Ulisse, Archimede e le mandrie del Sole

di Anna Maria Gennai

Al di là… solo “il pulviscolo dei grandi numeri”

Italo Calvino, Palomar

Ulisse e le mandrie del Sole
(fonte: https://ulyssesjournal.wikispaces.com/Sophia)

Omero – Libro dodicesimo dell’Odissea

Circe avverte Ulisse delle prove che lo attendono; tra queste la visione del gregge del Sole, in Trinacria: se qualcuno tenterà di molestarle, non farà ritorno a Itaca.

Allora incontro ti verran le belle
Spiagge della Trinacria isola, dove
Pasce il gregge del Sol, pasce l'armento:
Sette branchi di buoi, d'agnello tanti,
E di teste cinquanta i branchi tutti.
Non cresce, o scema, per natale o morte,
Branco; e le Dive sono i lor pastori
Faetusa e Lampezie il crin ricciute
Che partorì d'Iperïone al figlio
Ninfe leggiadre, la immortal Neera.
Come l'augusta madre ambo le ninfe

Dopo il felice parto ebbe nodrite,
A soggiornar lungi da sé mandolle
Nella Trinacria; e le paterne vacche
Dalla fronte lunata, ed i paterni
Monton lucenti a custodir lor diede.
Pascoleranno intatti e a voi soltanto
Calerà del ritorno? il suol nativo,
Non però senza guai, fiavi concesso.
Ma se giovenca molestaste od agna,
Sterminio a te predìco, al legno e a' tuoi
E pognam, che tu salvo ancor ne andassi,
Riederai tardi, e a gran fatica, e solo".

Anche Apollonio Rodio (III sec. a.C.) nelle *Argonautiche*[1], fa cenno alle *"vacche del Sole"* in Trinacria*:*

Presto costeggiarono i prati della Trinacria
dove sono allevate le vacche del Sole.
Le figlie di Nereo, compiuti i comandi di Era,
s'immersero nel profondo come gabbiani:
giungeva per aria il belato delle pecore e insieme
colpivano le orecchie dei naviganti i muggiti.
Portava le pecore al pascolo sui prati umidi per la rugiada
Faetusa, la più giovane tra le figlie del Sole,
che nella mano teneva una verga d'argento;
Lampezia scuoteva dietro le mandrie un bastone
d'oricalco splendente. Le videro pascolare
presso le acque del fiume, nei prati e nella piana
paludosa. Nessuna di loro era di pelo nero:
tutte, candide come il latte, portavano
corna d'oro superbe. Durante il giorno
costeggiarono l'isola; poi, durante la notte,
navigarono al largo lieti, fino a quando l'aurora
sorgendo al mattino ridiede la luce ai naviganti.

Euripide, nelle Troiane, o Troadi, attraverso Cassandra, la sacerdotessa di Apollo, predice il lungo viaggio e le peripezie che Ulisse dovrà affrontare prima di tornare a Itaca, tra cui ***quelle vacche sacre del Sole che dalle carni manderanno voci, parole amare per Odisseo***.

[1] lib. IV, vv. 964-981


Vaso etrusco VI a.C. rinvenuto a Cerveteri e attualmente al Museo del Louvre

Infine, nella Biblioteca di Pseudo-Apollodoro, la più grande enciclopedia di mitologia greca dell'antichità, si legge[2]: **e trapassata la Trinacia, ov'erano i buoi del Sole, andarono ad approdare a Corcira de' Feaci, reame allora di Alcinoo**.

Nel 1773 il tedesco Gotthold Ephraim Lessing trova nella biblioteca tedesca di Wolfenbuttel un manoscritto greco, sul quale è scritto "Problema che Archimede compose in epigramma ed inviò a coloro che si occupavano in Alessandria di cose di tal genere mediante lettera indirizzata ad Eratostene di Cirene". Il problema ha suscitato l'interesse per decine di anni, e si può ritenere con sufficiente certezza che sia stato veramente il grande siracusano a proporlo, stante la peculiarità che attesta la formulazione da parte di una mente geniale, mentre l'epigramma potrebbe essere stato scritto in un periodo successivo. La particolarità del problema è dovuta alla complessità della sua risoluzione. In breve si tratta di determinare il numero di buoi che compongono la mandria del sole, cioè il numero dei tori bianchi, neri, pezzati, e bruni, e il numero delle vacche dei corrispondenti colori, che soddisfino ad alcune relazioni, ad esempio che i tori dal vello bianco siano pari a metà più un terzo dei tori neri, più tutti i fulvi; che i tori neri siano pari alla quarta parte più un quinto degli screziati e a tutti i fulvi e altre così… Di seguito il testo[3], scritto come simpatica esortazione affinché Eratostene si cimenti nella risoluzione del quesito, con la traduzione[4]:

---

[2] Biblioteca di Apollodoro Ateniese, 1826, ed. Sonzogno, pag.42, all'indirizzo: https://books.google.it/books?id=62UVAAAAQAAJ&pg=RA1-PA42&lpg=RA1-PA42&dq=biblioteca+apollodoro+corcira+feaci&source=bl&ots=JFlJdr1fbj&sig=rQm1ZrPzyoJGbeKUmYoSxl7siFg&hl=it&sa=X&ved=0ahUKEwi3rsyk1MbPAhWFSRoKHZStBOMQ6AEIHDAA#v=onepage&q=biblioteca%20apollodoro%20corcira%20feaci&f=false

[3] http://www.mat.uniroma2.it/LMM/BCD/galleria/nov97/archimede/buoi.html

[4] http://www.cartesio-episteme.net/mat/archim.htm

Fonte: https://odysseustracks.wordpress.com/following-odysseus-footprints/step-10-helios-cattle/

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῆ στίφεα δασσαμένη
χροιὴν ἀλάσσοντα · τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἐν δὲ ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες · ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο · λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι ·
αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
Ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῆ.
Ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
Ξεῖνε, σὺ δ' Ἠελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄιδρίς κα λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. Ἀλλ' ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

"Calcola, o amico, il numero dei buoi del Sole, operando con cura, tu che possiedi molta scienza; calcola in quale numero pascolavano un giorno sulle pianure dell'isola sicula Trinacria, distribuiti in quattro gruppi di vario colore: uno di aspetto bianco latteo, il secondo splendente di color nero, il terzo poi di un bruno dorato ed il quarto screziato. In ogni gregge i tori erano in quantità considerevole, distribuiti secondo i rapporti seguenti: ritieni i bianchi come eguali alla metà ed alla terza parte di tutti i neri ed ai bruni; i neri poi eguali

alla quarta parte ed alla quinta degli screziati e a tutti i bruni; i restanti screziati consideràli poi come eguali alla sesta ed alla settima parte dei tori bianchi e di nuovo a tutti i bruni. Le giovenche invece erano distribuite nei rapporti seguenti: le bianche erano eguali precisamente alla terza e quarta parte di tutto il gregge nero; le nere alla quarta parte insieme alla quinta delle screziate prese assieme ai tori; le screziate erano precisamente eguali alla quinta parte ed alla sesta di tutti gli animali del gregge bruno; le brune poi vennero valutate eguali alla metà della terza parte ed alla settima parte del gregge bianco. Quando, o amico, avrai determinato esattamente quanti erano i buoi del Sole, avrai distinto quanti erano di ciascun colore, non ti si chiamerà certamente ignorante nè inabile nei numeri, però non ti si ascriverà peranco fra i sapienti. Ma ora bada bene a questi altri rapporti fra i buoi del Sole. Quando i tori bianchi mescolavansi ai neri formavano una figura equilatera, le vaste pianure della Trinacria erano allora tutte piene di buoi; invece i bruni e gli screziati costituivano una figura triangolare. Quando avrai trovato tutto questo e l'avrai esposto sotto forma intelligibile e avrai anche trovato il numero totale dei buoi, allora, o amico, va superbo per quanto hai fatto come un vincitore e sta sicuro di venire considerato come ricco di quella scienza".

Archimede, dipinto ad olio di Giuseppe Patania (Palermo, 1780 – 1852)

Archimede propone a Eratostene di risolvere inizialmente un sistema di sette equazioni lineari in otto incognite; se Eratostene ci fosse riuscito non lo si sarebbe detto *certamente ignorante nè inabile nei numeri.* Tuttavia, scrive Archimede, *non ti si ascriverà peranco fra i sapienti.* In effetti risolvere un sistema, anche se complesso come questo proposto, ma con un numero di incognite superiore ai vincoli richiesti, lascia dei gradi di libertà, quindi risolverlo può essere sì un'impresa ardua, ma alla portata di una qualunque persona con discrete abilità di calcolo. Archimede allora aggiunge altre informazioni, che matematicamente corrispondono ad altri vincoli che le incognite avrebbero dovuto verificare: *Quando i tori bianchi mescolavansi ai neri formavano una figura equilatera, le vaste pianure della Trinacria erano allora tutte piene di buoi; invece i bruni e gli screziati costituivano una figura triangolare.* Se Eratostene fosse riuscito a terminare il problema avrebbe potuto andare *superbo … come un vincitore* e, conclude Archimede, *sta sicuro di venire considerato come ricco di quella scienza.*

In effetti le prime richieste corrispondo ad equazioni lineari, che costituiscono un sistema di sette equazioni in otto incognite[5], la cui matrice dei coefficienti è:

$$
\begin{matrix}
6 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 20 & -20 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-13 & 0 & -42 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -7 & 0 & 0 & 12 & -7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 20 & 0 & -9 \\
0 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & -11 & 30 \\
-13 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 42 & 0
\end{matrix}
$$

e poiché le equazioni sono in numero inferiore alle incognite, il sistema ha infinite soluzioni. L'insieme di tutte queste può essere espresso in funzione di un parametro k; facendo alcuni calcoli si ottengono:

$$
\begin{aligned}
B &= 10366482k \\
N &= 7460514k \\
D &= 4149387k \\
S &= 7358060k \\
b &= 7206360k \\
n &= 4893246k \\
d &= 5439213k \\
s &= 3515820k
\end{aligned}
$$

e la soluzione più piccola, che si ottiene per k=1, ha come totale della mandria del Sole 50389082 capi di bestiame. Invece i vincoli successivi equivalgono a richiedere che la somma dei tori bianchi e di quelli neri sia un numero quadrato, cioè del tipo n^2, mentre la somma dei tori bruni e di quelli screziati sia un numero triangolare, cioè del tipo n(n+1)/2. Questa nuova condizione porta, dopo alcuni passaggi, alla risoluzione dell'equazione:

$$t^2 - 4729494u^2 = 1,$$

[5] Tori bianchi, neri, bruno dorati, screziati, giovenche bianche, nere, bruno dorate e screziate

un tipo particolare dell’equazione $x^2 - dy^2 = 1$, dove d è un numero naturale che non è un quadrato perfetto, nota con il nome di equazione di Pell. La più piccola soluzione del problema ha più di duecentomila cifre, quindi ben lontana dalle possibilità di calcolo di Eratostene o dello stesso Archimede. Una prima stima è stata determinata solo nel 1880 da August Amthor, che stabilì che la soluzione doveva avere 206545 cifre, delle quali scrisse le prime quattro. Studi successivi e calcoli con elaboratori elettronici hanno individuato la soluzione esatta, che è un numero di cui le cui prime cifre sono:

77602714064868182695302328332138866642323224059233

e le ultime:

05994630144292500354883118973723406626719455081800

quindi 7.760271…(etc) x 10^{206544} buoi, ovviamente un numero enorme ed impossibile per essere contenuto nell’area di circa 25000 chilometri quadrati della Sicilia! Archimede non avrebbe potuto calcolare la soluzione, tuttavia è strabiliante che avesse comunque intuito che il problema avesse una soluzione e che tale soluzione fosse un numero esagerato.

A proposito di questo problema, uno storico della matematica nato a Mantova nel 1862 e che a soli 24 anni era già docente universitario, Gino Loria, scrisse: "Da quanto precede risulta che il problema di Archimede merita di essere ascritto fra i più belli che annoveri la letteratura aritmetica, così bello che non ci sovviene alcuno che lo superi per eleganza di forma e valore di sostanza. Esso è difficile assai, ma chi può arrogarsi il diritto di negare ad un genio originale e potente, qual era il Siracusano, la capacità di concepirlo e risolverlo?".

Fonte_ http://www.huntsearch.gla.ac.uk/cgi-bin/foxweb/huntsearch/LargeImage.fwx?collection=art&catno=14677&filename=14677.jpg

“C'era più immaginazione nella testa di Archimede che in quella di Omero.”

Voltaire

Fonti

U. Bartocci, M.C. Vipera - *Variazioni sul problema dei buoi di Archimede, ovvero, alla ricerca di soluzioni "possibili"...*, 2004, all’indirizzo http://www.cartesio-episteme.net/mat/archim.htm

K. G. Calkins – *Archimedes’ Problema Bovinum* , all’indirizzo https://www.andrews.edu/~calkins/profess/cattle.htm

M. Geymonat – *Il grande Archimede* , Sandro Teti editore, pagina 59-VI, all’indirizzo https://books.google.it/books?id=x6RMFVfIOlcC&pg=PT236&lpg=PT236&dq=lessing+archimede&source=bl&ots=0fUsatmGQk&sig=uN3-JTCCpI-w8FfJw8OqmD3KiwE&hl=it&sa=X&ved=0ahUKEwjM0IiSiMfPAhXLfxoKHfycBFg4ChDoAQgbMAA#v=onepage&q=lessing%20archimede&f=false

C. Savarino - *Una nuova interpretazione del problema dei buoi di Archimede conduce ad una soluzione finalmente "ragionevole"...* , all’indirizzo http://www.cartesio-episteme.net/ep8/archimede-savarino.htm

F. Susco – *Risoluzione dell’equazione di Pell*, Tesi di Laurea in Matematica 2006, Università degli Studi di Roma tre, all’indirizzo: http://www.mat.uniroma3.it/scuola_orientamento/alumni/laureati-PFA/susco/tesina-PFA.pdf