta nello scoglio dell'incommensurabilità; quello scoglio che aveva tagliato la strada a *Pitagora,* nel V sec. a. C., *Severi* l'ha raggirato svolgendo insieme una breve teoria dei numeri reali. *Enriques* e *Amaldi* hanno cercato di semplificare, per quanto possibile, la teoria geometrica, rendendola nello stesso tempo comprensibile cogli opportuni esempi.

Equivalenza dei poligoni e dei poliedri - Conviene distinguere con *Enriques* e *Amaldi,* l'equivalenza per somma di parti a due a due eguali, che è meglio chiamare con *Severi* equiscomponibilità, dall'equivalenza per differenza, o più in generale dall'eguaglianza di superficie.

Quanto all'equivalenza di parallelepipedi e prismi, la loro teoria risulta molto semplificata, in confronto allo sviluppo tradizionale, partendo dal teorema: «2 Due prismi triangolari appartenenti al medesimo prisma indefinito e aventi uguali gli spigoli laterali sono equivalenti» (*Enriques* e *Amaldi*); che trovasi sotto forma molto prossima in *Severi*: «Due prismi triangolari aventi una faccia laterale comune e gli spigoli opposti situati sulla medesima parallela a quella sono equicomposti».

(14) A. Natucci: *Alcune considerazioni sulla teoria delle proporzioni in geometria.* Boll. di Matematica; Anno IV, n. 5-8. Già prima il prof. F. Sbrana, aveva proposto opportune semplificazioni nella sua nota: «La teoria delle proporzioni in geometria». Pitagora, n. 3-4, 1901.

Superficie e volume della sfera - La superficie della sfera, secondo il metodo tradizionale, veniva determinata come limite delle classi contigue formate dalle superfici generate, per rotazione attorno al diametro, da poligonali regolari inscritte e circoscritte a un semicircolo massimo, facendo variare il numero dei lati.

Similmente il volume di un settore sferico, e quindi della sfera, si ottiene considerando dapprima il volume del solido generato da un triangolo che ruoti attorno a una retta del proprio piano che passi per un vertice.

Chiunque ha letto queste trattazioni, anche nei migliori trattati, sa bene quanto questi metodi siano prolissi.

Una effettiva semplificazione si può avere soltanto applicando i *principî di Cavalieri,* come in certe geometrie moderne (es. *Bompiani* e *Longo*): 1°: «Per la misura delle figure piane ci si serve di corde parallele ad una prefissata retta (regula), pensate in numero infinito nelle medesime figure, e limitate da due di esse che da parti opposte toccano le medesime figure». 2° «Per la misura delle figure solide ci si serve di sezione parallele ad un piano prefissato (regula) pensate in numero infinito nei medesimi solidi, e limitate da due piani che da parti opposte toccano gli stessi solidi» (15).

Per il volume della sfera, si considera un cilindro circolare retto con la base su un piano tangente alla sfera, e altezza uguale al diametro della sfera, e un doppio cono con le basi coincidenti con quelle del cilindro, e il vertice nel punto medio dell'altezza di questo. Condotto un piano α parallelo alla base del cilindro a distanza x dal centro della sfera che è vertice dei due coni, questo taglia nella sfera un circolo di area π $(r^2—x^2)$, e fra il cilidro e una dei coni, una corona circolare di area π $(r^2—x^2)$. Poiché questo si può ripetere per qualsiasi piano α, per il secondo principio di Cavalieri, ne viene che il volume della sfera è eguale a quello del solido compreso fra il cilindro e il doppio cono:

$$V = 2r \, . \, \pi r^2 - \frac{2}{3} \pi r^2 \, . \, r = 2 \pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 \, .$$

La superficie della sfera si deduce indirettamente nel modo seguente. Supposta scomposta in un grandissimo numero di poligonetti sferici

(15) Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, Bologna 1635. [La geometria fatta progredire con un certo nuovo metodo degli indivisibili delle grandezze continue]. Vedasi anche: G. CELLINI: *Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri.* (Periodico di matematiche, vol. XLIV, n. 1, 1966). Ricordiamo la magnifica recente edizione curata da Lucio Lombardo-Radice; Unione Tip. Editrice Torinese, p. 872; L. 10.000. Torino 1966.

(p. es. triangoli), congiungiamo i loro vertici col centro della sfera. Questa viene scomposta in un numero grandissimo di piramidi col vertice nel centro aventi per base i detti poligonetti sferici. Se questi sono piccolissimi si confondono col piano tangente in un punto interno. Pertanto dette $s_1, s_2, \dots s_n$ le superfici di detti poligonetti, si ha:

$$V = (s_1 + s_2 + \dots + s_n) \cdot \frac{r}{3} = S \cdot \frac{r}{3} \cdot$$

D'altra parte $V = \dfrac{4}{3} \pi r^3$, Dunque:

$$S \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{e perciò } S = 4 \pi r^2 \cdot$$

La sup. della sfera è uguale a 4 volte quella del circolo massimo, ed anche alla sup. laterale del cilindro circoscritto (*Archimede*).

Parte 2ª: *Aritmetica e Algebra* - L'insegnamento dell'aritmetica razionale, prescritto per la 4ª e 5ª ginnasio e per le Scuole normali (chiamate poi Istituti magistrali), ha lasciato per molto tempo troppo a desiderare. I libri di testo, specialmente per ciò che riguarda le operazioni dirette, addizione e moltiplicazione, su numeri interi, facevano pietà. Pseudodimostrazioni, che non avevano nessuna parvenza di logica e di razionale. Quanto sarebbe stato preferibile assumere come postulati, in base ad alcuni esempi, le proprietà commutativa e associativa dell'addizione e della moltiplicazione!

Le cose sono radicalmente cambiate alla fine del sec. XIX, e al principio del XX.

In primo luogo *Giuseppe Peano*, l'insigne matematico professore all'Università di Torino, ha pubblicato nel 1889, un volumetto pregevolissimo di aritmetica, scritto in Interlingua (latino sine flexione) e coi simboli della logica matematica (16). Qualche anno dopo è comparso un suo libro, destinato alle scuole, ma che in queste ha avuto minima diffusione, «Aritmetica generale ed algebra elementare» (17), dove la materia è svolta coi simboli della logica matematica, e nelle note a pié di pagina sono date opportune spiegazioni.

---

(16) Aritmetices principia nova methodo exposita. (Torino, 1889).
(17) Editori fr. Bocca, Torino, 1902.

La teoria dei numeri interi è relative operazioni è basata su 5 postulati ([18]):

N_0 indica una classe di numeri;

1 — Zero è un numero ($0 \varepsilon N_0$);

2 — Se a è un numero, anche il suo successivo è un numero ($a \varepsilon N_0 \cdot a + \varepsilon N_0$);

3 — Sia s una classe e 0 un elemento di questa classe, e supponiamo ancora che se x è un numero di s, anche il suo successivo ($x +$) si deduca che appartiene ad s; allora ogni numero è un s: Principio di induzione (Induct);

4 — Due numeri susseguiti da numerosi eguali sono eguali ($a, b \varepsilon N_0 \cdot a + = b + \supset \cdot a = b$);

5 — Il successivo di un numero non è zero ($a \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot a + - = 0$).

Si indica con N_1 la classe dei numeri naturali, cioè la classe N_0 privata dello 0.

I numeri positivi vengono considerati come numeri da aggiungere, quelli negativi come numeri da sottrarre, cioè nella definizione dei numeri relativi entra il concetto di operazione e si noti che $b - a$ si può considerare soltanto se $a \lesseqgtr b$.

La classe dei numeri relativi si indica con *n*. La loro teoria non richiede nessun nuovo postulato.

Il numero frazionario b/a indica un'operazione doppia, cioè $\times b$ e $/a$ (moltiplicare per b e dividere per a). La classe dei razionali assoluti si indica con R e quella dei razionali relativi con *r*.

I numeri reali vengono definiti come limiti superiori di classi di razionali. La classe dei reali assoluti (o quantità) si indica con Q, e quella dei reali relativi con q.

Quasi nello stesso tempo *Alfredo Capelli*, professore di Algebra nell'Univ. di Napoli, dava un assetto rigoroso ai principî dell'aritmetica e dell'Algebra, partendo da un punto di vista del tutto diverso. Egli osserva ([19]) che «l'aritmetica non ha bisogno di fondarsi sopra alcun assioma

---

([18]) Il prof. Mario Pieri, celebre soprattutto per i suoi studi sui fondamenti della geometria elementare e della geometria proiettiva, ha osservato che il 3° postulato è più complesso degli altri ed ha una forma insolita, perciò ha proposto un sistema di 4 postulati, dai quali ha poi dedotto il principio di induzione. Ma per il sistema di PIERI [*Sugli assiomi aritmetici*: Boll. dell'Accad. Gioenia di Scienze naturali; Catania, s. 2ª, n. 2, 1908] e per altri, proposti da A. PADOVA, B. RUSSELL ecc., si veda il libro: A. NATUCCI «*Il concetto di numero e le sue estensioni;* Torino, Fr. Bocca ed. Torino, 1923 (esaurito)». Il metodo di *Peano* è seguito anche dal prof. S. Catania, nella sua aritmetica razionale (Catania, N. Giannotta, 1904).

([19]) Sulla genesi combinatoria dell'aritmetica. Vol. XXXIX (1901) del Giornale di Matematiche di Battaglini.

o postulato suo proprio, perché essa ha la sua origine naturale in certi fatti di indole combinatoria, dai quali si può dedurre per via puramente razionale». «I concetti di unità, di aggregato di oggetti (insieme), di corrispondenza biunivoca, di composizione di oggetti (substratum della moltiplicazione) di riunione di oggetti (substratum dell'addizione), sono base più che sufficiente per l'aritmetica»; la quale, del resto, non potrebbe mai emanciparsene, perché essi sono inseparabili da qualsiasi scienza.

L'indirizzo combinatorio, mentre espone i principî secondo il loro probabile sviluppo storico, li ricollega ai più elevati sviluppi analitici, che si basano pure sulle nozioni di gruppo e di invariante, e anche ai fondamenti della geometria.

Il *Capelli* ha scritto anche un libro di testo per le scuole, che, a dir vero, ha avuto purtroppo limitata diffusione [20]. I numeri (naturali) non sono che enti astratti, immaginati dalla nostra mente allo scopo di rappresentare certe relazioni che possono intercedere fra aggregati di oggetti (insiemi).

E precisamente:

1) Ogni aggregato dà origine ad un numero;

2) aggregati coordinabili (cioè insiemi — equivalenti — che si possono porre in corrispondenza biunivoca) dànno origine allo stesso numero;

3) aggregati non coordinabili dànno origine a numeri differenti.

Le proprietà commutativa e associativa dell'addizione e della moltiplicazione, e anche la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, derivano immediatamente dalle corrispondenti proprietà delle operazioni fra aggregati, che sono intuitive.

Le proprietà delle operazioni inverse si dimostrano, in base alla loro definizione, dalle proprietà delle operazioni dirette.

La trattazione dei numeri negativi (e di quelli frazionari [21]), che però non è stata pubblicata negli elementi), è meno semplice perché si basa sul concetto del valore di un aggregato.

I numeri irrazionali, il *Cappelli* li tratta col metodo delle classi contigue nelle sue Lezioni di Algebra complementare.

Il metodo di *Capelli* è stato seguito dal prof. *Gaetano Fazzari*, nei suoi Elementi di Aritmetica, dove si basa sulla considerazione di colle-

---

(20) Elementi di aritmetica ragionata e algebra: libro 1° Genesi combinatoria dell'aritmetica e introduzione al calcolo letterale; libro 2°: Divisibilità e proprietà fondamentali dei numeri naturali; libro 3°: I numeri negativi. Napoli; B. Pellerano ed. 1902, 1904.

(21) Il concetto di valore e l'introduzione nell'aritmetica dei numeri negativi e frazionari. Giornale di Matematica; vol. XXXIX, luglio 1901.

zioni di oggetti (22). Ecco come introduce le frazioni. Ad un oggetto appartenente a una collezione di n oggetti, considerata come un tutto, si fa corrispondere un nuovo elemento numerico, detto unità frazionaria di specie n, che si indica con $\frac{1}{n}$.

Lo stesso indirizzo ho seguito io nei miei Elementi di aritmetica ragionata e algebra per le scuole medie superiori (23). Per rendere più evidenti la corrispondenza fra gruppi (finiti) di oggetti, e le proprietà commutativa e associativa della riunione e composizione dei gruppi, gli oggetti stessi sono rappresentati da circoletti, freccie, bandierine.

Le frazioni sono introdotte come operazioni su grandezze continue.

Questo libro non ha avuto fortuna; anticipava di troppo i tempi attuali.

Infine il metodo di *Capelli* è accennato, ma non completamente sviluppato, anche nelle Nozioni di aritmetica razionale per il ginnasio superiore di *Carlo Leoni* (24).

I numeri razionali sono introdotti anche qui, come operatori su grandezze continue.

Un terzo indirizzo è sorto e si è sviluppato, sulla fine dell'ottocento e i primi del novecento, fondato interamente sul concetto di grandezza continua. L'opera fondamentale in questo campo, è la *Teoria della grandezza* di *Rodolfo Bettazzi* (25), nella quale vengono coordinati, svolti, completati, vari risultati parziali elaborati nella seconda metà del secolo XIX, da matematici tedeschi, *Noth*, *Schröder*, *Stolz*, e specialmente *H. Grassmann* (26). Nell'appendice *Bettazzi* abbozza una teoria dei numeri interi, basata appunto sul concetto di grandezza.

Questa via è seguita da *M. De Franchis*: Elementi di aritmetica razionale; (R. Sandron ed. Palermo); nei quali ci piace segnalare la parte relativa ai numeri razionali, che è veramente ammirevole.

Cesare Burali-Forti, ha sviluppato coi simboli della logica matematica, una teoria dei numeri reali, che comprende come casi particolari gli interi e i razionali (27).

---

(22) Parte 1ª: Numeri interi; (operazioni, divisibilità, numeri primi); Parte 2ª: Numeri frazionari, decimali e proporzioni. Palermo; libreria internazionale A. Reber; 1908, 1ª ediz. 1911, 2ª ediz.

(23) Remo Sandron editore, Palermo, 1920.

(24) Casa editrice Francesco Vallardi, Milano 1915. Parte 1ª: I numeri cardinali; Parte 2ª: I numeri razionali.

(25) Opera premiata dalla R. Accademia dei Lincei. Pisa, Nistri ed. 1890.

(26) Ausdehnungs' lehre; 1ª ediz. 1844, 2ª ediz. 1862. Stettino. Lehrbuch der Arithmetik, Berlino 1861.

(27) I numeri reali definiti come operatori fra grandezze. Rendiconti della R.

Vi è anche un quarto indirizzo, che risale propriamente a *H. Hankel* (28), il quale se n'è servito per lo studio dei numeri complessi come coppie di numeri reali. In questo metodo i razionali vengono studiati come coppie ordinate di numeri interi; i relativi come coppie di numeri irrazionali. Oltre a essere artificioso, in questo modo si falsa il significato degli enti numerici, perché una frazione a/b, ad esempio, non è una coppia di interi, ma una funzione di questa coppia. Il prof. *Chini* ha introdotto i numeri relativi come coppie di numeri razionali in un suo libro di Algebra (ed. R. Giusti, Livorno). Infelice giustificazione quella basata sul principio di permanenza delle proprietà formali (29).

Con la riforma *Gentile* (1924) è stata abolita l'aritmetica razionale in 4ª e 5ª ginnasio, e introdotto fino dalla 4ª classe lo studio dell'Algebra. In questo modo però, l'Algebra è venuta a mancare della sua base, che è appunto la dimostrazione delle proprietà formali delle operazioni. Ora, se le proprietà commutativa e associativa dell'addizione e della moltiplicazione si possono considerare come intuitivamente evidenti, non si può dire altrettanto della proprietà distributiva e delle proprietà delle operazioni inverse. Inoltre con un tocco di bacchetta magica si vengono a estendere ai numeri relativi e perfino ai numeri reali, le proprietà formali delle operazioni con numeri razionali.

Parte 3ª: *Conclusione.*

La geometria elementare, si è venuta successivamente semplificando e sfrondando nel modo che abbiamo indicato; l'aritmetica razionale, come si può stabilire intuitivamente con la considerazione degli insiemi finiti (gruppi, aggregati, collezioni che dir si vogliono); il calcolo algebrico su monomi e polinomi e frazioni algebriche, costituiscono un fondamento indispensabile all'edificio della matematica. Volerne fare a meno, ed anche mutarli, significa costruire un magnifico palazzo senza fondamenta; il primo turbine di vento lo abbatterà. È ridicolo fare della facile ironia per es. sui famosi criterî di eguaglianza dei triangoli: che dei professori che li hanno insegnati per 40 anni, o più, ne siano stufi è com-

---

Accad. dei Lincei, 1915. Si veda anche: Logica matematica, 1ª ediz. 1894, 2ª ediz. 1919 Manuali Hoepli, Milano.

(28) Theorie der complexen Zahlen; Lipsia, 1867.

(29) Vedasi: G Peano: *Principio de permanentia;* Rivista di Matem., vol. VIII, 1903. Per maggiori notizie su tutte queste ricerche, oltre al già citato « Il concetto di numero », si veda: A. Natucci: *Sviluppo storico dell'aritmetica generale e dell'algebra.* Ed. Pellerano, Napoli, 1954. Opera premiata, manoscritta, dalla R. Accademia d'Italia, 1938.

prensibile, ma ai ragazzi della media e di 4ª ginnasio essi sono una novità [30]. È assurdo voler sostituire la congruenza delle figure piane con l'affinità, come vorrebbero certi novatori oltramontani; senza la congruenza l'affinità non si può capire. E anche la trigonometria piana, con le sue formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli archi, con le formule di prostaferesi, con la considerazione delle funzioni inverse, è necessarissima, se si vuole costruire la geometria analitica e il calcolo differenziale e integrale. Molti integrali non si stabiliscono forse con archi tangenti, logaritmi ed esponenziali? Se i professori universitarî vogliono una preparazione più adeguata ai loro corsi, istituiscano in 1° anno, un'insegnamento complementare.

[30] Il 1° si può ammettere come postulato, il 2° e il 3° se ne deducono facilmente (Si veda per es. la geometria Enriques e Amaldi).

INDICE DEL VOLUME XCIII