6.4 Concorso Angolo Acuto 2015

Soluzione problemi Serie 3

Problema 3.1

Sapendo che il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è di 4 cm e che i segmenti determinati su uno dei lati dal punto di contatto corrispondente sono rispettivamente di 6 cm ed 8 cm, calcolare gli altri lati.

Risposta di **Elena Stante**

Poiché i segmenti di tangente condotti da un punto esterno ad una circonferenza sono congruenti, i tre lati del triangolo misurano 14 , 8+x e 6+x come si vede in figura. Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è dato dal rapporto fra l'area S del triangolo ed il suo semiperimetro

p : $r = \frac{S}{p}$.

L'area possiamo esprimerla attraverso la formula di Erone:

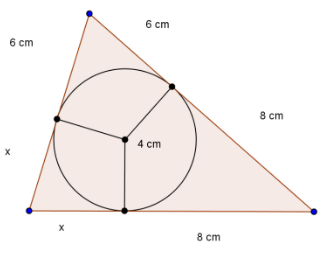
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

[dove a,b e c sono le misure dei tre lati] e quindi il raggio r sarà :

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{p(p-a)p-b)(p-c)}{p^2}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} .$$

Nel nostro caso 2p = 12+16+2x e quindi p = 14 + x , mentre

p- a=14+x-(8+x)=6 ; p-b=14+x-14=x e p-c=14+x-(6+x)=8



e quindi

$$r = \sqrt{\frac{6\times x\times 8}{14+x}} = \sqrt{\frac{48x}{14+x}} .$$

Uguagliamo questa espressione a 4 , essendo 4 cm la misura di r , e risolviamo l'equazione :

$$\sqrt{\frac{48x}{14+x}} = 4 \quad \frac{48x}{14+x} = 16 ; \quad \frac{3x}{14+x}=1 ; \quad 2x=14; \quad x=7 .$$

Gli altri due lati del triangolo misurano allora 13 cm e 15 cm .

Problema 3.2
E' dato il volume di un cilindro circoscritto ad una sfera: determina la differenza dei volumi dei due solidi ed il rapporto fra detta differenza ed il volume della sfera.
Risposta di **Elena Stante**

Il cilindro circoscritto ad una sfera ha come raggio di base il raggio R della sfera e come altezza il diametro 2R della sfera ; il suo volume è

$$V(\text{cilindro}) = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3.$$

Il volume della sfera è invece :

$$V(\text{sfera}) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

e allora

$$V(\text{cilindro})/V(\text{sfera})=3/2 \text{ ; } V(\text{cilindro})=3V(\text{sfera})/2 \text{ .}$$

La differenza tra i due volumi è

$$V(\text{cilindro})\text{-}V(\text{sfera})=(3/2\text{-}1)V(\text{sfera})=1/2V(\text{sfera})=\frac{2}{3}\pi R^3$$

e il rapporto fra questa differenza e il volume della sfera è

$$V(\text{cilindro})\text{-}V(\text{sfera})/V(\text{sfera})=1/2V(\text{sfera})/V(\text{sfera})=1/2.$$

Problema 3.3

Determinare m in modo che l'equazione

$$x^2-(3m-2)x+m^2\text{-}1=0$$

Abbia una radice tripla dell'altra**.**

Risposta di **Elena Stante**

Nell'equazione parametrica $x^2-(3m-2)x+m^2-1=0$, la somma delle radici è : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3m-2$, il prodotto delle radici è : $x_1x_2=\frac{c}{a}=m^2-1$ e una radice deve essere tripla dell'altra : $x_1=3x_2$.

Risolviamo il sistema formato da queste 3 equazioni :

$$\begin{cases} x_1=3x_2 \\ x_1+x_2=3m-2 \\ x_1x_2=m^2-1 \end{cases};\begin{cases} x_1=3x_2 \\ 4x_2=3m-2 \\ x_1x_2=m^2-1 \end{cases};\begin{cases} x_1=3x_2 \\ x_2=\dfrac{3m-2}{4} \\ x_1x_2=m^2-1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{9m-6}{4} \\ x_2=\dfrac{3m-2}{4} \\ x_1x_2=\dfrac{3m-2}{4}\dfrac{9m-6}{4}=m^2-1 \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado nell'incognita m che si ottiene svolgendo i calcoli è la seguente : $11m^2-36m+28=0$; le sue soluzioni sono : $m_1=\frac{14}{11}$ ed $m_2=\frac{22}{11}=2$, che sono i valori del parametro m richiesti.