Il calcolo delle variazioni: origini antiche e prospettive future

Ennio De Giorgi

In un recente incontro che ho avuto a Trento con Nash e con altri amici, sostenevo che la matematica si impara molto più facilmente quando vi è un amico matematico che, in forma rapida e concisa, ti possa mettere al corrente dei risultati e dei problemi aperti in un certo campo.

Dal canto mio, non ho avuto la possibilità di incontrare direttamente Tonelli; tuttavia, lo spirito del suo lavoro mi è arrivato attraverso le conversazioni con Guido Stampacchia, che aveva invece avuto diverse occasioni per parlare con Tonelli, e che mi ha trasmesso, per cosi dire, lo "spirito" del calcolo delle variazioni.

Una delle caratteristiche del calcolo delle variazioni è, secondo me, quella di essere un ramo molto fluido della matematica, e per questo sono solito dire che esso è una foresta da esplorare, piuttosto che un palazzo da costruire. Nel calcolo delle variazioni non ci si può limitare ad apprendere le definizioni, dare alcuni assiomi e poi applicarli ai vari casi concreti; in realtà, nel calcolo delle variazioni crescono assieme problemi e teorie, e spesso il medesimo problema viene affrontato all'interno di quadri teorici sempre più ampi, che vengono adattati allo sviluppo e all'estensione dei problemi stessi.

Questo è forse uno dei motivi per cui i giovani, a meno che non siano particolarmente coraggiosi, esitano un po' a dedicarsi al calcolo delle variazioni, perché esso non è una specializzazione precisa all'interno della matematica, bensì un complesso di problemi in cui non ci si può illudere di impadronirsi prima dei metodi e degli strumenti per poi applicarli in un secondo tempo; al contrario, occorre fabbricare, o trovare lungo il cammino, oppure ancora apprendere da amici, libri, riviste o altrove, quelli che sono gli strumenti e le teorie più adatti allo studio dei problemi più diversi, da quelli più antichi a quelli più moderni.

Uno dei problemi più antichi, che era stato preso in considerazione già dagli Antichi Greci, era quello riguardante le proprietà isoperimetriche del cerchio e della sfera: in breve, il fatto che, tra tutte le figure di perimetro fissato, il cerchio è quella che racchiude l'area massima, così come la sfera, tra tutti i solidi aventi una data area della superficie laterale, è quello avente il volume massimo. Analogamente, quando si passa a considerare spazi ad n dimensioni, questo tipo di risultato viene generalmente enunciato dicendo che, tra tutti gli insiemi di uno spazio Euclideo n-dimensionale, la sfera è quello che, a parità di misura $(n-1)$-dimensionale della frontiera, ha misura n-dimensionale massima.

Questo esempio consiste in una serie di problemi che presero ad essere studiati già nell'antichità greca: le formulazioni dei quali si sono via via evolute, man mano che si evolvevano i concetti stessi di volume e di figura, passando dalle figure classiche della geometria Euclidea al più generale concetto di sottinsieme di un determinato spazio; inoltre, nella misura in cui si evolveva la nozione di insieme, si evolvevano anche quelle di lunghezza, area, e misura $(n-1)$-dimensionale, per cui anche la proprietà isoperimetrica della sfera ha avuto, in ogni secolo, un tipo di formulazione corrispondente allo stato di avanzamento, in quell'epoca, delle nozioni di figura, area, e misura.

Con riferimento a questo esempio, in uno dei suoi tanti lavori, Tonelli enunciò un teorema nel quale la proprietà isoperimetrica della sfera veniva dimostrata nell'ambito della misura delle superfici secondo Lebesgue, del quale Faedo ci ha parlato stamattina all'interno del suo intervento.

Altri esempi di problemi nel calcolo delle variazioni nascono dall'interazione della matematica con le varie scienze applicate, e moltissime sono le questioni, nelle discipline più diverse, in cui il problema principale consiste nel rendere massima oppure minima una certa grandezza, sotto determinati vincoli. Ad esempio, nell'ambito delle scienze economiche vi sono alcuni problemi, oggi chiamati "problemi di ottimizzazione", che consistono nel rendere massima una certa qualità o quantità (un profitto, un beneficio, eccetera) sotto opportuni vincoli, oppure nel rendere minimi i costi nel raggiungimento di certi obiettivi. Inoltre, in meccanica, le situazioni di equilibrio di un sistema sono quelle configurazioni in cui si ha un minimo dell'energia potenziale, in modo che, a meno di non fornire energia al sistema dall'esterno, il sistema stesso non può uscire da un certo stato di equilibrio.

Questi sono solo alcuni dei numerosi problemi nati dalle più diverse applicazioni della matematica alla fisica, all'economia, e a tutte le altre scienze. Recentemente, anche se confesso di non essere molto informato sull'argomento, ricordo di aver ascoltato una conferenza di Villaggio, che illustrava come le ossa del corpo umano obbediscano a certi principi di massimo o di minimo, per ottenere la massima resistenza a certi tipi di sforzi e di sollecitazioni. Questo mi pare un fatto abbastanza importante, che dimostra il carattere multiforme, difficilmente inquadrabile in una teoria unica, del calcolo delle variazioni.

In tempi recentissimi, alcuni problemi variazionali sono sorti anche nell'ambito della teoria della visione. Se esaminiamo una figura ottenuta da una fotografia scattata da un aereo o da un satellite, notiamo in genere contorni più o meno sfasati, con errori dovuti alle imperfezioni degli strumenti di osservazione; si tratta, insomma, di figure che presentano un certo grado di imprecisione. Può essere interessante, qualora si sappia che l'oggetto fotografato deve avere certi contorni precisi, il problema di ricostruire i contorni stessi. Si pone allora una difficoltà di questo tipo: quali sono gli oggetti matematici che hanno certe proprietà di regolarità (da stabilire a seconda dei vari problemi) e che sono, in qualche senso, i più "vicini" all'immagine, più o meno sfocata, di cui disponiamo? Quest'ultimo è un problema con infinite varianti nei settori più diversi, dalla medicina all'osservazione geografica.

Anche qui entra in gioco un'altra questione importante, quella cioè di quale sia una "metrica" adatta a certi determinati problemi (ad esempio, occorre precisare cosa vuol dire che una certa immagine è più o meno "vicina" ad un'altra immagine). In molti problemi del calcolo delle variazioni, infatti, una delle scelte fondamentali da fare è lo stabilire quale nozione di distanza si vuole introdurre in una determinata classe di oggetti. Ovviamente, non c'è una nozione univoca di distanza, valida per tutti problemi variazionali possibili. Molte volte, dato un certo problema, la difficoltà maggiore sta proprio nel cercare di capire quale sia la nozione di distanza più congeniale al tipo di problema che si vuole studiare.

Anche in questo caso, il calcolo delle variazioni non ci fornisce lo "spazio metrico" in cui dobbiamo compiere il nostro studio: ci dà, piuttosto, l'indicazione di un certo funzionale, di una certa grandezza (dipendente ad esempio da un volume, da una superficie e via dicendo), e poi lascia il matematico libero, nei limiti di una certa ragionevolezza e saggezza, di scegliere quale tipo di metrica sia la più congeniale al tipo di problema che si vuole risolvere.

Pertanto vi è effettivamente un enorme spazio, lasciato alla libertà del matematico, nell'ambito del calcolo delle variazioni. Direi che quest'ultimo è probabilmente uno dei settori meno specializzati della matematica, forse il meno specializzato di tutti e, come tale, è anche un settore che si pone, per così dire, a cavallo fra ciò che viene chiamato convenzionalmente analisi e ciò che va normalmente sotto il nome di geometria.

Una delle caratteristiche dei problemi più originali e difficili del calcolo delle variazioni è proprio quella di essere problemi a metà tra analisi e geometria; Questa disciplina rappresenta quindi un campo certamente affascinante, poiché il matematico vi può trovare molta libertà; tuttavia, vi sono al tempo stesso anche molti rischi di scegliere direzioni poco significative o poco consistenti.

Un altro aspetto riguarda il concetto stesso di "soluzione di un problema variazionale". Quasi tutti i problemi trovano il loro ambiente naturale in classi di curve, superfici o funzioni che sono *a priori* abbastanza regolari o che comunque, se presentano qualche singolarità, hanno comunque spigoli o vertici abbastanza ben delimitati. Bene, in genere i cosiddetti "metodi diretti" del calcolo delle variazioni (che, come è già stato messo in evidenza, si sono sviluppati soprattutto grazie all'opera di Tonelli) raramente forniscono un teorema di esistenza del massimo o del minimo originariamente cercato: in genere essi conducono ad un risultato di esistenza per i massimi o i minimi non del problema di partenza (generalmente piuttosto regolare ed intuitivo), bensì per opportune forme "rilassate" del problema iniziale. Il problema "rilassato" è un problema definito su una classe molto più ampia di oggetti rispetto al problema di partenza, e questa classe più ampia gode di solito di quelle proprietà di semicontinuità che consentono l'uso dei metodi diretti del calcolo delle variazioni.

Buona parte del calcolo delle variazioni moderno passa, in un primo tempo, attraverso teoremi di esistenza di minimo per i "rilassati" di un problema assegnato inizialmente su dati molto regolari; successivamente, dopo il lavoro di scelta (che deve in qualche maniera essere una scelta felice) dell'ambiente in cui impostare il problema rilassato, inizia la seconda fase, cioè lo stabilire se il punto di minimo, che era stato trovato in una classe di problemi rilassati, non appartenga per caso anche alla classe di oggetti molto regolari in cui era ambientato il problema iniziale, e possa quindi essere recuperato come soluzione del problema iniziale stesso. Questo accade, per esempio, nello studio di molti problemi isoperimetrici, anche nel caso del classico problema di Plateau e delle sue generalizzazioni.

Il problema di Plateau si può esporre facilmente in termini piuttosto intuitivi: possiamo pensare di prendere un pezzo di filo di ferro, immergerlo in acqua saponata, tirarlo fuori e chiederci come sia fatta la superficie del velo d'acqua saponata che ha come contorno il filo di ferro. Questo problema può essere affrontato a vari livelli, e può essere generalizzato in vari modi, ad esempio tramite la "teoria delle correnti" di Federer e Fleming, che non posso qui esporre, ma che rappresenta una larga generalizzazione di una originaria idea di Caccioppoli che, sostanzialmente, consisteva in questo: quando si ha una figura assai poco regolare, si cerca di approssimarla, in una metrica opportuna, tramite poligoni (se siamo nel piano) o tramite poliedri (se siamo nello spazio), dopo di che si costruisce il "rilassato" del funzionale perimetro (nel caso dei poligoni) o area laterale (nel caso dei poliedri).

A partire da questa idea (e con molta fatica, perché lo sviluppo di una intuizione anche semplice è raramente un impresa semplice!), su questa teoria si innesta tutta una serie di sviluppi, indubbiamente complessi, che hanno portato Federer e Fleming all'introduzione delle cosiddette "correnti" che, *a priori*, sono insiemi assai poco regolari, ma che, qualora godano della proprietà di minima area, sono necessariamente superfici molto regolari.

In particolare, uno dei risultati più importanti e stupefacenti di questa teoria è il seguente. Le cosiddette "frontiere localmente di misura minima" (ovvero, modificando in una piccola zona la frontiera dell'insieme, la misura di questo insieme non può che crescere) godono di una proprietà abbastanza curiosa: se l'ambiente è uno spazio fino a sette dimensioni, esse sono perfettamente regolari; se, invece, ci troviamo in uno spazio ad otto dimensioni, esse possono avere delle singolarità isolate; se, infine, la dimensione dello spazio è maggiore di otto, esse possono presentare degli insiemi di singolarità assai più complicati, ma sempre di una dimensione di Hausdorff abbastanza bassa.

Quest'ultimo è un esempio di quella che potremmo chiamare la "terza fase": dopo le fasi di rilassamento di un certo funzionale e di dimostrazione dell'esistenza dei suoi minimi, si passa al lavoro opposto, cioè quello di regolarizzazione, in cui si dimostra che quelle soluzioni assai generali e *a priori* poco regolari, quando realizzano un minimo diventano di fatto molto regolari, e ciò permette spesso di minimizzare anche il funzionale di partenza.

I momenti caratteristici dei metodi diretti del calcolo delle variazioni si possono quindi così riassumere: una prima fase, di rilassamento del funzionale ad ambiti opportuni; una seconda fase, di minimizzazione dei funzionali rilassati; una terza fase, di ricerca di regolarità, ovvero il tentativo di dimostrare che le soluzioni trovate di un certo problema, *a priori* assai poco regolari, sono invece regolari (in senso più o meno debole: anche per quanto riguarda la regolarità vi sono molti livelli intermedi o parziali).

Queste sono, in sintesi, le linee essenziali di quella che può essere la ricerca moderna nel calcolo delle variazioni. Accanto a queste linee, che direttamente si ispirano ai metodi diretti introdotti da Tonelli, ci sono molte varianti ulteriori: per esempio, vi sono tutti i problemi di "controllo", che sono problemi di minimo di una forma un po' particolare, oppure i cosiddetti problemi di "estremalità", cioè lo studio di curve, superfici o altri enti matematici che, pur non fornendo il minimo assoluto di un certo funzionale, sono tuttavia punti inferiormente stazionari del funzionale stesso, cioè sono punti tali che, dopo una piccola perturbazione della curva o della superficie in questione, il valore del funzionale aumenta oppure, se diminuisce, ciò avviene molto lentamente, con infinitesimi di ordine superiore rispetto al cambiamento della curva o della superficie che quindi, per piccole perturbazioni, si comporta sostanzialmente come un punto di minimo.

Questo è un problema che può avere molte varianti: volendo darne un'immagine molto semplice, possiamo per esempio pensare ad un cerchio massimo su una superficie sferica. Certamente, il cerchio massimo può essere deformato in modo che la sua lunghezza diminuisca, tuttavia se del cerchio massimo consideriamo soltanto un piccolo tratto e lo deformiamo, allora la curva deformata risulta più lunga del cerchio massimo iniziale. Pertanto, abbiamo una situazione in cui la curva considerata non è un minimo del funzionale lunghezza, tuttavia "in piccolo" essa rappresenta una curva di lunghezza minima tra tutte le curve tracciate sulla superficie sferica. Si tratta ovviamente di un esempio molto elementare, e se ne potrebbero fare di più sofisticati: esiste infatti tutta una complessa teoria a proposito dei punti stazionari nei problemi di calcolo delle variazioni, la quale ormai costituisce quasi un ramo a sé estremamente sviluppato.

Tutto questo dà origine ad una serie di problemi ancora tutti da risolvere, e che certamente possono risultare molto affascinanti per quei matematici che abbiano le seguenti due caratteristiche. In primo luogo, la capacità di "amare il problema non risolto", cioè non dedicarsi esclusivamente a quei problemi alla soluzione dei quali si giungerà verosimilmente entro pochi mesi; per amare il calcolo delle variazioni occorre infatti essere capaci di riconoscere l'importanza, il significato e la difficoltà dei problemi più ardui, non esitare ad ammettere la propria eventuale incapacità di risolverli, e saper realmente gioire anche quando qualcun altro perviene alla soluzione, consapevoli del significativo passo in avanti che tale soluzione rappresenta all'interno della propria disciplina.

Questa capacità di affezionarsi ai problemi difficili è la prima dote necessaria per poter amare il calcolo delle variazioni. L'altra dote necessaria è, a mio avviso, il non esitare a divulgare e far conoscere problemi che si ritengono tra i più difficili ed interessanti, nel timore che qualcun altro sia capace di risolverli. Chi pensa che un matematico perda prestigio nel momento stesso in cui ammette di non essere stato capace di risolvere questo o quel problema, certamente non è persona adatta al calcolo delle variazioni; chi insegna questa disciplina deve essere in primo luogo una persona capace di affezionarsi al problema non risolto, capace di dichiarare con franchezza che un certo problema non è ancora stato risolto, e anche capace di dichiarare che, probabilmente, qualche problema non è stato bene impostato. Prima ancora dei problemi bene impostati e non risolti, infatti, vi sono quei problemi che la nostra sensibilità avverte come male impostati, e di cui bisognerebbe cercare una impostazione migliore. Anche in questo caso, la nozione di "migliore impostazione" non obbedisce a regole rigide; si può affermare che qui intervengono i gusti personali, la disponibilità al dialogo, ed un certo intuito, che consente, a volte, di sviluppare un'idea più o meno felice per poter impostare in maniera radicalmente diversa un certo problema.

A questo proposito, direi che c'è una singolare affinità (è questa una mia opinione personale che forse qualcuno non condivide, ma che in ogni caso esprimo poiché è una cosa alla quale credo profondamente) tra certi principi della metodologia scientifica, in particolare nel calcolo delle variazioni, e quelli che sono due articoli tipici della "Dichiarazione Universale dei Diritti dell'Uomo" del 10/12/1948, cioè l'articolo che afferma la libertà di pensiero e di coscienza e la libertà di enunciare apertamente e pubblicamente il proprio credo, e l'articolo che raccomanda la comprensione e l'amicizia fra tutti i gruppi etnici e religiosi, raccomandazione che deve valere senz'altro anche per i gruppi culturali più diversi.

Mi pare che, per trovare le formulazioni più felici in matematica, occorrano le due cose assieme: questo spirito di indipendenza e questa libertà di comunicare agli altri le proprie ipotesi di lavoro, ascoltandone naturalmente le critiche ed essendo disposti a convergere quando ci si accorge che le critiche sono fondate, e insieme la disponibilità a fare questo con spirito di amicizia, sforzandosi di farsi comprendere e di comprendere il punto di vista del proprio interlocutore. Questo credo debba valere sia per quanto riguarda i rapporti con gli studiosi della propria materia sia, ancor di più, per quanto riguarda i rapporti con gli studiosi di altre materie, quali la fisica, la biologia e molte altre ancora; questa libertà ed autonomia di pensiero e questo desiderio di amicizia e di comprensione profonda delle altre discipline sono due elementi che, messi assieme, formano il punto di partenza di ogni buona ricerca scientifica e, in particolare, il punto di partenza della ricerca nel calcolo delle variazioni.

A proposito della comprensione, vorrei aggiungere che è illusorio pensare che per realizzare la cosiddetta "ricerca interdisciplinare" sia sufficiente mettere assieme alcune persone di varia specializzazione, ciascuna delle quali rimane però chiusa nel proprio ambito, convinta che le varie porzioni di metodi e di notizie che ciascuno fornisce trovino automaticamente la propria collocazione. Bisogna rendersi conto che il dialogo interdisciplinare è sì importante, ma affinché questo possa dare dei frutti è necessario arrivare alla comprensione reciproca, cioè non limitarsi all'essere a conoscenza di un certo problema in fisica o in biologia, bensì riuscire, un poco alla volta, a comprendere la mentalità ed il modo di pensare del fisico, del biologo, dell'ingegnere, dell'economista o del linguista (oggi vi è anche una certa interazione con la linguistica, ed ormai anche la logica ed il diritto si pongono dei problemi di confronto piuttosto elevati).

In definitiva, una comprensione profonda non significa sapere tutto ciò che può sapere il medico o l'ingegnere (nessuno oggi sogna di essere un nuovo Leonardo), ma piuttosto cercare di capire in profondità l'oggetto della ricerca, i concetti, i metodi e la mentalità essenziali del proprio interlocutore. Se si arriva a questa comprensione profonda, allora, effettivamente, la "ricerca interdisciplinare" non è più un semplice slogan ma può diventare una realtà culturale in matematica.

Naturalmente, l'abitudine a questo tipo non banale di comprensione deve nascere sin dall'inizio; non per nulla la stessa Dichiarazione afferma che all'amicizia, alla comprensione ed alla tolleranza occorre educare in tutta la scuola e, da questo punto di vista, credo sia stato un grosso danno per la cultura italiana una troppo drastica separazione tra i corsi del biennio di ingegneria, matematica, fisica ed informatica. In questo modo, fin dai primi anni della gioventù, in cui una persona sarebbe disposta a discutere per ore e ore o per un'intera serata di alcuni problemi culturali di fondo, in un momento così prezioso per la formazione culturale ed etica del giovane, quest'ultimo viene spinto alla specializzazione precoce. Ciò da un lato sottrae alla matematica tante persone che magari, dopo un anno o due di fisica o di ingegneria, un tempo scoprivano la propria vocazione per la matematica (io sono, tra l'altro, uno di questi), dall'altro sviluppa, fin dall'inizio, i germi di una mentalità alla specializzazione ed all'isolamento precoci che, secondo me, non giovano alla formazione dello scienziato né a quella del tecnico né a quella dell'uomo, con tutta la sua disponibilità alla comprensione e all'amicizia verso persone di ambito culturale diverso dal proprio.

Queste sono le condizioni culturali che, a mio parere, occorrono allo sviluppo della scienza; da un punto di vista personale, la meditazione e l'incontro col calcolo delle variazioni certamente hanno rappresentato un'occasione importante per accorgersi di tutto questo fondo etico che è alla base della stessa metodologia scientifica.

Recentemente, osservavo che il cosiddetto "rigore matematico" non è (o, almeno, non dovrebbe essere) qualcosa che vada a sovrapporsi alla quotidiana comunicazione spontanea ed intuitiva; al contrario, il vero rigore matematico rappresenta lo sforzo di trovare le parole più semplici ed efficaci per trasmettere il proprio pensiero ad un pubblico abbastanza eterogeneo, che magari non conosceva quelle parole o comunque non aveva familiarità con un certo uso delle parole.

Anche a questo proposito, se devo citare la mia esperienza personale, mi sono accorto di certi caratteri insoddisfacenti di quello che io chiamo il "riduzionismo insiemistico", cioè la tendenza a ridurre tutta la matematica alla teoria degli insiemi, quando ho insegnato all'Università di Asmara. Era questa un'università giovane e molto povera, retta da un gruppo di suore missionarie, tra le quali ricordo la nipote di Papa Roncalli, che ci accompagnava in macchina all'aeroporto. In quell'ambiente incontrai studenti di grande intelligenza, provenienti tuttavia da un mondo culturale e da un tipo di scuola media molto lontano dal nostro, per cui il problema di spiegare in modo non superficiale i principi alla base della teoria degli insiemi, nonché la nozione stessa di insieme, presentava un tipo di difficoltà diverso da quello al quale ero abituato in Italia, dove si presume che gli studenti abbiano già appreso l'insiemistica e sembra quindi del tutto superfluo soffermarsi criticamente su quei concetti. Questa esperienza mi ha portato a rivedere le mie stesse idee sulla teoria degli insiemi e, più in generale, sugli assiomi fondamentali della matematica, e questo è stato per me un ulteriore aspetto di una comunicazione profonda significativa.

In sintesi, credo che il calcolo delle variazioni sia un settore molto vasto e variegato ma, proprio a causa di questa sua varietà, esso non è adatto a chi vuole lavorare poco o con risultati immediati e sicuri; esso costituisce però un'ottima "palestra" per capire quali sono le radici etiche e culturali del metodo scientifico, e di tutto ciò che è il nostro lavoro di matematici, fisici o ingegneri.

Questo è ciò che io penso e sento del calcolo delle variazioni: se qualcuno ha qualche altro modo di vedere o di sentire, mi piacerebbe avere con lui un colloquio, sia pur breve, su questo argomento.

Testo della conferenza del prof. Ennio De Giorgi tenuta il 12 marzo 1996 presso l'Aula Magna della Scuola Normale Superiore di Pisa in occasione del Convegno: Leonida Tonelli e la matematica nella cultura italiana del '900.