Cubiche e quartiche
luoghi geometrici di punti del piano (parte II)

Elena Stante

Il bicorno

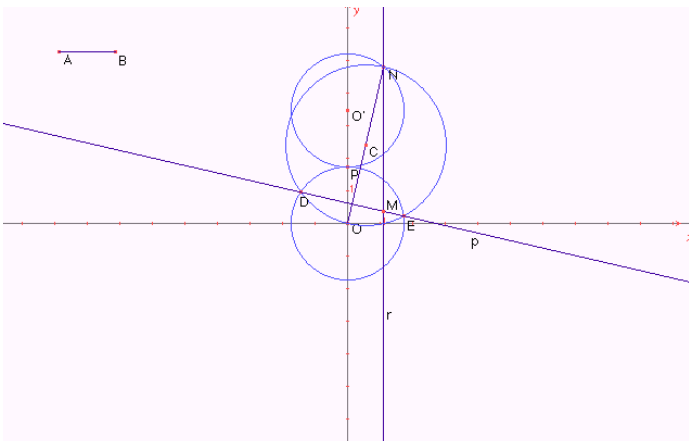
Il bicorno , detto anche *feluca* , è una curva che appartiene ad una serie di

quartiche studiate dai matematici Sylvester (nel 1864) e Carley (nel 1867). Nel 1896 una insegnante inglese , Charlotte Angas Scott , la propose in una rivista didattica e gli inglesi le dettero il nome di *cocked hat* , ovvero *cappello a due punte o bicorno*.

Anche questa curva è definibile come luogo geometrico :

Date due circonferenze C_1 e C_2 tangenti fra loro , di centri *O* ed O' e raggio AB = *a* , fissato su C_2 un punto N il luogo descritto dai punti d'intersezione della retta per N parallela alla OO' con la polare di N rispetto alla C_1 è la curva chiamata bicorno .

Tracciamo questa curva utilizzando il Cabri Gèométre



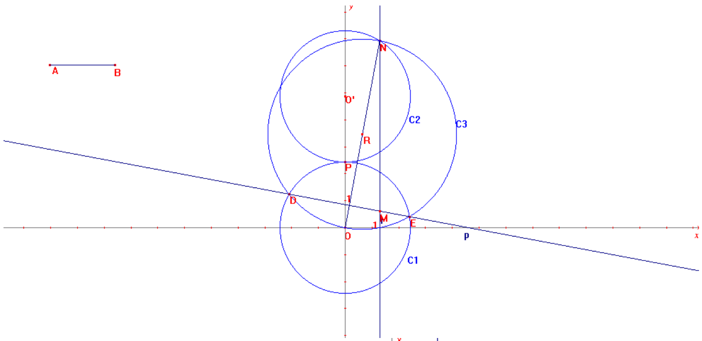
ISTRUZIONI CABRI

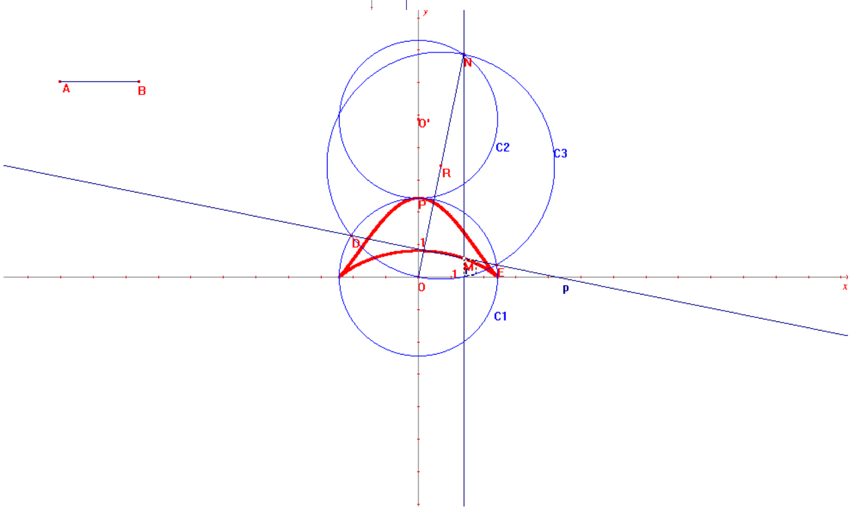
- Mostra gli assi
- Traccia un segmento AB

- Traccia la circonferenza C1 di centro l'origine *O* degli assi cartesiani e raggio AB
  (strumento Compasso)
- Individua il punto P intersezione di C1 con l'asse y
- Traccia una seconda circonferenza C2 tangente alla prima , di centro *O'*

(applica la simmetria centrale di O rispetto a P , strumento Compasso con raggio AB)

- Punto N sulla circonferenza C2
- Retta per N parallela all'asse *y (r)*Segmento NO
- Punto medio di NO (R)
- Traccia la circonferenza C3 di diametro NO (centro R e passa per O)
- Individua i punti intersezione (D ed E) di questa circonferenza con la C1
- Retta per i punti D ed E (è la polare p)
- Punto intersezione della retta p con la retta *r* (M)
- Luogo del punto M al variare di N sulla C2 : strumento Traccia , indica il punto M e muovi N su C2 (puoi anche animare il punto N con lo strumento Animazione)





EQUAZIONI DELLA CURVA

Per determinare l'equazione cartesiana del bicorno , dette (α , β) le coordinate del punto N , l'equazione della retta *r* per N parallela all'asse *y* è : $x = \alpha$,

mentre l'equazione della polare p di N rispetto alla circonferenza C_1 : $x^2+y^2=a^2$ è data da : $\alpha x+\beta y-a^2=0$.
Le coordinate del punto M , intersezione di r e di p , sono perciò :

$$\begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{a^2-\alpha^2}{\beta} \end{cases} \quad (*)$$

Tra α e β , coordinate di N sussiste inoltre la relazione :

$$\alpha^2+(\beta-2\alpha)^2=a^2 \quad (**)$$

in quanto N appartiene alla circonferenza C_2 .
Dalle (*) e (**) otteniamo l'equazione cartesiana della curva : $\left(x^2-a^2\right)y^2+\left(a^2-x^2-2ay\right)^2=0$
Essendo una curva razionale , possiamo trovare le equazioni parametriche di questa curva.
Partendo dalle equazioni parametriche della circonferenza C_2 :

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = 2a+a\sin\varphi \end{cases}$$

essendo $\begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{a^2-\alpha^2}{\beta} \end{cases}$ le coordinate del punto M che descrive il bicorno come luogo , possiamo scrivere :

$$x = a\cos\varphi$$

e

$$y=\frac{a^2-a^2\cos^2\varphi}{2a+a\sin\varphi}=\frac{a^2\sin^2\varphi}{a(2+\sin\varphi)}=\frac{a\sin^2\varphi}{2+\sin\varphi} .$$

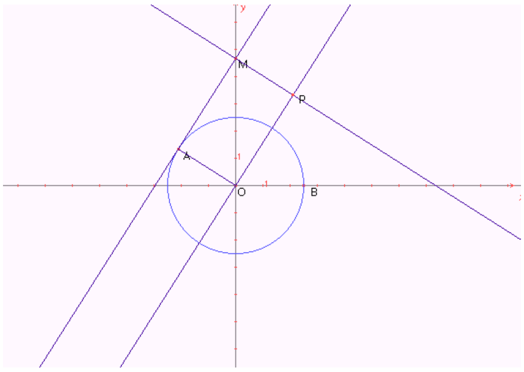
Queste ultime sono le equazioni parametriche del bicorno.

La curva kappa

K La curva prese il nome dalla sua somiglianza con l'omonima lettera greca ; essa fu proposta da Gerard von Gutschoven , discepolo di Cartesio ,all'incirca verso il 1662 ;fu studiata però anche da Newton e, alcuni anni dopo, da Johann Bernoulli .
Appartiene alla stessa categoria delle quartiche piriformi . E' definita luogo geometrico di punti e la sua costruzione geometrica con Cabri Géomètre risulta agevole .
Un rettangolo *OAMP* , variabile , ha il vertice *O* fisso nell'origine di un riferimento cartesiano , il vertice opposto *M* variabile sull'asse *y* ed il vertice *A* su

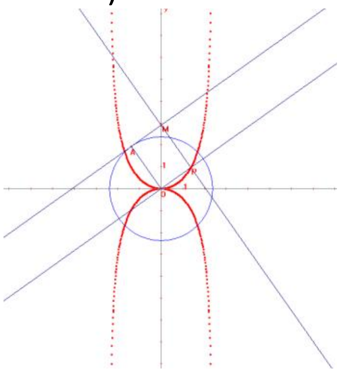
una circonferenza di centro *O* e raggio costante *a* . La curva Kappa è il luogo del quarto vertice *P* del rettangolo , al variare di *M* .

Tracciamo la curva con Cabri Géomètre



ISTRUZIONI CABRI

- Mostra gli assi
- Traccia una circonferenza di centro *O* e raggio qualunque
- Traccia un punto *A* sulla circonferenza
- Traccia il segmento *OA* e la perpendicolare in *A* ad *OA(la tangente in A alla circonferenza)*
- Punto *M* intersezione della retta tracciata con l'asse *y* Traccia la perpendicolare in *O* ad *OA* Traccia la perpendicolare in *M* ad *AM* Punto *P* intersezione delle due ultime perpendicolari tracciate
- Luogo di *P* al variare di *A* sulla circonferenza : Strumento Traccia , indica il punto P e trascina il punto A sulla circonferenza (oppure muovi punto A con lo strumento Animazione)



EQUAZIONI DELLA CURVA

E' immediato individuare l'equazione della curva kappa in un sistema di coordinate polari in cui *O* è il polo e l'asse *x* del riferimento cartesiano l'asse polare . Posto *OP = ρ* e *POB = φ* , nel triangolo rettangolo *OPM* risulta :

$$\rho = a \tan \varphi$$

che è l'equazione polare della curva .

Passando alle coordinate cartesiane si ottiene : $x^4 + x^2 y^2 - a^2 y^2 = 0$, l’equazione cartesiana della curva Kappa

Dalle note relazioni $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ e dall’equazione polare della curva $\rho = a \tan \varphi$ per sostituzione si ha :

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \\ y = a \dfrac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \end{cases}$$

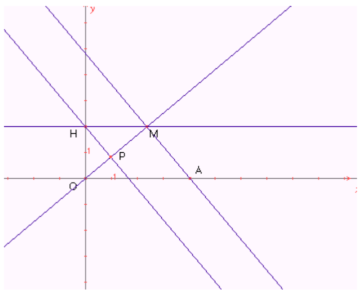
Ponendo allora $\tan \varphi = t$ si può scrivere : $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{(1+t)^2} \\ y = \dfrac{2at^2}{(1-t)^4} \end{cases}$

Queste sono le equazioni parametriche della curva Kappa.

Il bifolium

Definiamo questa curva come un luogo geometrico.

In un piano cartesiano ortogonale Oxy è dato il punto A ($4a$, 0) , con a > 0. Si conduce dal punto A una retta generica *r* e da O la retta *s* ,perpendicolare ad *r* e sia M il suo piede. Detta MH la retta perpendicolare all’asse *y* ed HP la perpendicolare ad OM, il luogo descritto da P al variare della retta *r* nel fascio di centro Ad è la curva chiamata *bifolium*.



Tracciamo la curva utilizzando il Cabri Géomètre

ISTRUZIONI CABRI

Mostra gli assi

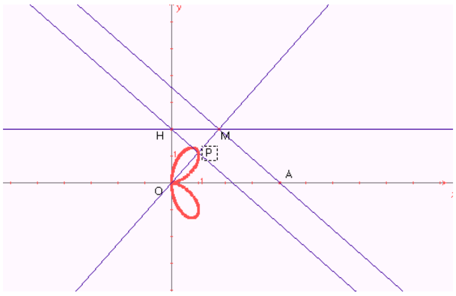
Traccia un punto *A* sull’asse *x*

Traccia una retta generica uscente da *A* Traccia la retta per *O* perpendicolare alla retta precedentemente tracciata

Punto *M* intersezione delle due rette

Traccia la retta per *M* perpendicolare all’asse *y*

Punto *H* intersezione di quest'ultima retta con l'asse *y* Traccia dal punto *H* la perpendicolare alla retta *OM*
Per tracciare il luogo :
Strumento Traccia :
indica il punto *P* e trascina nel piano la retta *AM*
(oppure muovi la retta con lo strumento Animazione)



EQUAZIONI DELLA CURVA

Per determinare l'equazione cartesiana di questa curva , seguiamo il metodo analitico. La retta del fascio di centro il punto A ($4a$, 0) ha equazione : $y = m(x - 4a)$

La retta *s* passante per O e perpendicolare ad *r* è :

$y = -\frac{1}{m}x$

Le coordinate del punto M, comune ad *r* ed *s* ,sono soluzioni del sistema :

$$\begin{cases} y = m(x - 4a) \\ y = -\frac{1}{m}x \end{cases}$$

da cui si ottiene : $\begin{cases} x_M = \frac{4am^2}{m^2 + 1} \\ y_M = -\frac{4am}{m^2 + 1} \end{cases}$.

La retta per M perpendicolare all'asse *y* incontra tale asse nel punto H (0, y_M), cioè

H (0 , $-\frac{4am}{m^2 + 1}$) e la retta HP per H perpendicolare ad *s* ha equazione :

$y + \frac{4am}{m^2 + 1} = mx$. Il punto P che descrive il luogo è il punto intersezione di HP e di *s* e quindi le sue coordinate sono soluzione del sistema formato dalle equazioni

$$y + \frac{4am}{m^2+1} = mx$$

$$y = -\frac{1}{m}x$$

Dal sistema si ricava : $\begin{cases} x = \dfrac{4am^2}{\left(m^2+1\right)^2} \\ y = -\dfrac{4am}{\left(m^2+1\right)^2} \end{cases}$

Queste sono le equazioni parametriche del *bifolium* : al variare della retta *s* e quindi del suo coefficiente angolare *m* , il punto P descrive la curva .
Se eliminiamo il parametro *m* dalle equazioni parametriche della curva , otteniamo la sua equazione cartesiana : $(x^2+y^2)^2 - 4axy^2 = 0$
Le relazioni :

$$x = \rho \cos \varphi$$

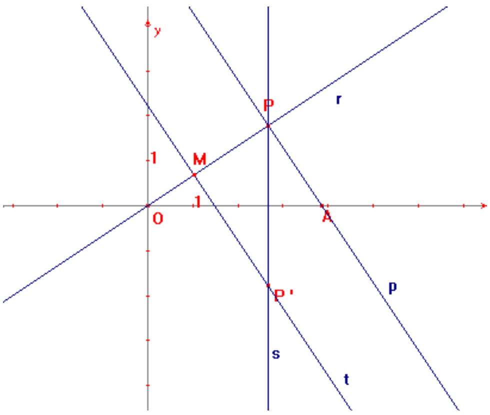
$$y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

consentono invece di passare all'equazione della curva in forma polare:
$\rho = 4a\,sen^2\varphi \cos \varphi$.

Il trifolio retto

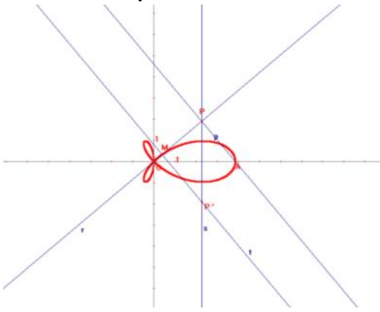
Definiamo la curva come un luogo geometrico e tracciamo in maniera dinamica il suo grafico con Cabri Géomètre .
Sia dato un sistema di assi cartesiani ortogonali. Dall'origine *O* si conduca una qualunque retta *m* . Dal punto *A* dell'asse *x* si tracci la retta perpendicolare ad *m* e sia *P* il punto intersezione .
Da *P* si tracci quindi la parallela all'asse *y* e sia P' il simmetrico di *P* rispetto ad *OA* (asse *x*) . Condotta da P' la perpendicolare alla retta *m* e detto *M* il punto comune a queste due ultime rette , il luogo descritto da *M* al variare di *m* è il trifolio retto .



Tracciamo la curva con Cabri Géomètre

ISTRUZIONI CABRI

- Mostra gli assi
- Traccia una retta generica *r* uscente da *O*
- Traccia punto *A* qualunque sull'asse *x*
- Traccia la retta per *A* perpendicolare alla retta uscente da *O* (*p*)
- Punto *P* intersezione delle rette *r* e *p*
- Traccia la retta per *P* parallela all'asse *y* (*s*)
- Punto P' simmetrico di *P* rispetto ad *OA* (asse *x*)
- Traccia retta per P' (*t*) perpendicolare alla retta di *OP*
- Punto *M* intersezione della retta *t* con *OP*
- Per tracciare il luogo di *M* al variare della retta *OP* , comando Traccia , indica il punto *M* e trascina la retta *OP* nel piano (oppure muovi la retta con lo strumento Animazione)



EQUAZIONI DELLA CURVA

Determiniamo equazione polare e cartesiana della curva . Scelto un riferimento polare con il polo in *O* e l'asse polare in *OA* , posto *OA* = *a* , *OM* = *ρ* ed *MOA* = *φ* dalla figura sopra si osserva che :

$$OM = OP - MP \qquad (*)$$

Ma $OP = a\cos\varphi$ nel triangolo rettangolo *OAP*
E, nel triangolo rettangolo *OPH* :

$PH = OP\sin\varphi = a\cos\varphi\sin\varphi = P'H$ (per simmetria)

$MP = PP'\sin\varphi = 2PH\sin\varphi = 2a\sin^2\varphi\cos\varphi$

Dalla (*) segue :

$$OM = a\cos\varphi - 2a\sin^2\varphi\cos\varphi$$

Ovvero :

$$\rho = a\cos\varphi - 2a\sin^2\varphi\cos\varphi$$

che è l'equazione polare del trifolio retto .

Utilizzando quindi le relazioni note che consentono di passare dalle coordinate polari alle cartesiane si ricava l’equazione cartesiana della curva : $\left(x^2 + y^2\right)^2 = ax\left(x^2 - y^2\right)$, ancora con il Derive :

L’equazione cartesiana si può anche determinare col metodo analitico .

Infatti , nel riferimento cartesiano scelto, *A* (*a* , 0) e la retta *m* ha equazione :

$$y = mx$$

La retta *AP* , perpendicolare ad *m* e passante per *A* ha equazione :

$$y = -\frac{1}{m}(x - a)$$

ovvero $x + my - a = 0$

Le coordinate del punto *P* ,comune a queste due rette , sono soluzioni del sistema :

$$\begin{cases} x + my - a = 0 \\ y = mx \end{cases} \quad \text{da cui si ottiene :} \quad \begin{cases} x_P = \dfrac{a}{m^2 + 1} \\ y_P = \dfrac{am}{m^2 + 1} \end{cases}$$

Le coordinate del punto P' simmetrico di *P* rispetto all’asse *x* del riferimento sono :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{m^2 + 1} \\ y = -\dfrac{am}{m^2 + 1} \end{cases}$$

La retta $P'M$, condotta per P’ e perpendicolare ad m ha equazione :

$$y + \frac{am}{m^2 + 1} = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{a}{m^2 + 1}\right)$$

Il luogo descritto da *M* al variare della retta *m* si determina eliminando il parametro *m* dal sistema formato dalle equazioni delle rette $P'M$ ed *m* :

$$\begin{cases} y + \dfrac{am}{m^2 + 1} = -\dfrac{1}{m}\left(x - \dfrac{a}{m^2 + 1}\right) \\ y = mx \end{cases} .$$

Svolgendo i calcoli si ha l’equazione cartesiana della curva :

$$ax(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)^2 .$$

RELAZIONE
Il lavoro prodotto con gli studenti è il risultato di una serie di attività svolte in buona parte nel laboratorio d'informatica con una quarta classe di liceo scientifico.
Alla base del percorso è la definizione di una curva intesa come luogo geometrico di punti, un concetto che i ragazzi incontrano nel biennio nella circonferenza e nella terza classe nelle coniche.
Il riconoscimento della forma della curva è reso particolarmente interessante dal software di geometria dinamica Cabri Géomètre e la sua costruzione richiede una procedura che traduca la proprietà di cui godono i punti della curva consentendone il tracciamento.
Nella prima fase del lavoro, avendo fissato l'attenzione su alcune curve algebriche di terzo e quarto grado, si è perciò fornita ai ragazzi la definizione di ciascuna curva in quanto luogo geometrico, lasciandoli quindi liberi di ricercare la maniera migliore per ottenerne il tracciamento grafico, utilizzando il suddetto software.
Successivamente i ragazzi, guidati nell'individuazione di qualche particolarità del luogo e talora anche nella scelta del tipo di riferimento (cartesiano o polare) più congeniale, hanno ricercato le equazioni delle curve, riconoscendone alcune loro caratteristiche.
Nonostante la tipologia particolare delle cubiche e soprattutto delle quartiche, questo tipo di analisi è anche in qualche modo propedeutico allo studio di funzioni che è argomento dell'ultimo anno di liceo.
Il mezzo informatico è stato comunque utilizzato anche sfruttando le potenzialità del software applicativo Derive; questo consente, infatti, di effettuare i calcoli, risolvendo sistemi ed equazioni, e può fornire la conferma che l'equazione della curva che è stata trovata (in forma cartesiana, polare o attraverso le equazioni parametriche) è proprio quella che ciascun suo punto ha descritto attraverso la procedura precedentemente individuata con il Cabri Géomètre.
L'impostazione che si è data al lavoro ha mirato a stimolare la curiosità e la creatività nei ragazzi; trovandosi di volta in volta in una situazione nuova, non conoscendo cioè anticipatamente le curve oggetto di studio, essi hanno potuto maturare il gusto della ricerca e della scoperta.
Il lavoro di gruppo ha poi fornito a ciascuno l'occasione di fornire il proprio contributo, rafforzando l'autostima e garantendo il rispetto delle opinioni altrui.
Le competenze in ambito geometrico e di geometria analitica sono state esaltate sia nella prima fase di costruzione che nella fase di ricerca delle equazioni delle curve, le competenze informatiche relative ai due software sono state potenziate e messe al servizio dell'apprendimento non solo nell'ambito del tema trattato.