Osservazioni sul Teorema di Archimede.

Lorenzo Meneghini

Archimede fu sicuramente uno dei più grandi geni dell'età ellenistica; figlio di un astronomo, si occupò di astronomia, ma fu anche eccellente matematico ed uomo dotato di grande ingegno. Non è certo che abbia studiato ad Alessandria, ma vi sono tracce di una sua corrispondenza con Eratostene ed altri matematici alessandrini; tra le poche informazioni a nostra disposizione sulla sua vita, dobbiamo citare quelle ricavate dalla vita di Marcello – generale romano – scritta da Plutarco. Vi si legge, tra l'altro, l'aneddoto secondo cui Archimede, ormai settantacinquenne, sarebbe stato ucciso da un soldato romano durante il saccheggio di Siracusa, nonostante Marcello avesse dato l'ordine di salvargli la vita.
Gli storici ritengono che, comunque, Archimede non si sia dedicato alla didattica e che proprio per questo i suoi molteplici trattati matematici siano scritti con un linguaggio piuttosto difficile.
Il presente articolo non ha chiaramente la pretesa di essere esaustivo; vuole, piuttosto, presentare in termini moderni uno dei suoi più brillanti risultati, contenuto nel trattato *Quadratura della parabola*. Verrà dato spazio anche alla presentazione di un'esperienza didattica sviluppata in una classe 3° di Liceo Scientifico nel corso dell'A.S. 2014/'15.

Il teorema di Archimede

Consideriamo una parabola ed una retta ad essa secante nei punti A e B; la regione piana racchiusa da tale retta e dall'arco $\widehat{AB}$ di parabola è detta ***segmento parabolico*** di base AB (fig. 1*a*). I libri di testo oggi in commercio presentano solitamente la seguente versione del celebre teorema (fig. 1).

TEOREMA DI ARCHIMEDE

L'area di un segmento parabolico di base AB è i $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo $AA'B'B$, ove A' e B' sono le proiezioni di A e B sulla tangente alla parabola parallela ad AB.

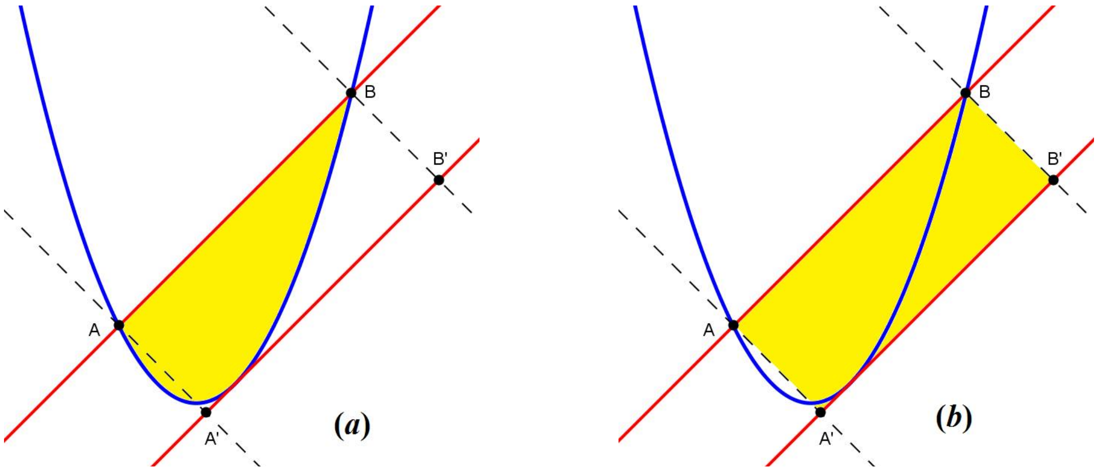


Fig. 1 – Rappresentazione grafica del Teorema di Archimede: l'area del segmento parabolico di base AB (fig. a) è i due terzi di quella del rettangolo AA'B'B (fig. b)

In realtà è interessante notare che, nella Proposizione 17 del trattato *Quadratura della parabola*, Archimede non parla del rettangolo AA'B'B, ma del triangolo ABC (fig. 2). Più precisamente, la versione originale del teorema tradotta in linguaggio moderno potrebbe essere enunciata così:

L'area di un segmento parabolico di base AB è i $\frac{4}{3}$ *dell'area del triangolo* ABC, *ove C è il punto di contatto con la tangente alla parabola parallela ad AB.*

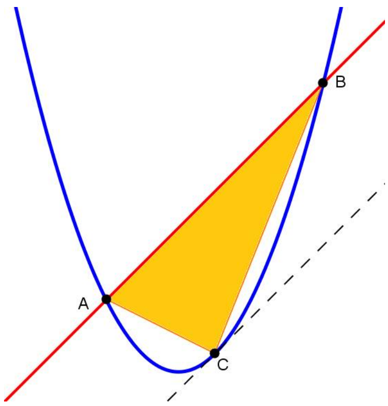


Fig. 2 – Rappresentazione grafica del Teorema di Archimede

Archimede fornisce una dimostrazione, peraltro piuttosto complessa, di questo risultato usando il *metodo di esaustione*, precedentemente introdotto e largamente utilizzato da Eudosso; nelle successive sette proposizioni del trattato, egli da una seconda dimostrazione dello stesso teorema, basandosi su un'idea più semplice da sviluppare, che presenteremo ora in termini moderni.

Innanzitutto osserviamo che possiamo scegliere un riferimento cartesiano in modo che la parabola abbia asse verticale e vertice nell'origine; pertanto l'equazione della parabola è $y = ax^2$. Possiamo inoltre supporre, senza perdere generalità, che $a > 0$.

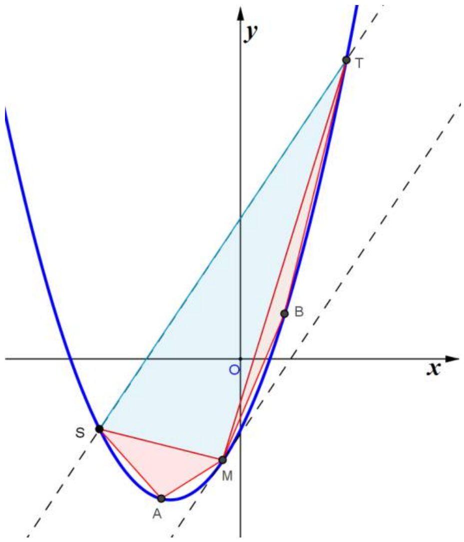


Fig. 3 – Dimostrazione del Teorema di Archimede

Consideriamo i punti $S(s, as^2)$ e $T(t, at^2)$ appartenenti al grafico della parabola, con $t > s$; come si può verificare facilmente, la retta ST ha equazione

$$y = a(s+t)x - ast$$

Determiniamo ora M, punto di intersezione tra la parabola e la tangente parallela alla secante. Consideriamo, quindi, il fascio di rette $y = a(s+t)x + k$ e cerchiamo la retta del fascio che ha un contatto doppio con la parabola; il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = a(s+t)x + k \end{cases}$$

ha equazione risolvente

$$ax^2 - a(s+t)x - k = 0$$

il cui discriminante è $\Delta = a\left[a(s+t)^2 + 4k\right]$, che si annulla per $k = -\dfrac{a(s+t)^2}{4}$.

Per tale valore del parametro, l'equazione risolvente diviene:

$$ax^2 - a(s+t)xk + \frac{a(s+t)^2}{4} = 0 \Leftrightarrow a\left(x - \frac{s+t}{2}\right)^2 = 0$$

Pertanto: $M\left(\dfrac{s+t}{2}, \dfrac{a^2}{4}(s+t)^2\right)$.

Abbiamo, quindi, dimostrato la

PROPOSIZIONE 1

Dato un segmento parabolico di base ST, l'ascissa del punto di contatto tra la parabola e la tangente ad essa parallela alla base ST è la media aritmetica delle ascisse dei punti S e T.

Calcoliamo ora l'area del triangolo STM (fig. 3). Determiniamo innanzitutto la misura della base del triangolo:

$$ST = \sqrt{\left(t-s\right)^2 + a^2\left(t^2 - s^2\right)^2} = \sqrt{\left(t-s\right)^2 + a^2\left(t-s\right)^2\left(t+s\right)^2}$$

ed essendo $t > s$ possiamo scrivere

$$b = ST = \left(t-s\right)\sqrt{1 + a^2\left(s+t\right)^2}\,.$$

L'altezza del triangolo è rappresentata dalla distanza tra M e la base ST; ricordando che $a > 0$:

$$h = \frac{\left|a\left(s+t\right)\frac{s+t}{2} - \frac{a^2}{4}\left(s+t\right)^2 - ast\right|}{\sqrt{a^2\left(s+t\right)^2+1}} = \ldots = \frac{a\left(t-s\right)^2}{4\sqrt{a^2\left(s+t\right)^2+1}}$$

Pertanto l'area del triangolo STM è:

$$\tau = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\left(t-s\right)\sqrt{1+a^2\left(s+t\right)^2}\cdot\frac{a\left(t-s\right)^2}{4\sqrt{a^2\left(s+t\right)^2+1}} = \frac{a\left(t-s\right)^3}{8}$$

Abbiamo quindi dimostrato la

PROPOSIZIONE 2

Dato un segmento parabolico di base ST, l'area del triangolo di altezza massima inscritto nel segmento parabolico può essere espressa da

$$\tau = \frac{a\left(t-s\right)^3}{8},$$

ove a è il coefficiente dominante della parabola e s,t sono le ascisse degli estremi della base del segmento parabolico.

Applicando la Proposizione 2, possiamo calcolare le aree dei triangoli SMA e MBT (fig. 3).

- $Area\left(SMA\right) = \frac{a}{8}\left(\frac{s+t}{2} - s\right)^3 = \frac{a}{8}\cdot\left(\frac{s+t-2s}{2}\right)^3 = \ldots = \frac{a}{64}\left(t-s\right)^3$
- $Area\left(MBT\right) = \frac{a}{8}\left(t - \frac{s+t}{2}\right)^3 = \frac{a}{8}\cdot\left(\frac{2t-s-t}{2}\right)^3 = \ldots = \frac{a}{64}\left(t-s\right)^3$

Pertanto la somma delle aree dei triangoli rossi in fig. 3 vale:

$$\frac{a}{64}\left(t-s\right)^3+\frac{a}{64}\left(t-s\right)^3=2\cdot\frac{a}{64}\left(t-s\right)^3=\frac{a}{32}\left(t-s\right)^3=\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{8}\left(t-s\right)^3=\frac{\tau}{4}$$

Possiamo, quindi, facilmente notare che la sequenza delle aree dei triangoli che "saturano" il segmento parabolico è una progressione geometrica di ragione $q=\frac{1}{4}$.

Per calcolare l'area del segmento parabolico possiamo immaginare di iterare indefinitamente la costruzione ottenendo di volta in volta una coppia di triangoli la cui area complessiva sia $\frac{1}{4}$ di quella del triangolo iniziale; sommando le aree di questi triangoli riusciamo, perciò, a trovare quella del segmento parabolico come somma della serie geometrica:

$$\tau+\frac{\tau}{4}+\frac{\tau}{4^2}+...+\frac{\tau}{4^n}+...=\tau\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\tau$$

Questa osservazione conclude la dimostrazione del teorema di Archimede.

❑

È importante osservare che Archimede non parla affatto si "somme infinite" nella sua dimostrazione originale, poiché questo tipo di ragionamenti a quei tempi non venivano accettati[1].

Per questo, preferisce ricorrere ad un doppio ragionamento per assurdo, dimostrando che l'area del segmento parabolico non può essere né maggiore né minore di $\frac{4}{3}\tau$.

Idee per un percorso didattico

Personalmente ritengo che gli studenti dovrebbero incontrare "problemi di quadratura" fin dall'inizio del loro percorso di geometria analitica (che avviene solitamente durante il 3° anno del Liceo Scientifico), cioè molto prima dell'introduzione del calcolo integrale. Questo li aiuta a riorganizzare e consolidare le proprie conoscenze, anche quelle acquisite negli anni precedenti, nel tentativo di determinare l'area di particolari domini piani. Per questo ho iniziato a proporre problemi in cui si debbano calcolare aree di regioni piane delimitate da segmenti e particolari archi di curva (circonferenza, ellisse e parabola).

[1] Può essere interessante leggere quanto scritto sul cosiddetto *horror infiniti* in [2], pagg. 6 e segg..

Inoltre, saper determinare aree senza ricorrere all'integrazione può risultare molto comodo anche durante il 5° anno. Il Teorema di Archimede è chiaramente uno strumento molto importante per risolvere problemi di questo genere.
In queste note abbiamo presentato una dimostrazione del teorema che può essere affrontata abbastanza agevolmente dagli studenti del 3° anno di un liceo scientifico. Tra i prerequisiti si trovano sicuramente le conoscenze di base su retta e parabola, oltre – chiaramente – a quelle sulle progressioni geometriche.
In particolare, non è molto difficile far intuire che, se una progressione geometrica ha ragione *q* di modulo inferiore ad 1, la somma dei suoi primi *n* termini

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

"si avvicina progressivamente" a

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

senza alcun bisogno di ricorrere al concetto di limite di una successione.
Durante l'A.S. 2015/'16 ho deciso di proporre ai miei studenti di 3° un percorso che ci portasse progressivamente ad intuire le idee chiave della dimostrazione del Teorema di Archimede. Prima di affrontarla in classe, quindi, ho chiesto agli studenti di svolgere i problemi e rispondere alle domande che si trovano nella *scheda di lavoro* disponibile al link

https://app.box.com/s/2lyq87ii7dsx5bbbsf9p6eg2196ck6pn

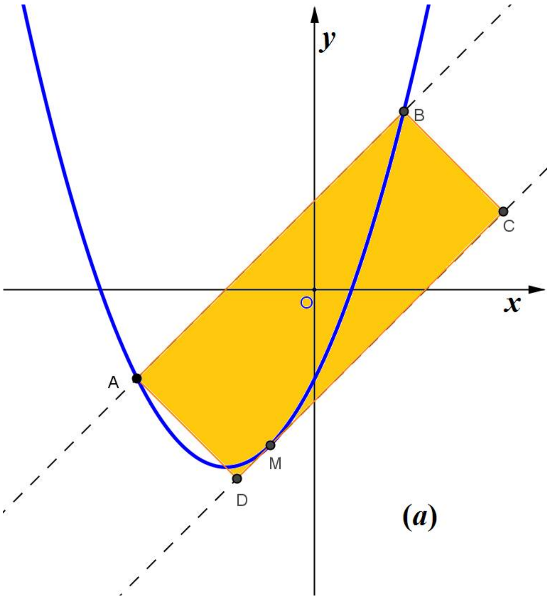
Analizzando assieme a loro i risultati ottenuti, siamo riusciti a formalizzare la dimostrazione del teorema nella sua versione originale (una lezione in modalità *brain storming*).
In una lezione successiva abbiamo commentato l'equivalenza tra la procedura descritta nel libro di testo e l'enunciato ricavato assieme ed abbiamo risolto alcuni esercizi.

L'idea di Mattia Miolato

Ritengo utile presentare, a questo punto, l'idea – a mio avviso molto interessante – venuta ad uno studente piuttosto intuitivo mentre stavamo analizzando il problema seguente:

> *Determinare l'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola* $y = x^2 + 2x - 1$ *e dal segmento AB, ove* $A\left(-2,-1\right)$ *e* $B\left(1,2\right)$.

Mattia ha osservato che il rettangolo di cui parla il Teorema di Archimede (fig. 4*a*) è equivalente al parallelogramma delimitato dalla corda AB e dalla tangente ad essa parallela, oltre che da due rette verticali passanti, rispettivamente, per A e B (fig. 4*b*).



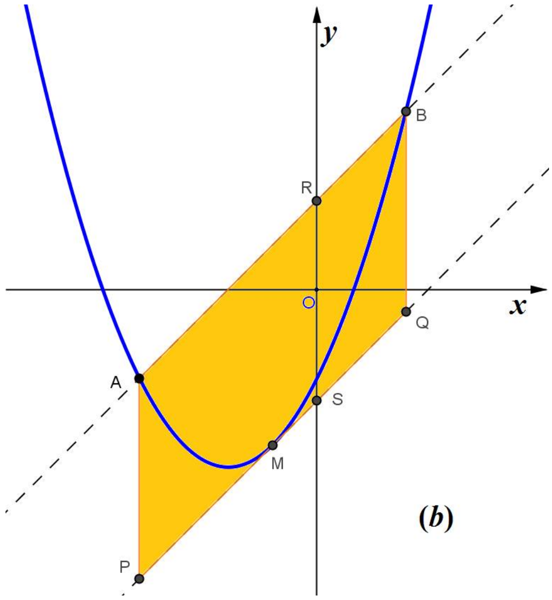


Fig. 4 – Teorema di Archimede: il rettangolo (fig. *a*) ed il parallelogramma (fig. *b*) sono equivalenti tra loro

Dalla discussione che ne è seguita abbiamo concluso che, qualora sia nota l'equazione della tangente parallela alla base AB, il calcolo dell'area del parallelogramma può essere ulteriormente semplificato considerando come base il segmento AP = RS e come altezza la distanza tra le basi AP e BQ.

Conclusioni

Il teorema presentato in queste note è stato ricavato circa 2300 anni or sono, utilizzando un ragionamento piuttosto raffinato che può essere presentato – almeno per linee generali – anche agli studenti liceali. Ritengo che sia importante prendere per mano gli allievi e far loro notare la genialità di certe idee che poi verranno riprese e sviluppate in modo diverso negli anni successivi. Il ricorso al *problem solving* per introdurre l'argomento risulta di solito molto stimolante per gli studenti ed anche la successiva attività di discussione dei risultati ottenuti può portare idee nuove ed interessanti (come quella di Mattia, presentata in queste note). Chi scrive non ha certo la pretesa di aver scoperto qualcosa di radicalmente innovativo né dal punto di vista contenutistico, né da quello metodologico; si vuole solo testimoniare il fatto che alcune attività almeno parzialmente alternative alla lezione frontale sono spesso assai proficue.

Bibliografia

[1] C. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, Farigliano (CN), 1990

[2] L. Meneghini, *Verso l'infinito ed oltre. Un percorso ad ostacoli da Pitagora ai giorni nostri*, «Euclide. Giornale di matematica per i giovani», n. 29 (2016)

[3] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, *Matematica.blu 2.0* (vol. 3), Zanichelli Editore, Bologna, 2012