Quando la matematica si prende gioco di noi

Alunna: Margherita Moretti, Classe II A, a.s. 2016 – 2017, Liceo scientifico IISS Darwin, Roma

Referente: prof.ssa Rita Risdonne

18 miliardi di miliardi di chicchi di riso

“C'era una volta un ricchissimo Principe indiano. Le sue ricchezze erano tali che nulla gli mancava ma trascorreva le giornate nell'ozio e nella noia. Un giorno annunciò a tutti che avrebbe donato qualunque cosa richiesta a colui che fosse riuscito a farlo divertire nuovamente.
A corte si presentò uno stuolo di personaggi d'ogni genere ma nessuno riuscì a rallegrare l'annoiato Principe. Finché si fece avanti un mercante, famoso per le sue invenzioni. Aprì una scatola, estrasse una tavola con disegnate alternatamente 64 caselle bianche e nere, vi appoggiò sopra 32 figure di legno variamente intagliate, e si rivolse al nobile reggente: "Vi porgo i miei omaggi, o potentissimo Signore, nonchè questo gioco di mia modesta invenzione. L'ho chiamato il gioco degli scacchi".
Il Principe guardò perplesso il mercante e gli chiese spiegazioni sulle regole. Il mercante gliele mostrò, sconfiggendolo in una partita dimostrativa. Punto sull'orgoglio il Principe chiese la rivincita, perdendo nuovamente. Fu alla quarta sconfitta consecutiva che capì il genio del mercante, accorgendosi per giunta che non provava più noia ma un gran divertimento! Memore della sua promessa, chiese all'inventore di tale sublime gioco quale ricompensa desiderasse.
Il mercante, con aria dimessa, chiese un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e via a raddoppiare fino all'ultima casella. Stupito da tanta modestia, il Principe diede ordine affinché la richiesta del mercante venisse subito esaudita. Gli scribi di corte si apprestarono a fare i conti, ma dopo qualche calcolo la meraviglia si stampò sui loro volti. Il risultato finale, infatti, era uguale alla quantità di grano ottenibile coltivando una superficie più grande della stessa Terra! Non potendo materialmente esaudire la richiesta dell'esoso mercante e non potendo neppure sottrarsi alla parola data, il Principe diede ordine di giustiziare immediatamente l'inventore degli scacchi.”

Ancora una volta la matematica ha teso un tranello. Un numero che sembra tanto piccolo è diventato esorbitante dopo sole 64 caselle di una scacchiera. Com’è mai possibile?
Si chiama progressione geometrica. Questa è una successione di numeri tali che il rapporto tra un elemento e il suo precedente è sempre costante.

La costante è chiamata ragione: nella progressione della scacchiera abbiamo ragione 2 e primo termine della successione 1.
Ecco dunque 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64…
Oggi possiamo sintetizzare tutto con una formula precisa:

sappiamo che
$a_2 = a_1 r$
dove a_2= al secondo termine della progressione e r = ragione
proseguendo
$a_3 = a_2 r$
$a_4 = a_3 r$

$a_n = a_{n-1} r$
quindi effettuando delle sostituzioni
$a_3 = a_1 rr = a_1 r^2$
$a_4 = a_3 r = a_1 r^3$

$a_n = a_{n-1} r = a_1 r^3$

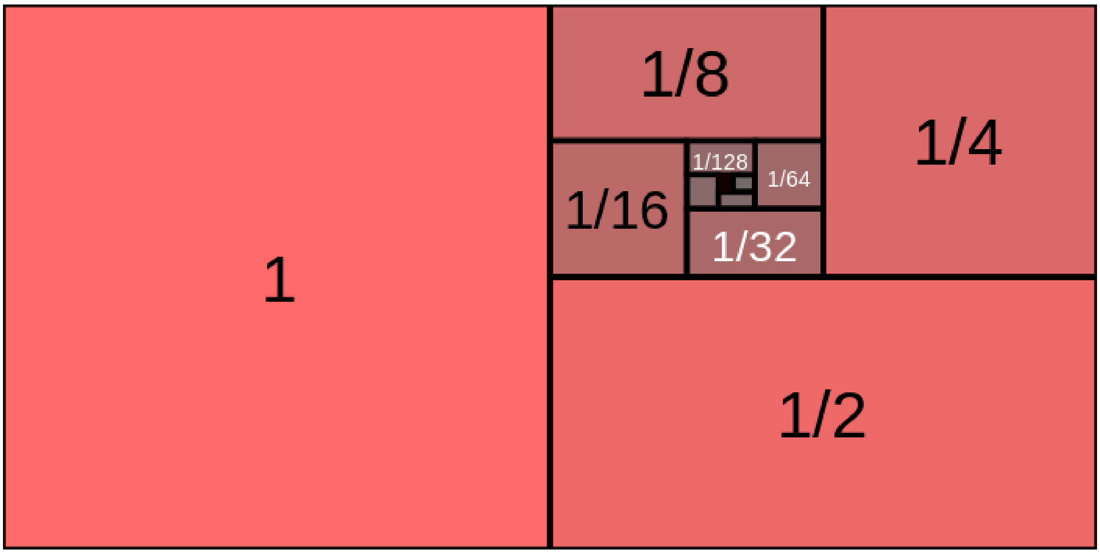
è quindi possibile enunciare la formula che permette di trovare l'ennesimo termine di una progressione senza scorrere tutti i precedenti:

L'ennesimo termine di una progressione geometrica di valore iniziale a_1 e ragione r è

$a_n = a_1 r^{n-1}$

che nel caso della scacchiera protagonista della nostra storia iniziale risulta essere :
$a_{64} = 1 \mathrm{x} 2^{64-1}$

Non dobbiamo però dimenticare che le progressioni possono crescere fino a raggiungere numeri infinitamente grandi, tanto quanto possono diminuire. Se poniamo come ragione un numero $0 < r < 1$, noteremo che la progressione raggiunge numeri infinitamente piccoli. Si parla di progressione geometrica decrescente e ne possiamo osservare una rappresentazione grafica nell'immagine sottostante.



Le progressioni, a seconda del numero assunto come ragione, ci possono riservare molte sorprese, basti pensare alla progressione geometrica con ragione r= -2 con primo termine di successione -2 che è costituita da termini alternativamente positivi e negativi e non è ne crescente ne decrescente: -2, 4, -8, 16, -32…

Le progressioni però non vanne pensate come qualcosa di applicabile solo a livello astratto o ai fini di risolvere un problema. Possiamo notare che questo fenomeno si replica nella realtà per esempio nei meccanismi di riproduzione delle cellule (sia quelle che si riproducono per mitosi che quelle che si riproducono per meiosi).
Inoltre possiamo osservare praticamente l'applicazione di una sorta di progressione chiamata "legge di Moore" il cui enunciato è:
« La complessità di un microcircuito, (misurata ad esempio tramite il numero di transistori per chip,) raddoppia ogni 18 mesi (e quadruplica quindi ogni 3 anni). »

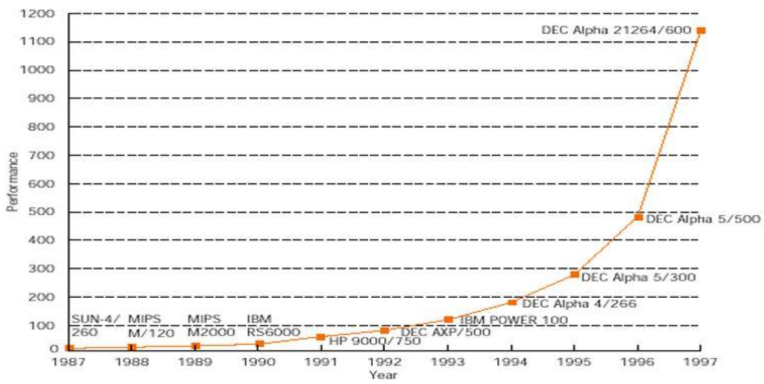
Effettivamente negli ultimi 50 anni le prestazioni dei microchip (è stata effettuata un'indagine in particolare su quelli della intel) sono raddoppiate ogni due anni, e il loro prezzo scendeva.

PRIMA LEGGE DI MOORE

"***Le prestazioni dei microprocessori raddoppiano ogni 18 mesi***"

mips = 1 milione di istruzioni al secondo

(bips = 1 miliardo di istruzioni al secondo)



Possiamo affermare che Moore aveva previsto che la potenza di calcolo dei computer sarebbe cresciuta con rapporto inversamente proporzionale alle dimensioni fisiche dei microprocessori. E proprio questo ha permesso la progettazione degli iPad, delle automobili con il pilota automatico e dei personal computer attuali infinitamente più potenti di quelli che quasi mezzo secolo hanno permesso all'uomo di raggiungere la Luna. Se immaginiamo un progresso del genere applicato ad un'automobile, oggi avremmo dei veicoli in grado di raggiungere velocità di circa 800mila km/h, e se applicassimo la legge di Moore anche ai carburanti potremmo fare un pieno di benzina che durerebbe per tutta la vita.

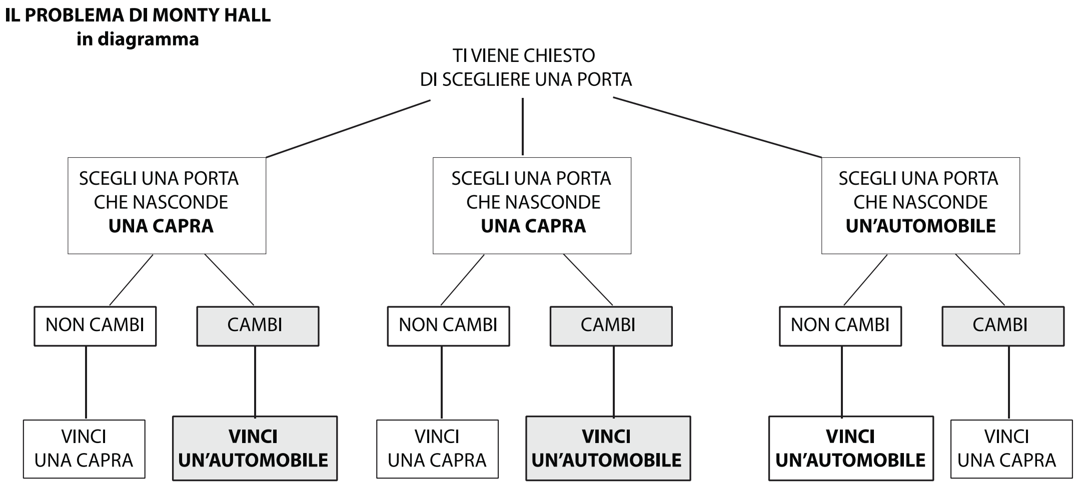
COME ANDARE IN TV E DIVENTARE MILIONARI (FORSE)

La televisione è satura di giochi che illudono i concorrenti di poter diventare milionari o vincitori di splendidi premi. Sto parlando di quei giochi televisivi che spesso ci ritroviamo a guardare, tentando di indovinare quale scatola contiene il premio e quale è vuota, senza pensare alla logica matematica che si nasconde dietro al gioco e ai suoi tranelli. Forse il gioco logico-matematico più famoso ispirato a quelli televisivi è noto come ***il problema di Monty Hall***, che ho incontrato per la prima volta leggendo "Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte" quando ancora guardavo la matematica dalla platea.

Più di vent'anni fa uno sconosciuto signore americano pose un controverso quesito alla rubrica "Chiedi a Marylin" della rivista "Parade" nella quale la signora Marylin Vos Savant rispondeva alle domande di matematica dei lettori. Il signore in questione chiedeva: *"un uomo partecipa ad un quiz televisivo. Può vincere un'auto. Il presentatore gli mostra tre porte. Dice che dietro ad una delle porte c'è l'auto in palio mentre dietro alle altre due ci sono delle capre. Gli chiede di sceglierne una. Quella che ha indicato non viene aperta. Il presentatore invece apre una delle porte che il concorrente non ha scelto e mostra una capra (poiché lui sa cosa sta dietro ad ognuna delle porte e sceglie sempre e comunque una porta con una capra dietro). A quel punto gli dà un'ultima possibilità e gli domanda se vuole cambiare idea e scegliere la porta rimasta ancora chiusa. Che cosa gli suggerisce di fare?"*

L'autrice della rubrica rispose che bisogna sempre cambiare e scegliere la porta rimasta perché ci sono due possibilità su tre che il premio sia dietro quella porta. Verrebbe spontaneo pensare invece che, una volta eliminata dal conduttore una delle porte con la capra, le possibilità che dietro alla porta rimasta ci sia il premio sia uguale al 50%.

Cerchiamo con un diagramma di scoprire perchè non è cosi.

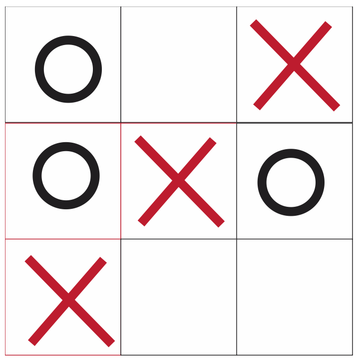


Dal diagramma risulta evidente che **se cambi 2 volte su 3 vinci un'auto**. L'errore è non considerare che la scelta è stata effettuata all'inizio!

Il punto fondamentale è che bisogna fare molta attenzione alla formulazione del problema. Infatti il concorrente effettua una scelta quando le porte chiuse sono ancora 3.
Solo una persona totalmente ignara di come funziona la trasmissione che accendesse la TV dopo che il presentatore ha aperto una delle porte che nasconde la capra, vedendo solo due porte e senza conoscere quella scelta in precedenza dal concorrente, avrebbe il 50 per cento di possibilità di vincere scegliendo l'una o l'altra.

La matematica ci insegna che occorre studiare regole e formule per vincere o inventare splendidi giochi (stando attenti a non perdere la testa come nel caso del mercante degli scacchi… che sia vero o no…), ma in molti casi ci mostra anche che non è possibile vincere.
Si può solo pareggiare.

IL CASO DEL TRIS
Molti insegnanti se la prendono con questo gioco, o meglio, se la prendono con gli alunni i quali, anziché prestare attenzione alle lezioni, si dilettano con questo passatempo. I due giocatori, a turno, dispongono o disegnano su un quadrato diviso in 9 caselle, il loro simbolo.

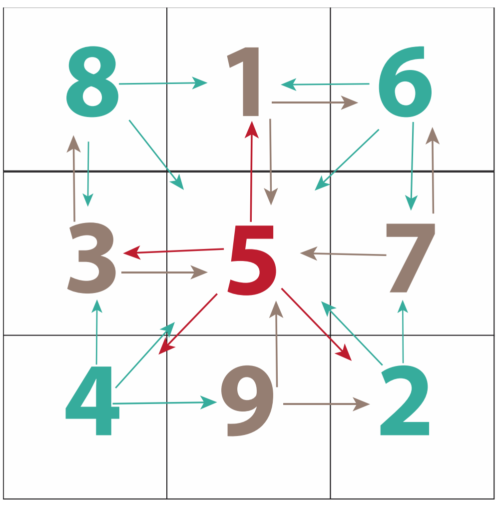


Il tris ha un unico scopo: mettere in fila diagonalmente, orizzontalmente o verticalmente il simbolo prescelto dal giocatore. Il tris è un gioco a due finito, privo di elementi di casualità in cui tutte le mosse sono note e visibili a entrambi i giocatori.
Se giocato con intelligenza dalle due parti è destinato a finire in parità. Questo nonostante il numero delle mosse possibili sia apparentemente molto alto. Infatti il primo giocatore ha 9 caselle tra cui scegliere dove collocare il proprio segno, il secondo ne ha 8, a questo punto il primo giocatore ha 7 caselle a disposizione per la seconda mossa e via così per un totale massimo di mosse possibili di:

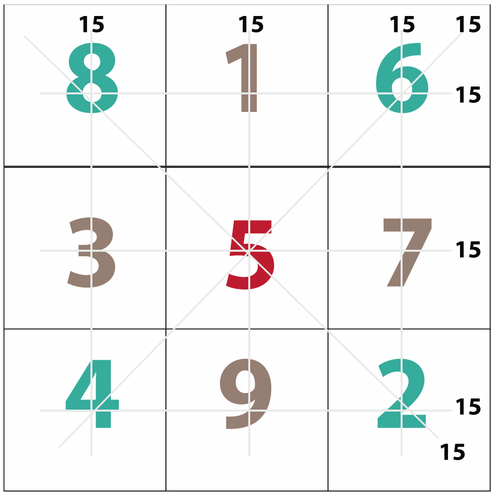
$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 362880 = 9!$$

Il gioco del tris, i cui antenati risalgono all’antica Cina e all’Impero Romano, si presta a molte varianti e interpretazioni. La versione più semplice e utile ad essere trasformata in un piccolo gioco per computer si chiama somma 15. Si dispongono 9 pedine su un tavolo con i valori da 1 a 9, ogni giocatore prende a turno un numero e vince il primo che ha 3 numeri la cui somma fa 15. Ogni giocatore durante il gioco capita di prendere più di tre numeri, ma per vincere è sufficiente che fra tutti i numeri presi ce ne siano tre la cui somma sia 15. Naturalmente bisogna anche impedire che l’avversario ottenga 15 prima di noi…
Per poter giocare a somma 15 è opportuno costruire un quadrato magico, LO SHU, dove ogni riga, ogni colonna e la diagonali principali, danno appunto somma 15.
I gruppi di tre cifre che danno come somma 15 sono otto: {8;1;6} {3;5;7} {4;9;2} {8;3;4} {1;5;9} {6;7;2} {8;5;2} {6;5;4}
Le cifre che appartengono a 2 gruppi sono: {1;3;7;9}
Le cifre che appartengono a 3 gruppi sono: {2;4;6;8}
Mentre il 5 appartiene a 4 gruppi.
È questa divisione che ci permette di collocare il 5 al centro del quadrato, ossia nell’unica posizione all’interno del quadrato dove di fatto appartiene a 4 gruppi: le due diagonali, e i due assi, verticale e orizzontale. Gli altri numeri vanno sistemati:
-sui quattro angoli quelli che appartengono a tre gruppi
-ai vertici degli assi verticali e orizzontali, quelli che appartengono a due gruppi.

8	1	6
3	5	7
4	9	2



Dunque per vincere è necessario prendere i 3 numeri che stanno su una riga, una colonna o una diagonale principale.



La bibliografia di questo semplice elaborato può essere un esempio di come la matematica sia presente negli articoli di giornale, nei libri, saggi e gialli ma anche in film di puro intrattenimento.
Nella mia ricerca e con l'aiuto dei genitori abbiamo trovato tracce di **progressioni geometriche** e della **legge di Moore** nel libro di Thomas Friedman (giornalista del NewYorkTimes):"GRAZIE PER ESSERE ARRIVATO TARDI – Un'ottimista nell'epoca delle accelerazioni", dove viene spiegato a quali accelerazioni tecnologiche la nostra vita è sottoposta da 10 anni a questa parte.
Ma la progressione geometrica e la leggenda dell'invenzione degli scacchi vantano anche una una illustre citazione letteraria. In una terzina del Paradiso, nella Divina Commedia, Dante scrive: *"L'incendio suo seguiva ogni scintilla;/ed eran tante che il numero loro/ più che il doppiar delli scacchi s'immilla"* .

Del **dilemma delle tre porte** o **problema di Monty Hall** ho letto per la prima volta nel libro di Mark Haddon "Lo strano case del cane ucciso a mezzanotte", un piccolo capolavoro letterario per ragazzi ma anche adulti, uscito quando io ero appena nata. Un giallo atipico che ha come protagonista un ragazzo affetto da una particolare forma di autismo ma dotato di una geniale logica matematica a guidarlo nelle scelte quotidiane.
E sempre il dilemma di Monty Hall compare nel film "21", con Kevin Spacey nel ruolo di un brillante professore universitario di matematica con il pallino del gioco d'azzardo…
Infine il **tris**, apparentemente il gioco più semplice, forse il meno affascinante del terzetto di cui abbiamo parlato. Eppure lo schema del tris è sta-

to scelto come simbolo dagli organizzatori del Festival della Matematica nel 2009 ed ha avuto anche il privilegio di essere protagonista – in un certo senso – del film “War Games, giochi di guerra” uscito in Italia nel 1983. Insegnando la filosofia e la logica del gioco del tris (in cui operando le giuste mosse nessuno dei due giocatori può vincere) al computer impazzito del Pentagono, un giovane hacker riesce a salvare il mondo da una guerra nucleare.
Era un piccolo messaggio pacifista: i giochi di guerra, come il piccolo gioco del tris, finiscono sempre senza vincitori…