CONCORSO

EUCLIDE- SCUOLA 2016

"MATEMATICA: COSA MI PIACE DI PIÙ E COSA DI MENO"

EUCLIDE. GIORNALE DI MATEMATICA PER I GIOVANI

Alunna: ISABEL KUTZ (classe V A, a. s. 2015/16, Liceo Scientifico "E.Siciliano", Bisignano CS)

Referente: Prof.ssa **FRANCA TORTORELLA**

LE TERNE PITAGORICHE

E LA CRITICA AI PRINCIPI

Cosa mi piace di più: *LE TERNE PITAGORICHE*

INTRODUZIONE

Il problema di stabilire quali numeri siano rappresentabili come somma di due quadrati è molto antico; alcuni enunciati che ad esso si riferiscono appaiono nell'Aritmetica di Diofanto (circa 250 a.C.), ma il loro significato preciso non è chiaro. La vera risposta alla questione fu data per la prima volta dal matematico olandese Albert Girard nel 1625, e nuovamente da Fermat un po' più tardi. E' probabile che Fermat potesse provare i propri enunciati, ma le prime dimostrazioni di cui si sappia con certezza sono quelle pubblicate da Eulero nel 1749.

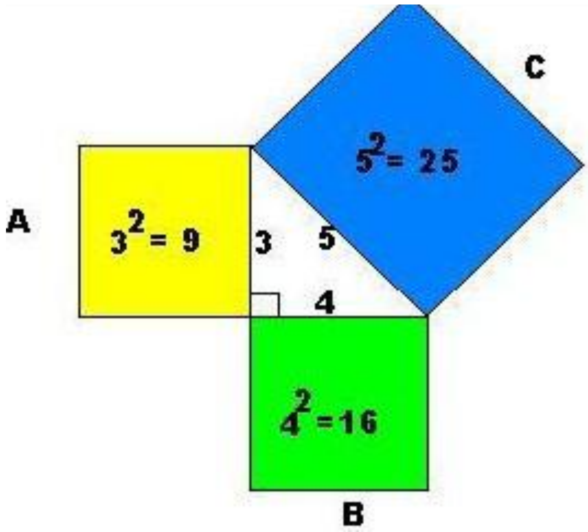

Figura 1: ***Esempio di applicazione del teorema di Pitagora***

In seguito generalizzeremo il problema a somme di tre quadrati, che fu dimostrato completamente da Gauss nelle sue Disquisitiones arithmeticae, e infine a somme di quattro quadrati (il numero minimo per ottenere ogni numero naturale) la cui prima dimostrazione fu esibita nel 1770 da Lagrange. Inizialmente tratteremo il problema di individuare quando la somma di due quadrati è a sua volta un quadrato, ovvero trovare le terne pitagoriche, ossia
le terne ordinate di interi x; y; z che sono soluzioni dell'equazione:

$x^2 + y^2 = z^2$

e che quindi si possano pensare come lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo: *x, y*, i cateti e *z* l'ipotenusa. Si trova che il terzo elemento della terna, cioè la *z* (ossia l'ipotenusa) deve essere somma di due quadrati e forse ciò ha dato origine al problema di trovare i naturali che sono somme di due quadrati ossia i naturali N tali che si abbia:

$a^2 + b^2 = N$

con a, b interi, e più in generale i naturali che sono somme di due quadrati.

$C^2 = A^2 + B^2$

TERNE PITAGORICHE

Definizione 1.1 (**Terna pitagorica**). Si chiama *terna pitagorica* ogni terna ordinata di numeri interi che sia soluzione dell'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1.1)$$

Questo particolare problema è molto antico, infatti se ne trova una soluzione nel lemma 1 relativo alla proposizione 29 del decimo libro degli “Elementi” di Euclide. Il nome terna pitagorica però deriva dal teorema di Pitagora, da cui deriva il fatto che ad ogni triangolo rettangolo con lati di lunghezza intera corrisponda una terna pitagorica e viceversa.
Innanzitutto consideriamo il caso in cui $xyz = 0$. Naturalmente la terna nulla (0; 0; 0) è pitagorica, infatti sostituendo all'equazione (1.1) si vede che la terna ne è una soluzione. Le terne non nulle hanno sempre x o y non nulli e $z \neq 0$. Quindi le terne saranno della forma $(a, 0, \pm a)$, $(0, a, \pm a)$ $\forall a \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$.
Premettiamo le seguenti definizioni al fine di capire meglio i discorsi successivi.

Definizione 1.2. Si dice che un intero $b \neq 0$ *divide* un intero a o che b è un *divisore* di a o che a è un *multiplo* di b e si scrive $b|a$ se esiste un intero c tale che $a = bc$ (ovviamente a è multiplo anche di c e c è divisore di a).

Definizione 1.3 (**Numero primo**). Un naturale diverso da 0 si dice *primo* quando è ≠1 e ha come divisori solo 1 e se stesso.

Definizione 1.4 (**Massimo comun divisore**). Dati x, y interi si dice massimo comun divisore di x e y il numero naturale *d* che è il massimo tra i divisori comuni ad x e y e si scrive d = MCD(x, y) oppure d = (x; y)

Definiamo un tipo particolare di terna:

Definizione 1.5 (**Terna pitagorica primitiva**). Una terna pitagorica si dice primitiva se e soltanto se gli interi x, y, z sono coprimi, ovvero MCD(x, y, z) = 1 Dall'equazione (1.1) si osserva che una qualsiasi terna pitagorica (x, y, z) è primitiva se e soltanto se gli interi sono coprimi a due a due.

Detto questo comprendiamo bene che la terna nulla non è primitiva, infatti MCD(0, 0, 0) = 0 e le uniche terne primitive con un un elemento nullo sono ottenute tutte da (0, 1, 1) cambiando i segni e permutando la prima con la seconda componente, questo perché MCD(0, 1, 1) = 1.
Le terne pitagoriche proporzionali ad una stessa terna primitiva x; y; z sono tutte e sole quelle date da mx; my; mz ($\forall$ m $\in \mathbb{Z}$). Infatti se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva anche la terna (mx; my; mz) è primitiva perché essendo $x^2 + y^2 = z^2$ è anche $m^2(x^2 + y^2) = m^2z^2$ e quindi $(mx)^2 +(my)^2 = (mz)^2$ ossia mx; my; mz è pitagorica. Viceversa se X, Y, Z è una terna pitagorica non primitiva, ossia $X^2 + Y^2 = Z^2$ e X, Y, Z non sono coprimi allora sarà MCD(X, Y, Z) = m e quindi X= mx; Y = my; Z = mz con x, y, z coprimi ed essendo $(mx)^2 + (my)^2 = (mz)^2$ sarà $m^2(x^2 + y^2) = m^2z^2$ e dividendo per m^2 si ha $x^2 + y^2 = z^2$ e quindi x; y; z è una terna pitagorica primitiva.
Si ha subito che, fissata una terna (x; y; z) non nulla e con xyz $\neq$ 0; da questa si ottengono altre 15 terne cambiando i segni e permutando x con y. Tra queste sedici terne se ne trovano due con x > 0, y > 0, z > 0 ed esse si ottengono una dall'altra permutando x con y.
Per questo motivo di solito si determinano solo le terne primitive con x > 0, y > 0, z > 0 ed a meno dello scambio di x con y.

Determinazione delle terne pitagoriche primitive

Si dimostra facilmente che: *Se una conica $\mathfrak{C}$ ha equazione cartesiana a coefficienti interi e se ha un punto razionale $\mathbb{R}$ allora ha infiniti punti razionali.*

I punti razionali di $\mathfrak{C}$ sono tutti e soli i punti di intersezione di $\mathfrak{C}$ con le rette intere (ossia con equazione a coefficienti razionali e quindi interi) del fascio di centro $\mathbb{R}$. Il metodo dovuto a Klein sarà applicato nella prima parte della dimostrazione che ci darà le terne pitagoriche primitive. Osserviamo che con questo metodo il problema di determinare i punti razionali di una conica a coefficienti interi è ricondotto a quello di trovarne uno.

Teorema 1.1.1. Le terne pitagoriche primitive x; y; z; con xyz $\neq$ 0 e x > 0, y > 0, z > 0, a meno dell'ordine di x; y e dei segni di x; y; z sono tutte e sole le terne date da:

$x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$ (1.2)

con $a, b \in Z$, $0 < b < a$, a e b con parità diversa (ovvero se a è pari b dev'essere dispari o viceversa) e MCD(a; b) = 1

Dimostrazione. **Metodo di Klein**
Possiamo vedere geometricamente che l'equazione (1.1) rappresenta un cono circolare retto di $\mathbb{R}^3$ con il vertice nell'origine degli assi cartesiani. Come nella figura:

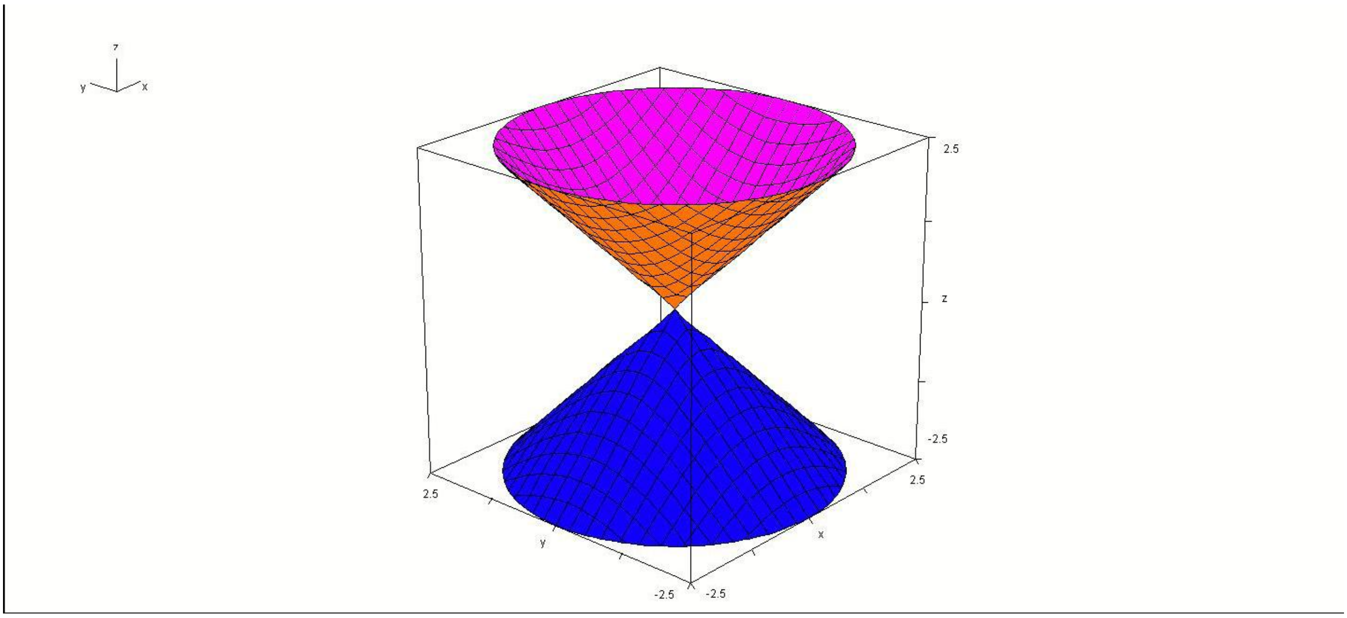

Figura 1.1: ***Rappresentazione grafica in $\mathbb{R}^3$ di $x^2 + y^2 = z^2$***

Quindi dal punto di vista geometrico il problema è trovare i punti a coordinate intere del cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$ con vertice nell'origine.
In ogni terna pitagorica non nulla z 6= 0. Dividendo $x^2 + y^2 = z^2$ per z^2 si ottiene:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1 \qquad (1.3)$$

Ponendo : $X = \frac{x}{z} \quad Y = \frac{y}{z}$ (1.4)

E sostituendo nella (1.3) si ottiene :

$X^2 + Y^2 = 1$ (1.5)

Che nel piano cartesiano rappresenta la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Relazione tra i numeri di Fibonacci e le terne pitagoriche

Definizione 1.6 (**Serie di Fibonacci**). Si chiama *serie* o *successione* di Fibonacci l'insieme dei naturali ottenuti per ricorsione da:

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ con $F_1 = 1$ e $F_0 = 0$ (1.6)

I naturali F_n si dicono *numeri di Fibonacci*

Teorema 1.1.2. Scelti comunque quattro termini consecutivi della serie di Fibonacci, a, b, c, d, troviamo una terna pitagorica formata da:

$x = ad,\quad y = 2bc,\quad z = b^2 + c^2$

Dimostrazione. Essendo $c = a + b$ sarà $a = c - b$, $d = b + c$, con b e c coprimi perché numeri di Fibonacci consecutivi. Si ha $x = (c - b)(c + b)$ e quindi si ottiene:

$x = c^2 - b^2,\quad y = 2bc,\quad z = b^2 + c^2$ (1.7)

Se a è dispari solo uno dei naturali b e c è pari.

Se invece a è pari anche d sarà pari e b e c entrambi dispari e coprimi. Quindi la terna x, y, z non è primitiva perché tutte le componenti sono pari.

Dividendo per 2 si ottiene la terna:

$$x' = \frac{c^2 - b^2}{2} \qquad y' = bc \qquad z' = \frac{c^2 + b^2}{2}$$

Ossia

$$2x' = c^2 - b^2, \qquad y' = bc, \qquad 2z' = b^2 + c^2 \tag{1.8}$$

Cosa non mi piace: *LA CRITICA AI PRINCIPI*

La critica dei principi è all'ordine del giorno fra i matematici contemporanei. L'analisi approfondita dei concetti di limite e di funzione, le ricerche che hanno come punto di partenza la teoria delle parallele e la geometria non-euclidea, quelle più recenti che si riattaccano alla fondazione della geometria proiettiva e all'Analysis Situs, gli sviluppi sulle varietà a più dimensioni, sulle trasformazioni e sui loro gruppi. Finalmente la teoria degl'insiemi e le speculazioni sull'infinito e l'infinitesimo attuale, cui si connettono le geometrie non-archimedee, hanno sollevato tanti problemi che toccano le profonde radici dell'edifizio matematico e attraggono, per diversi motivi, gli spiriti filosofici. Nell'ambito di una scienza eminentemente conservatrice, che, da duemila anni, offre lo spettacolo di una continuità ininterrotta di costruzioni progredienti senza demolizione, le critiche innovatrici, di colore rivoluzionario, svegliano forse un interesse emotivo più forte che in qualsiasi altro campo dello scibile, ove le crisi si succedono visibilmente in modo periodico. A questo interesse emotivo si deve non soltanto la resistenza che le nuove idee incontrano presso il pubblico non preparato a comprenderle, ma più ancora la seduzione che esse esercitano su tanti spiriti, pronti a passare, per naturale reazione psicologica, dalla meraviglia e dallo sbigottimento alla fede e all'entusiasmo, per il mondo nuovo che si dischiude ai loro occhi. Ora le discussioni più vive suscitate dai nuovi campi di indagine e soprattutto i nuovi atteggiamenti dello spirito critico, pongono naturalmente un problema d'ordine filosofico e storico : quale sia il valore proprio della critica dei principi e quale posto le spetti nell'ordine dei progressi della nostra scienza. Tutte le questioni particolari di valutazione, per riguardo a diversi indirizzi di analisi e di ricerca, sembrano dominate da quel problema generale che, sia pure in diversi modi, ogni lavoratore, riflettendo sul proprio lavoro, è indotto a porre a se stesso. La storia ci offre a questo riguardo un primo insegnamento istruttivo : la critica dei principi non è affatto un fenomeno nuovo che caratterizzi la produzione matematica dei tempi nostri; all'opposto essa è parte essenziale dell'elaborazione dei concetti che in ogni tempo prepara o accompagna il progresso della scienza e la sua più estesa applicazione. La perfezione universalmente ammirata dell'opera d'Euclide si rivela appunto allo storico come il frutto maturo di una lunga critica, che si svolge durante il periodo costruttivo della geometria razionale da Pitagora ad Eudosso. Tanta finezza e profondità d'idee si dispiega in quel movimento critico, che talune vedute non poterono essere comprese se non in tempi recentissimi, quando gli sviluppi della nostra stessa critica ci condussero a superare veramente, anche in questa direzione, il pensiero greco. Allora in particolare ha cominciato a palesarsi nella sua propria luce il significato dei metodi e dei principii mercé cui i Greci stessi riuscirono a vincere i paradossi che sembra incontrare naturalmente chi riflette sull'infinito; giacche le difficoltà che a questo riguardo travagliarono lungamente i matematici e i filosofi dell'antichità, sono le medesime che ebbe a sperimentare il Rinascimento nel periodo costruttivo dell' analisi infinitesimale, ed anche dopo la costituzione sua fino alla critica più recente. La fondazione di una teoria della misura per opera della scuola pitagorica sollevò per la prima volta la questione del continuo geometrico. I pitagorici ponevano a fondamento di quella teoria un elemento indivisibile dello spazio, il punto dotato di estensione finita; intanto il rapporto incommensurabile della diagonale al lato del quadrato suscitava sui loro passi una insuperabile contraddizione.

CONSIDERAZIONI

La critica dei principi fa parte integrante della storia degli sviluppi delle Matematiche, così dal punto di vista estensivo come dal punto di vista intensivo; essa è il processo di elaborazione e di definizione dei concetti che tende ad estendere i dati dell'intuizione a campi sempre più vasti e così ad allargare la posizione dei problemi e a preparare strumenti più penetranti per recare risposta determinata a più profonde questioni. Ora questa veduta storica suppone in qualche modo una legge di sviluppo delle Matematiche, rispetto a cui assegna per così dire un fine naturale alla critica dei principi. Ed intanto il progresso di questa critica stessa sembra all'opposto far scaturire l'illimitata arbitrarietà della costruzione matematica. La Geometria che aveva visto allargare il campo delle sue possibilità con la trattazione delle ipotesi non euclidee e con gli spazi a più dimensioni, diventa ormai suscettibile di un'estensione illimitata, sicché non vi è più gruppo di oggetti dotato di proprietà qualsiasi che non possa rivendicare il nome di "spazio”. Così le Matematiche, che per Platone, Descartes, Leibniz offrivano il fondamento di una filosofia della natura, elevantesi ad una grandiosa metafisica razionalistica, oggi, mercé il possente risveglio della critica contemporanea, suscitano una nuova filosofia dello spirito, cioè una gnoseologia che deve rivelare il pensiero a se stesso indagando le profonde armonie psicologiche ond'esso si atteggia nella continuità della storia. E da questo lato la critica dei principi promette di recare nuovi risultati importanti; dopo avere illuminato il carattere proprio della Logica, essa riuscirà ad approfondire lo studio degli elementi intuitivi di diverso ordine che conferiscono alle Matematiche il loro inesauribile valore.