

# ***La scienza in una bolla di sapone***

*Lorenzo Meneghini*

La magia delle bolle di sapone ci affascina fin da bambini, poi si cresce e resta spesso in noi la curiosità di scoprirne i segreti.

Il percorso che proponiamo inizia da un'uscita didattica svolta alcuni anni or sono al Museo Tridentino di Scienze Naturali, dove, assieme a due classi del biennio di liceo scientifico, abbiamo visitato il *Laboratorio didattico sulle bolle di sapone*. Negli anni successivi, non appena gli studenti si impadronivano degli strumenti fisico – matematici adeguati, veniva dedicato un po' di tempo in classe per approfondire quanto sperimentato a Trento.

L'obiettivo di queste note è presentare una parte del percorso svolto assieme alle classi, percorso che – utilizzando le bolle di sapone come *filo conduttore* – ha consentito di collegare argomenti che si sviluppano in anni e discipline diversi, con la collaborazione dell'insegnante di scienze naturali.

## **Il legame idrogeno e le sue conseguenze principali**

Mentre per i gas rarefatti le molecole, dotate di alta energia cinetica, praticamente non interagiscono tra loro, lo stesso non avviene per i gas compressi, per i liquidi e soprattutto per i solidi.

Diminuendo le distanze intermolecolari, infatti, insorgono interazioni tra particelle, soprattutto nel caso di molecole polari, come l'acqua.

Sottoponendo una molecola polare ad un campo elettrico esterno, questa si orienta secondo le linee di forza del campo. Ma non finisce qui. Ciascuna molecola polare è essa stessa sorgente di un debole campo elettrico, il campo di dipolo, che fa sentire la sua influenza su altre molecole polari vicine, attirandole ed orientandole.

Il *legame idrogeno* (o *ponte idrogeno*) è, forse, la forza intermolecolare più intensa e si manifesta, come dice il nome stesso, tra molecole polari in cui sia presente l'idrogeno, come nel caso dell'acqua e dell'acido fluoridrico. In tali molecole, gli elettroni sono così fortemente spostati verso l'atomo più elettro-negativo che l'idrogeno si comporta come fosse un protone e, come tale, attrae

in modo molto intenso gli atomi più elettronegativi di un'altra molecola, richiamandoli verso di sé.

In realtà il legame a idrogeno, se preso singolarmente, è piuttosto debole, ma, poiché se ne formano in gran numero contemporaneamente, presi tutti insieme, influiscono in modo determinante sulle proprietà chimiche e fisiche di un composto. Ad esempio, esso spiega molte proprietà delle sostanze, tra cui la tensione superficiale dell'acqua e la minore densità del ghiaccio rispetto all'acqua o la forma esagonale dei fiocchi di neve.

Proviamo ad analizzarlo più da vicino.

Durante la solidificazione, le molecole polari si dispongono normalmente in una struttura ordinata a causa delle interazioni tra dipoli elettrici. In particolare, le molecole d'acqua allo stato liquido sono legate strettamente tra loro dal ponte idrogeno (fig. a).

Il numero dei legami a idrogeno presenti nell'acqua dipende dalla temperatura: più questa è bassa maggiore è il numero dei legami; quando l'acqua diventa ghiaccio questi legami sono molto numerosi e praticamente coinvolgono tutta la struttura.

Quando l'acqua solidifica, inoltre, le molecole si dispongono secondo una struttura esagonale molto più aperta (fig. b), facendo aumentare il volume della massa d'acqua coinvolta e diminuendone la densità.

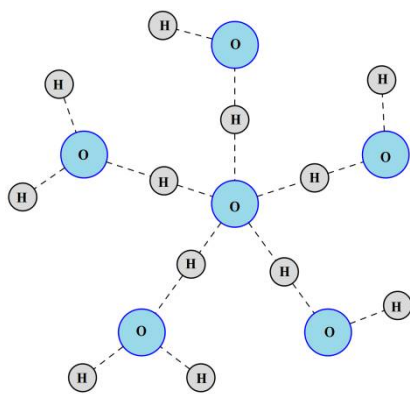


fig. (a)

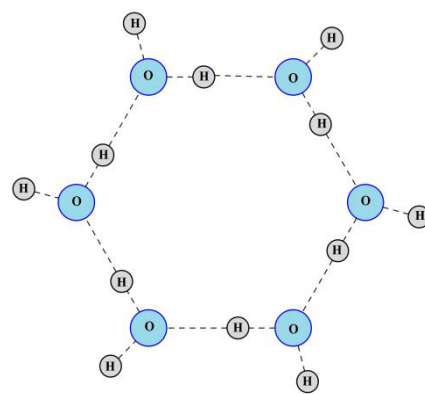


fig. (b)

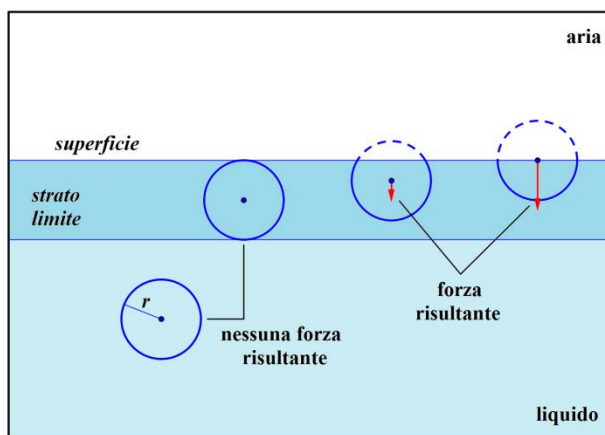
**Rappresentazione del legame idrogeno tra molecole d'acqua allo stato liquido (fig. a) ed allo stato solido (fig. b).**

Questo meccanismo spiega perché il ghiaccio galleggia sull'acqua ed anche, a ben pensarci, il motivo per cui la forma dei fiocchi di neve ha una struttura esagonale.

Inoltre, non è affatto superfluo sottolineare che l'acqua ha un'altra proprietà particolare dovuta a questo legame. A differenza di molte altre molecole più pesanti, tra cui ad esempio l'ossigeno (in forma molecolare) e l'anidride carbonica presenti nell'aria che respiriamo, che a temperatura ambiente si trovano allo stato gassoso, l'acqua si presenta in forma liquida a causa degli intensi legami intermolecolari che abbiamo descritto, che impediscono alle sue molecole di liberarsi in forma gassosa.

### La tensione superficiale e tensioattivi

All'interno di un liquido, ogni molecola è circondata da altre molecole simili, dalle quali è attratta in ogni direzione possibile mediante legami temporanei. L'azione attrattiva delle molecole circostanti diminuisce rapidamente con la distanza e si può ritenere sostanzialmente nulla ad una distanza  $r$  dipendente dal tipo di molecola, ma comunque dell'ordine di grandezza del micron, detto *raggio della sfera d'azione molecolare*. Per una molecola che si trovi all'interno del liquido, le forze intermolecolari si bilanciano tra loro dal momento che ognuna di esse è completamente circondata dalle altre.



**La forza di interazione tra molecole d'acqua dello strato limite dà luogo alla tensione superficiale.**

Immediatamente sotto la superficie del liquido, invece, esiste uno sottile strato di spessore approssimativamente doppio rispetto al raggio d'azione, detto *strato limite*, nel quale avvengono i passaggi di stato.

Se una molecola che si trova nello strato limite viene sollevata, i legami tra essa e le molecole adiacenti vengono tesi, generando una forza che tende a richiamare la molecola verso la superficie. Allo stesso modo, appoggiando un corpo

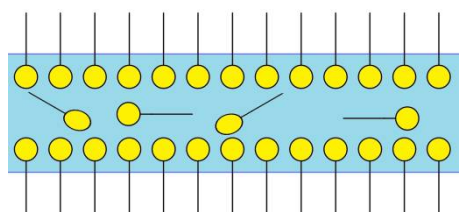
leggero sulla superficie di un liquido, le molecole superficiali di quest'ultimo vengono spinte verso il basso generando una forza di richiamo diretta verso l'alto. La superficie di un liquido si comporta quindi come una membrana elastica tesa.

L'esperienza mostra che quando un sasso cade nell'acqua si formano delle bolle d'aria, che scoppiano non appena arrivano in superficie. Ciò è dovuto al fatto che la tensione superficiale dell'acqua normale è molto alta a causa del ponte idrogeno e tende a separare le molecole nel punto dove lo spessore della parete della bolla è minimo, facendola scoppiare rapidamente.

I saponi e i detersivi sono formati da molecole che hanno una testa idrofila ed una coda idrofoba. Quando queste molecole sono sciolte in acqua, esse tendono a raccogliersi alla superficie, con la coda verso l'esterno, formando strati continui. In questo modo la tensione superficiale si abbassa, riducendosi a circa un terzo del valore normale.

Per visualizzare questo fatto proponiamo un semplice esperimento. Presa una tazza d'acqua, vi maciniamo sopra un po' di pepe che, essendo leggero ed insolubile in acqua resterà a galla. Ora versiamo al centro della tazza una goccia di detersivo per piatti. Immediatamente il pepe si muoverà verso i bordi della tazza. Questo accade a causa dell'improvvisa diminuzione della tensione superficiale al centro della superficie dell'acqua; l'acqua stessa si comporta come una membrana elastica che si contrae dalla parte in cui la tensione superficiale assume il valore maggiore.

Quando si forma una bolla di sapone, la lamina d'acqua saponata è costituita da tre strati, i cui due strati esterni sono formati prevalentemente da molecole tensioattive e lo strato interno è formato da acqua saponata, come nella figura seguente.



**Rappresentazione della lamina d'acqua saponata, con le molecole tensioattive all'esterno ed acqua saponata nella zona interna.**

Questi strati sono molto elastici e sopportano elevate deformazioni senza rompersi; non solo, essi tendono a rallentare l'evaporazione del film d'acqua e, in questo modo, prolungano la vita delle lamine e delle bolle.

## La forma delle bolle di sapone e delle lamine saponose

L'esperienza mostra che le bolle di sapone assumono una forma sferica, ma questo non accade sempre. In alcuni casi, se la bolla è particolarmente grande, la sua forma non è perfettamente sferica; quando, poi, immergiamo un telaio di forma particolare in acqua saponosa possiamo ottenere lamine saponate di forma molto particolare. Per capirne il motivo, dobbiamo innanzitutto riflettere sul comportamento delle membrane elastiche una volta che vengano tese. La forma che esse assumono dipende da un "*principio di energia minima*" che potremmo enunciare così:

*“Un sistema fisico può esistere in una determinata configurazione solo se esso non può evolvere verso una configurazione a minor contenuto energetico rispetto alla prima”.*

Dal momento che l'energia elastica dipende dalla deformazione del mezzo, la forma assunta spontaneamente da una bolla di sapone (o da una lamina saponosa) è quella che minimizza la sua superficie. Per questo motivo, le bolle di piccole dimensioni hanno forma sferica<sup>1</sup>. La sfida è comprendere quale sarà la forma di una lamina saponosa condizionata da un telaio.

Ad esempio, se immergiamo un telaio con tre punti fissi, disposti ai vertici di un triangolo equilatero, la lamina assumerà la forma illustrata nella foto seguente:



**Forma della lamina saponosa condizionata da un telaio triangolare**

Per capirne il motivo, cerchiamo di formalizzare il problema; si tratta di determinare la linea di minima lunghezza che congiunga tre punti. In questo caso il problema si riduce a trovare il punto che minimizzi la somma delle distanze da tre punti prefissati.

---

<sup>1</sup> La sfera è, infatti, il solido di minima superficie, una volta fissato il volume.

Prendiamo in esame un triangolo equilatero di lato unitario<sup>2</sup>. Chiaramente la linea di minima lunghezza che congiunge i tre vertici non è il perimetro, di lunghezza  $L = 3$ ; a prima vista, potrebbe sembrare che basti considerare una coppia di lati ottenendo una linea di lunghezza  $L = 2$  (fig. a).

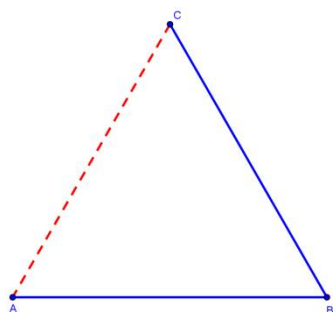


fig. (a)

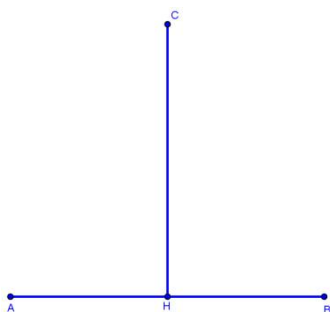


fig. (b)

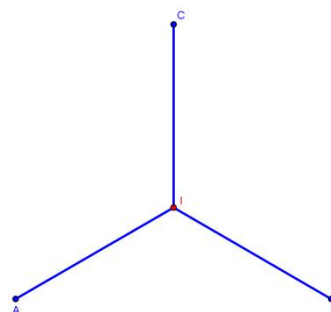


fig. (c)

**Tre possibili linee piane che congiungono tre punti (reti),  
vertici di un triangolo equilatero.**

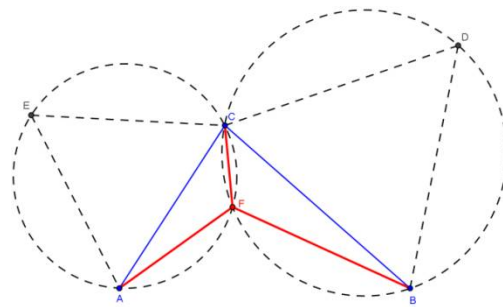
In realtà, la somma di un lato e dell'altezza ad esso relativa ha lunghezza  $L \approx 1,866$  (fig. b), ma non è ancora finita. Se consideriamo l'incentro I del triangolo, che in questo caso coincide con il baricentro (fig. c), la lunghezza di ciascuno dei tre segmenti è  $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , per le note proprietà del baricentro. Pertanto, in questo caso, la lunghezza totale della linea è  $L \approx 1,732$ .

Siamo sicuri che quella trovata (fig. c) sia davvero la "rete minima", cioè che il punto I sia quello cercato?

Per saperlo dobbiamo fare un passo indietro nella storia. Il problema era stato proposto da Fermat intorno alla metà del 1600 ed ha appassionato alcuni tra i più grandi matematici dell'epoca; Torricelli riuscì a risolverlo in molti modi diversi, dimostrando che questo punto (che chiamiamo *punto di Torricelli-Fermat*) esiste ed è unico a patto che tutti gli angoli interni del triangolo siano inferiori a  $120^\circ$ .

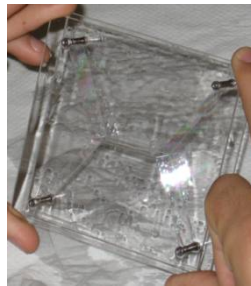
Esaminiamone la costruzione, ottenuta con riga e compasso. Costruiamo innanzitutto, esternamente al triangolo ABC, i triangoli equilateri BCD ed ACE e le circonferenze ad essi circoscritte. Chiamiamo F il punto di intersezione tra dette circonferenze, diverso da C. Per le proprietà dei quadrilateri inscrittibili, gli angoli  $\widehat{BFC}$  ed  $\widehat{AFC}$  misurano entrambi  $120^\circ$ ; di conseguenza anche l'angolo  $\widehat{AFB}$  misura  $120^\circ$ , come nel caso presentato in figura (c).

<sup>2</sup> Qui e nel seguito sottintenderemo le unità di misura, che supporremo fissate.



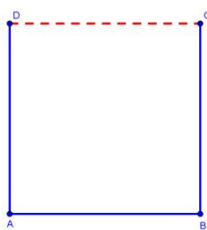
**Costruzione del punto di Torricelli – Fermat**

Ma cosa succede se i vincoli (cioè il numero dei pioli nel telaio) sono quattro? Disponendo i quattro punti ai vertici di un quadrato, la rete di lunghezza minima assumerà la forma illustrata nella foto seguente:

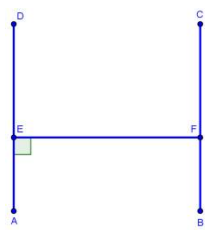


**Forma della lamina saponosa condizionata da un telaio quadrato**

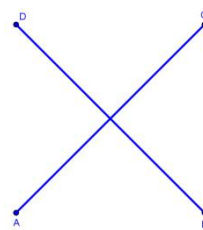
Ad una prima analisi, la cosa sembra piuttosto strana. Proviamo ad esaminare il problema più da vicino, partendo da un quadrato di lato unitario. Anche in questo caso, è evidente che il cammino minimo non può essere l'intero perimetro di lunghezza  $L = 4$ , in quanto vi sono infinite linee di lunghezza  $L = 3$  che collegano i punti (fig. a/b).



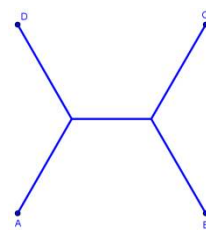
**fig. (a)**



**fig. (b)**



**fig. (c)**

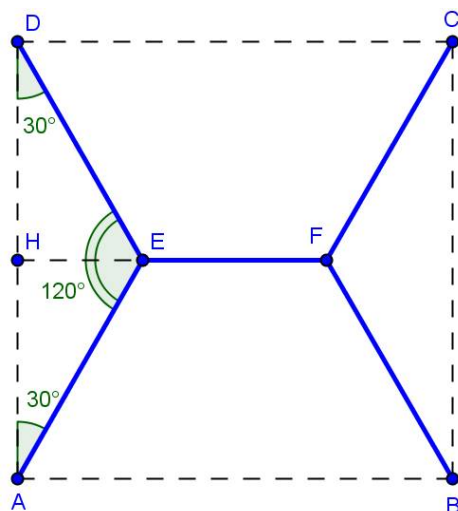


**fig. (d)**

**Quattro possibili linee piane (reti) che congiungono i vertici di un quadrato.**

Se utilizzassimo le diagonali del quadrato, la lunghezza complessiva sarebbe  $L \approx 2,828$ , ancora inferiore (fig. c), ma non basta. Infatti la forma della lamina saponosa è simile a quella che compare in figura (d), in cui tutti gli angoli che compaiono misurano  $120^\circ$ .

Per calcolare la lunghezza di quest'ultimo cammino, osserviamo che nel triangolo isoscele AED la base AD ha lunghezza unitaria.



**Rete minima tra i vertici di un quadrato.**

Per le relazioni esistenti in triangoli rettangoli particolari, possiamo concludere che  $DH = \frac{\sqrt{3}}{2} DE$ , da cui  $DE = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot DH = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  e quindi  $HE = \frac{\sqrt{3}}{6}$  ed anche  $EF = 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Concludendo, la lunghezza totale del cammino presentato in figura (d) è:

$$L = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \sqrt{3} \simeq 2,732$$

### Il problema di Steiner, o della rete di lunghezza minima

Come possiamo essere sicuri che la situazione descritta rappresenti davvero il cammino di lunghezza minima? Da un punto di vista strettamente matematico non può, ovviamente, esser sufficiente l'osservazione della foto precedente; dovremo, quindi, generalizzare il *problema di Fermat* al caso di  $n$  punti del piano. Questo problema è stato inizialmente affrontato da J. Steiner (1796 – 1863) e può essere riformulato in questo modo:

*"Dati  $n$  punti nel piano, trovare la rete minima che connette tutti questi punti, usando anche punti ausiliari."*

I punti ausiliari che vengono aggiunti sono detti *punti di Steiner* e le reti che li realizzano si chiamano *alberi di Steiner*.



Non si fatica a capire l'importanza strategica di trovare un albero di Steiner in logistica (*problema dei trasporti*) o nella progettazione di reti idrauliche, ma la sua risoluzione generale presenta – come vedremo – non poche difficoltà ed è ancora oggetto di studio.

Si può dimostrare che ogni albero minimo di Steiner ha le seguenti proprietà:

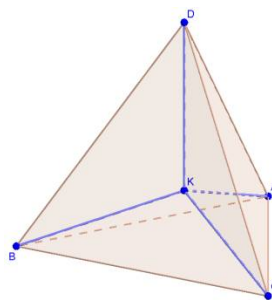
- Tutti i punti dati sono connessi a 1, 2 o 3 altri punti.
- Tutti i punti di Steiner sono connessi a 3 punti.
- Ogni coppia di lati consecutivi della rete forma un angolo di  $120^\circ$ .
- Gli alberi minimi di Steiner di  $n$  punti del piano hanno al massimo  $n - 2$  punti di Steiner.

Come dicevamo, trovare l'albero minimo di Steiner nel caso generale è un problema piuttosto complesso, dato che gli  $n$  punti possono trovarsi ovunque nel piano, ed è stato risolto per la prima volta nel 1961 quando Melzak ha proposto un algoritmo corretto. Nel 1977 Garey, Graham e Johnson hanno dimostrato che si tratta di un *problema NP*<sup>3</sup>.

Nel caso, ancora abbastanza semplice, dei vertici di un quadrato si può dimostrare che la soluzione fornita dalle lamine saponose è l'unica possibile, a meno di simmetrie assiali.

### Come si intersecano le varie superfici saponose?

Per introdurre il problema, cominciamo con l'esame di una situazione abbastanza semplice: immergendo in acqua saponata un telaio a forma di tetraedro regolare, si nota la formazione di 6 lamine saponose che convergono in un punto, rappresentato nella figura seguente.



### Rappresentazione della lamina saponosa condizionata da un telaio tetraedrico

---

<sup>3</sup> Un *problema NP* è, in ambito informatico, un problema che non può essere risolto in tempo polinomiale, cioè la cui soluzione richiede tempi di calcolo molto lunghi, che crescono al crescere del numero dei dati in ingresso.

Si può dimostrare che il punto di intersezione delle lamine liquide è il centro della sfera circoscritta al tetraedro (fig. a). Partendo da questo fatto, ci apprestiamo a dimostrare che le quattro linee di intersezione delle lamine saponose convergono con angoli di circa  $109^\circ$ . Consideriamo il tetraedro regolare di spigolo unitario (fig. b).

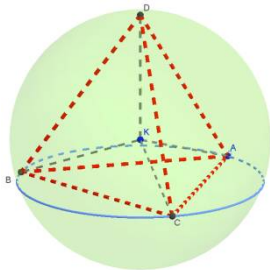


fig. (a)

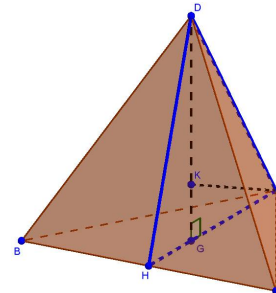


fig. (b)

### Tetraedro di spigolo unitario e sfera circoscritta.

L'altezza del tetraedro cade nel baricentro G della base che, per le proprietà dei triangoli equilateri, è anche circocentro; quindi

$$AG = \frac{2}{3} \cdot AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Per il Teorema di Pitagora, allora

$$DG = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Calcoliamo ora la lunghezza del segmento AK, raggio della sfera circoscritta (fig. b). Posto  $AK = KD = x$ , risulta

$$KG = \frac{\sqrt{6}}{3} - x$$

e, applicando il Teorema di Pitagora al triangolo AGK, ricaviamo l'equazione

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3} - x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = x^2$$

che ammette la soluzione  $x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ .

Se ora applichiamo il Teorema di Carnot al triangolo ADK, otteniamo l'equazione

$$1 = \frac{6}{16} + \frac{6}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cos \vartheta$$

da cui, banalmente

$$\cos \vartheta = -\frac{1}{3}.$$

Risolvendo l'equazione troviamo  $\vartheta \simeq 109,47^\circ$ , come dovevamo dimostrare.

Ma non è tutto. L'area di ciascuno di questi triangoli può essere calcolata facilmente, sulla base delle informazioni fin qui ottenute. Infatti

$$Area(ACK) = \frac{1}{2} x^2 \sin \vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

e quindi la superficie totale della lamina liquida è

$$S = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \simeq 1,06.$$

Se calcoliamo, invece, l'area di una faccia del tetraedro otteniamo

$$Area(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

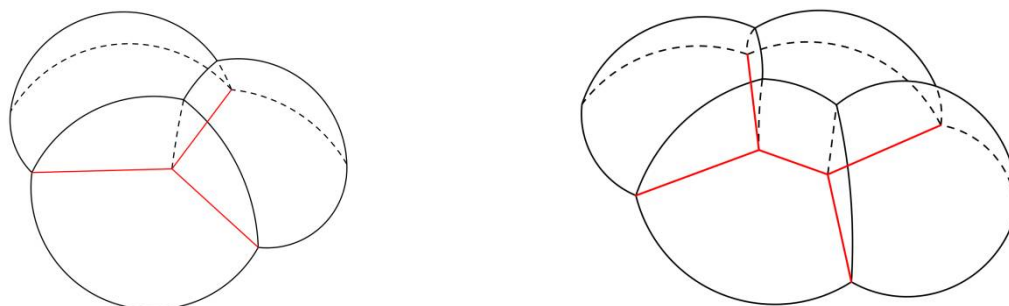
e quindi la superficie totale del solido misura

$$S' = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \simeq 1,73.$$

Osserviamo, quindi, che la superficie della lamina è inferiore a quella del tetraedro<sup>4</sup>.

L'esperienza mostra, poi, che se si immergono strutture con forme diverse, le superfici si possono intersecare solo in due modi: o tre superfici si incontrano lungo una linea regolare con angoli che hanno tutti la stessa ampiezza di  $120^\circ$  (*Prima legge di Plateau*) o sei superfici si incontrano in un vertice e le quattro curve di intersezione convergono con angoli di circa  $109,47^\circ$  (*Seconda legge di Plateau*).

Lo stesso accade anche per le calotte, formate da bolle di sapone "appoggiate" su una superficie precedentemente bagnata di acqua saponata<sup>5</sup>, come mostrano i seguenti disegni.



**Rappresentazione di calotte formate da tre (risp. quattro) bolle identiche, appoggiate su una superficie piana saponata.**

<sup>4</sup> Chiaramente, questa non è una dimostrazione del fatto che la superficie della lamina saponosa sia la minima possibile; una tale dimostrazione richiede, infatti, strumenti matematici che non sono in possesso degli studenti liceali.

<sup>5</sup> Serve per evitare che le bolle scoppino, al contatto con la superficie piana.

Se si incontrano due bolle uguali le due pareti che si fondono formano una lamina che rimane piatta. Se una bolla è più piccola dell'altra, la lamina ha una leggera flessione verso la bolla più grande. Si può dire che la bolla più piccola spinge verso quella più grande, ci troviamo di fronte ad un problema di "pressione interna" delle bolle.

Indipendentemente dalle dimensioni, poi, le superfici esterne incontrano la parete comune con angoli di  $120^\circ$ . Se si incontrano più bolle si osserva ancora la prima legge di Plateau per le superfici di contatto esterne, mentre per quelle che si creano internamente alla bolla valgono le stesse osservazioni fatte per le lamine liquide perché in tal caso è più corretto parlare di lamine saponose e non di bolle. Questo perché parte della superficie esterna delle bolle che vengono a contatto viene eliminata creando così delle lamine che occupano la minor superficie possibile.

Per concludere, non dovrebbe stupire sapere che le bolle di sapone abbiano ispirato, con il loro fascino, l'opera di molti architetti negli ultimi secoli e continuano a farlo tuttora. Negli anni sessanta del secolo scorso Otto Frei, architetto tedesco, sperimentò nuove strutture architettoniche che ideava immergendo in acqua saponata i telai che simulavano la struttura desiderata. Una volta estratti, fotografava e misurava le lamine saponose che si venivano a formare, come se si trattasse di veri e propri plastici, ottenendo dei modelli che venivano poi corretti con un adeguato calcolo strutturale. Proprio il fatto che le lamine seguano il principio di energia minima gli consentiva di ottenere delle strutture affascinanti nelle quali fossero minimizzati gli sforzi di tensione.



**La tensostruttura dell'Olympiahalle, Munchen.**

La più famosa realizzazione di Otto Frei è la tensostruttura che caratterizza l'Olympiacentrum di Monaco di Baviera, rappresentata nella foto precedente.

In queste note abbiamo interpretato alcune delle strane proprietà delle bolle di sapone, alla luce delle conoscenze scientifiche in possesso di uno studente liceale, ma questo non toglie nulla al fascino che continuano ad esercitare sul bambino che è dentro di noi.

## **Bibliografia**

- Baracchi, Tagliabue, *“Chimica”*, Lates Ed., Torino 1999
- Courant, Robbins, *“Che cos’è la matematica”*, Bollati Boringhieri, Torino 2000
- *“Alla ricerca dei cammini minimi”*, Oleg Mushkarov  
([http://www.math2earth.v3d.sk/publications/34\\_it\\_3.pdf](http://www.math2earth.v3d.sk/publications/34_it_3.pdf))
- *“Tra arte e matematica c’è soltanto una bolla di sapone”*, Valerio Vassallo  
(<http://www1.mat.uniroma1.it/people/camiz/Vassallo%202008%20-%20Tra%20arte%20e%20matematica.pdf>)