RICERCA E COSTRUZIONE DELLE TERNE PITAGORICHE E CONGETTURE

Alunne: NOEMI GIOVINCO; MARIA ELISABETTA SPOSATO; MARTA CAMERA; DAVID LE PERA; FRANCESCO ATTICO; ANTONIO LIRANGI; PIERLUIGI AMODIO; LORENZO BARBIERI **.**
(classe IIB Liceo Scientifico “E.Siciliano”, Bisignano CS)

Referente: Prof.ssa FRANCA TORTORELLA

Cosa mi piace di più: *LE TERNE PITAGORICHE*

La storia della ricerca delle terne pitagoriche è molto antica, certamente molto prima al periodo in cui viene tradizionalmente collocata la figura di Pitagora di Samo. Questa ci è nota solo in modo incerto ed indiretto, attraverso le testimonianze di Autori quali Platone ed Erodoto; Pitagora viaggiò molto: secondo la tradizione si recò in Egitto, a Babilonia e forse addirittura in India; quarantenne, si stabilì a Crotone dove fondò una scuola con le caratteristiche di una confraternita religiosa, filosofica, scientifica e politica. Dopo contrasti con alcune fazioni politiche di Crotone, Pitagora dovette fuggire a Metaponto, dove fu assassinato nel 497 a.C., ma di tutte queste notizie mancano i riscontri storici.
A parte le gravi incertezze a proposito della storicità della biografia di Pitagora, interessante e significativa appare l'esplicita connessione tra la dottrina pitagorica e le culture orientali. Inizieremo infatti con il rilevare che alcune tecniche per la ricerca delle terne pitagoriche risalgono addirittura ai Babilonesi: ci riferiamo particolarmente alla tavoletta Plimpton 322, databile tra il 1900 ed il 1600 a.C. In essa troviamo la seguente tabella:

(1:)59:00:15	1:59	2:49	1
(1:)56:56:58:14:50:06:15	56:07	1:20:25	2
(1:)55:07:41:15:33:45	1:16:41	1:50:49	3
(1:)53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:09:01	4
(1:)48:54:01:40	1:05	1:37	5
(1:)47:06:41:40	5:19	8:01	6
(1:)43:11:56:28:26:40	38:11	59:01	7
(1:)41:33:45:14:03:45	13:19	20:49	8
(1:)38:33:36:36	8:01	12:49	9
(1:)35:10:02:28:27:24:26	1:22:41	2:16:01	10
(1:)33:45	45	1:15	11
(1:)29:21:54:02:15	27:59	48:49	12
(1:)27:00:03:45	2:41	4:49	13
(1:)25:48:51:35:06:40	29:31	53:49	14
(1:)23:13:46:40	56	1:46	15

Sottolineiamo che i valori a(13), c(2), c(6), c(15) riportati nella tabella sono stati corretti, in sostituzione di quelli sbagliati della tavoletta originale. Prendiamo ad esempio in considerazione i valori a, b, c desunti dalle prime quattro righe:

2; 0 1; 59 2; 49

57; 36 56; 7 1; 20; 25

1; 20; 0 1; 16; 41 1; 50; 49

3; 45; 0 3; 31; 49 5; 9; 1

Si tratta di numeri scritti in base sessagesimale (il primo numero a destra rappresenta le unità; il secondo deve essere moltiplicato per 60; il terzo per 3600);

posti in forma decimale, essi sono facilmente riconoscibili come terne pitagoriche:

120; 119; 169 (risulta 1202 +1192 = 1692)

3456; 3367; 4825 (risulta 34562 +33672 = 48252)

4800; 4601; 6649 (risulta 48002 +46012 = 66492)

13500; 12709; 18541 (risulta 135002 +127092 = 185412)

Analogamente per le altre righe della tavoletta. La decifrazione della tavoletta Plimpton 322 ha lasciato aperte due questioni: innanzitutto non è stato chiarito il ruolo della prima colonna (qualche studioso ha avanzato l'ipotesi di un suo collegamento con una proto-trigonometria babilonese, ma l'ipotesi, per quanto suggestiva, appare un po' fantasiosa: Joseph, 2000); inoltre non conosciamo il procedimento mediante il quale i Babilonesi hanno ricavato le terne pitagoriche riportate.

A tempi più vicini a noi risalgono le formule attribuite a Platone (427-347 a.C.) da Proclo di Alessandria (410-485, autore di un Commento al I libro degli Elementi), il quale ricorda anche qualche leggendaria ricerca di Pitagora:

a = 2x;   b = x 2 –1;   c = x 2 +1

Oggi osserveremmo che per x = 0, x = 1 esse non portano a risultati significativi (si tratta infatti delle terne: 0, –1, 1 e 2, 0, 2; ricordiamo peraltro che 0 e 1 non erano considerati veri e propri "numeri" dai Greci). Per x = 2 otteniamo:

a = 4;   b = 3;   c = 5

…E si tratta dell'unica terna pitagorica così ottenuta per la quale è: b<a (per tutte le altre terne risulta infatti: a<b<c). Osserviamo quindi che per x dispari si ottengono terne pitagoriche non primitive (costituite da tre numeri pari):

x = 3 a = 6 b = 8 c = 10

(multipla di: a = 3 b = 4 c = 5)

x = 4 a = 8 b = 15 c = 17

x = 5 a = 10 b = 24 c = 26

(multipla di: a = 5 b = 12 c = 13)

x = 6 a = 12 b = 35 c = 37

x = 7 a = 14 b = 48 c = 50

(multipla di: a = 7 b = 24 c = 25)

...   .

Si può dimostrare che applicando le formule attribuite a Platone si trovano tutte le terne pitagoriche della forma (a; b; b+2), ma non tutte le terne pitagoriche (primitive) hanno tale caratteristica. Dunque le formule platoniche superano la

ricerca del semplice esempio per concentrarsi su di un procedimento in grado di fornire molte (infinite) soluzioni; ma nonostante ciò, esse non forniscono una completa soluzione al problema della determinazione di terne pitagoriche.
Per trovare la risoluzione completa del problema presentato dobbiamo fare nuovamente ricorso ad esperienze culturali extraeuropee e considerare un testo cinese del periodo Han collocabile tra il 200 a.C. e il 220 d.C. (van der Waerden, 1983, pp. 1 e 5-8; Martzloff, 1987; Needham, 1985; osserviamo però che la datazione delle opere matematiche cinesi è sempre impresa delicata: il materiale riportato nella redazione finale potrebbe essere più antico). La Matematica cinese è ricca di procedimenti apparentemente ludici, collegati a situazioni pratiche o a curiosità; ma a tali procedimenti sono spesso associati contenuti matematici profondi e importanti. Illustriamo innanzitutto la soluzione cinese del problema. Dopo avere scritto:

$a^2 + b^2 = c^2$ da cui: $(c+b)(c-b) = a^2$

Consideriamo un numero dispari come prodotto di due fattori:

$a = mn$

L'ultima equazione è verificata da:

$c+b = m^2$ $\quad c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$ $\quad$ da cui: $\quad c-b = n^2$ $\quad b = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)$

Ad esempio possiamo scrivere:

$a = 3\cdot 1 = 3$ $\quad$ da cui: $b = 4$ e $c = 5$

$a = 5\cdot 1 = 5$ $\quad$ da cui: $b = 12$ e $c = 13$

$a = 5\cdot 3 = 15$ $\quad$ da cui: $b = 8$ e $c = 17$

Interessante è osservare che un'analoga impostazione della questione, e dunque un'analoga sua soluzione, compare nel Problema I del VI libro dell'Aritmetica di Diofanto di Alessandria (vissuto tra il 250 e il 350 d.C.). La soluzione diofantea parte dalla considerazione di un numero pari:

$a = 2pq$

L'equazione $(c+b)(c-b) = a^2$ può essere verificata da:

$c+b = 2p^2$; $\quad c = p^2 + q^2$ $\quad$ da cui: $\quad c-b = 2q^2$; $\qquad b = p^2 - q^2$

Al lettore non sfuggirà l'evidente analogia dei due procedimenti: la soluzione cinese, sopra indicata, equivale alla soluzione diofantea sostituendo:

(m, n) con $(p+q; p-q)$.

È possibile dimostrare che le due soluzioni del problema della determinazione delle terne pitagoriche così ottenute (sia quella cinese che quella diofantea) hanno il requisito della generalità che mancava alla soluzione platonica: ciò si-

gnifica che tutte le terne pitagoriche primitive possono essere ottenute dalle formule ricordate.
Esaminando le datazioni attribuite, appare che la soluzione cinese del problema sembra essere la più antica delle due soluzioni complete. Viene quindi spontaneo domandarsi: in generale, quale influenza possono avere avuto i Cinesi nello sviluppo della Matematica di altre civiltà, orientali e occidentali? Più particolarmente, quali legami possiamo ipotizzare tra l'impostazione cinese della risoluzione del problema delle terne pitagoriche e quella diofantea? È opinione oggi abbastanza diffusa (Boyer, 1982; Struik, 1981) che l'antica Matematica cinese abbia avuto un'influenza trascurabile sullo sviluppo della Matematica occidentale. Quest'affermazione potrebbe però essere affrettata: per quanto riguarda la Matematica cinese, infatti, una fonte assolutamente autorevole è il grande trattato di Needham, ed in tale opera troviamo alcuni riferimenti interessanti sui "contatti che sembra vi siano stati fra matematici cinesi e di altre grandi aree culturali del mondo antico [sebbene] in misura limitata" (Needham, 1985, p. 183). Needham parla di alcune "concezioni matematiche propagate dalla Cina verso il Meridione [dunque verso l'India] e verso l'Occidente" (Needham, 1985, p. 185) e ricorda i numerali, l'estrazione di radici quadrate e cubiche, la regola del tre, la scrittura di frazioni, l'idea di numeri negativi, alcuni elementi di Geometria (tra i quali una dimostrazione del teorema di Pitagora), il metodo di falsa posizione e la celebre disposizione di coefficienti binomiali che viene tuttora chiamata triangolo di Tartaglia-Pascal. Per quanto riguarda l'Analisi indeterminata (settore al quale possiamo far risalire la ricerca delle terne pitagoriche), sembra che dalla Cina siano passate alcune idee in India (intorno al V-VII secolo d.C.) e da lì, forse, al monaco bizantino Isacco Argyros (XIV secolo d.C.), probabilmente con la mediazione di studiosi arabi (Needham, 1985, p. 185).
Dunque possiamo così ipotizzare gli eventuali contatti che avrebbero portato i matematici occidentali (oppure del vicino oriente) a conoscere le originali ricerche cinesi (oppure babilonesi) sulle terne pitagoriche; alcuni secoli prima dell'inizio dell'Era volgare, ad esempio, avrebbe potuto avvenire quanto rappresentato nello schema seguente:

Origine cinese → Ricerche babilonesi (oppure cinesi?)
→ Formule di Platone
(oppure babilonese?) → Metodo di Diofanto

Alcuni secoli dopo l'inizio dell'era volgare, invece, avrebbe potuto verificarsi la situazione così schematizzata:

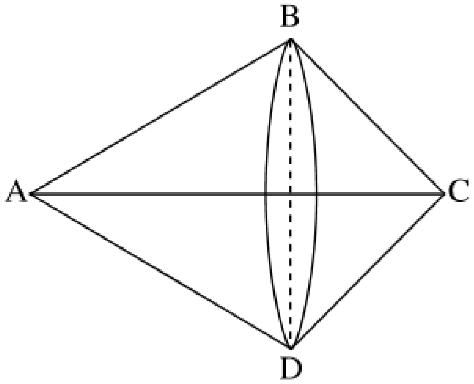
Origine nella matematica cinese → Diffusione → La matematica indiana (Hindu): Aryabhata, Brahmagupta

verso sud o → Isacco Argyros (tramite gli aribi?)

verso ovest → Altro?

Le due possibilità schematizzate non eludono però un quesito fondamentale: le ricerche sulle terne pitagoriche (e più in generale le ricerche che, nelle varie epoche storiche, hanno portato all'elaborazione di teorie matematiche simili in ambiti culturali diversi) sono da porre in relazione reciproca o sono frutto di iniziative originali, autonome? L'ipotesi della comune origine (probabilmente cinese) delle ricerche sulle terne pitagoriche è sostenuta da B.L. van der Waerden, il quale osserva che "con pochissime eccezioni, le grandi scoperte in Matematica, in Fisica e in Astronomia sono state fatte una volta sola" (Van der Waerden, 1983). Pur senza voler smentire l'ipotesi di van der Waerden, peraltro plausibile, non possiamo non osservare che la ricerca di terne pitagoriche è una questione che può sorgere spontaneamente, anche per ragioni pratiche (la segnalata necessità di costruire facilmente un angolo retto): il fatto di trovare molti matematici che, in epoche ed in paesi diversi, si sono interessati ad essa non ci dovrebbe dunque sorprendere e non ci sembra un elemento determinante per propendere per una comune origine delle varie ricerche in tale campo.

Oggi, con le terne pitagoriche, costruiamo triangoli rettangoli che, una volta ruotati, formano coni. Vediamo in figura:



Non pretendiamo di dare una risposta ai molti interrogativi che ancora restano a proposito dell'origine e dello sviluppo delle ricerche sulle terne pitagoriche. Riteniamo però significativa la presenza stessa di tali questioni aperte: la ricostruzione scientifica della storia e della geografia della Matematica non è sempre agevole e le difficoltà che si presentano a tale riguardo sono spesso collegate all'assenza di testi scritti, databili con sicurezza. Possiamo tuttavia concludere che un esame obiettivo della storia della nostra disciplina, ed in particolare della collocazione geografica delle ricerche, prova che la Matematica non può essere considerata patrimonio di una particolare tradizione culturale. Se non è difficile riconoscere che molti dei più elevati risultati della Matematica contemporanea sono maturati nell'ambito della cultura occidentale, è parallelamente indispensabile rendersi conto che la storia della Matematica non può che essere concepita in termini di evoluzione delle diverse istituzioni culturali e dunque delle varie tradizioni. La considerazione e la valorizzazione di tali diversità appare elemento essenziale per comprendere correttamente la ricchezza di tradizioni matematiche che talvolta sono state troppo frettolosamente considerate secondarie.

Cosa non mi piace di più: *Congetture*

Un aspetto importante del modo di vivere pitagorico, con le sue regole dietetiche, il culto dei numeri, le riunioni e le cerimonie segrete, stava nell'assumere a proprio fondamento morale gli studi filosofici e matematici. Si attribuisce allo stesso Pitagora la creazione delle parole filosofia ("amore della sapienza") e matematica ("ciò che si apprende"); egli trasformò la scienza della matematica in una forma di educazione liberale. Pitagora morì intorno al 500 a.C. e non lasciò niente di scritto. Il centro di Crotone venne distrutto quando i sibariti colsero di sorpresa gli adepti e ne uccisero la maggior parte. I superstiti si dispersero per tutto il mondo greco e il Mediterraneo, portando con sé la loro filosofia e il misticismo numerico. Fra coloro che appresero la filosofia della matematica da questi profughi ci fu Filolao di Taranto, che studiò nel nuovo centro fondato dai pitagorici nella sua città. Filolao fu il primo filosofo greco a mettere per iscritto la storia e le teorie della setta pitagorica. Fu proprio dagli scritti di Filolao che Platone apprese la filosofia dei numeri, la cosmologia e le dottrine mistiche dei pitagorici, su cui egli in seguito scrisse a sua volta. Il simbolo della setta pitagorica era la stella a cinque punte inscritta in un pentagono. Le diagonali che formano la stella si intersecano in modo da formare un altro pentagono più piccolo e capovolto rispetto al primo; se si tracciano le diagonali di questo pentagono più piccolo ne viene fuori un altro pentagono ancora, e così via all'infinito. Il pentagono e la stella a cinque punte formata dalle sue diagonali hanno alcune affascinanti proprietà a cui i pitagorici attribuivano un significato mistico. Intersecandosi l'una con l'altra, due qualsiasi di queste diagonali si dividono in due parti disuguali; il rapporto dell'intera diagonale con il segmento più lungo è uguale al rapporto di quest'ultimo con il segmento più breve, e si ritrovano questi rapporti in tutte le 4 In realtà Cantor andò molto più in là, ipotizzando che l'ordine di infinità dei numeri irrazionali seguisse immediatamente quello dei razionali. Egli riteneva cioè che non esistesse un ordine di infinità superiore a quello dei numeri razionali e contemporaneamente inferiore a quello dei numeri irrazionali. Questa tesi prese il nome di Ipotesi del Continuo, e nel Novecento Kurt Godel e Paul Cohen hanno stabilito che è impossibile dimostrarla entro il resto della matematica. L'Ipotesi del Continuo (con alcune riformulazioni equivalenti) è un'affermazione a sé stante, separata dal resto della matematica, e la verità dell'una è indipendente da quella dell'altra. Questa rimane una delle verità più bizzarre di tutti i fondamenti della matematica. I pitagorici scoprirono che anche l'armonia musicale corrisponde a rapporti numerici semplici. Secondo Aristotele essi credevano che ogni cosa nell'universo fosse riconducibile alla scala musicale e ai numeri; erano state proprio l'armonia musicale e le forme geometriche a convincerli che "ogni cosa è numero". Inoltre erano sicuri che i rapporti musicali fondamentali avessero a che fare solo con i numeri 1, 2, 3 e 4, la cui somma è 10; e il 10 è, a sua volta, la base del nostro sistema numerico. I pitagorici rappresentavano il numero 10 sotto forma di un triangolo che chiamavano tetraktys.

D. Wells, Curious and Interesting Numbers, Penguin Books, London 1987, pag. 81 I pitagorici consideravano sacra la tetraktys e giuravano su di essa. Detto per inciso: secondo Aristotele, Ovidio e altri autori classici il 10 fu scelto come base del sistema numerico perché gli uomini hanno dieci dita. Ricordiamo però che i babilonesi usavano un sistema numerico basato sul 60, e che ancor oggi sopravvivono alcune vestigia di altri sistemi; per esempio la parola francese che indica "ottanta" (quatre-vingt, cioè "quattro-venti") è un residuo di un arcaico sistema numerico in base.