Un'esperienza didattica sul concetto di limite di funzione

Angelica Malaspina, angelica.malaspina@unibas.it
Maria Sara Coriglione, mariasara.coriglione@istruzione.it

1 Motivazioni

La nozione di limite può essere considerarata una pietra miliare nella storia del pensiero scientifico, perchè ha dato il via al calcolo infinitesimale che, a sua volta, ha avuto applicazioni in svariati campi del sapere, come la fisica, la biologia, la medicina e la chimica. Essa, tuttavia, è anche una delle nozioni *più ostiche* in cui uno studente di scuola secondaria superiore possa imbattersi durante il suo percorso. Da queste considerazioni è conseguita l'idea di sviluppare un'esperienza didattica di conoscenza e di approfondimento del concetto di limite in una scuola secondaria superiore. Ciò è stato reso possibile grazie al Piano nazionale Lauree Scientifiche (promosso e finanziato dal M.I.U.R.) a cui il Dipartimento di Matematica, Informatica ed Economia dell'Università degli Studi della Basilicata ha aderito. In questa breve nota, viene sommariamente descritto il laboratorio didattico, tenuto dalla dott.ssa Angelica Malaspina, ricercatrice universitaria presso l'Università degli Studi della Basilicata, in collaborazione con la prof.ssa Maria Sara Coriglione, per alcuni studenti delle ultime classi dell'Istituto di Istruzione Superiore Einstein - De Lorenzo di Potenza.

2 Percorso didattico

Il matematico statunitense Morris Kline in *Storia del pensiero matematico* scriveva:

I grandi progressi della matematica e della scienza hanno quasi sempre origine nell'opera di molti studiosi che portano ciascuno il proprio contributo, pezzo dopo pezzo, per centinaia d'anni; alla fine, un uomo d'ingegno abbastanza acuto per saper distinguere le idee valide nella gran massa dei suggerimenti e delle dichiarazioni dei suoi predecessori, dotato dell'immaginazione occorrente per incastonare le varie tessere in un nuovo mosaico e audace quanto basta per costruire un progetto generale, compie il passo culminante e definitivo.

Ci è voluto un arco di tempo lunghissimo per formalizzare la definizione di limite. Tale nozione, infatti, affonda le sue radici nella Magna Grecia (III sec. a. C.), ha avuto un grande sviluppo nel Seicento grazie ai contributi di I. Newton e G. W. Leibniz ed è stato formulato rigorosamente soltanto nell'Ottocento, per opera di A. L. Cauchy e A. Weierstrass.

Il laboratorio si è aperto con la presentazione del suddetto processo storico di nascita del limite.

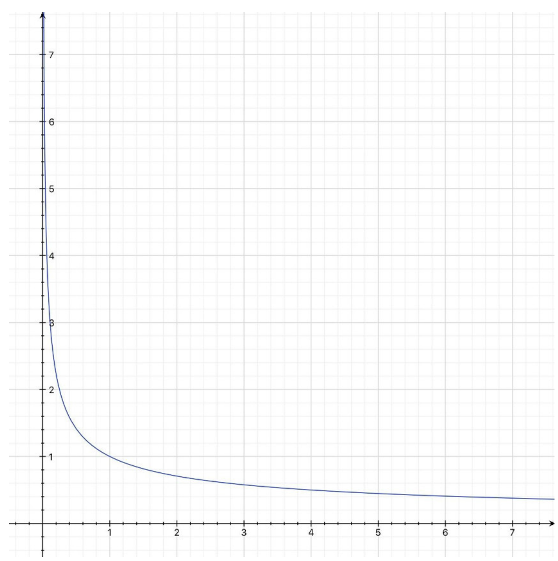
L'utilizzo della Storia della Matematica all'interno del percorso didattico ha avuto lo scopo di contestualizzare il concetto di limite, al fine di far comprendere agli studenti che le numerose difficoltà incontrate dai matematici nel corso del tempo sono le medesime che essi affrontano quando si imbattono in questo argomento. Alcuni degli ostacoli che rendono delicato l'apprendimento del limite sono intrinseci al concetto stesso di limite.

Dopo questa introduzione storica, sono stati mostrati agli studenti alcuni esempi che stanno alla base dell'origine della nozione di limite, come l'approssimazione di pi greco e il processo di dicotomia, affinché i ragazzi intuissero fin da subito la sua utilità pratica: troppo spesso, infatti, e diffusa l'idea che la matematica sia solo un arido deserto di formule ed esercizi fini a se stessi.

In seguito è stato introdotto il limite dal punto di vista intuitivo: partendo dall'osservazione di un grafico, si è dedotto il comportamento della funzione in esame in alcuni punti. Si è considerata, ad esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{2.1}$$

definita per ogni $x > 0$. Si è osservato l'andamento grafico e ci si è soffermati in particolare su cosa succede alla funzione quando $x > 0$ si *avvicina* a 0.



Appare evidente che i valori della funzione diventano ''via via sempre più grandi'', man mano che i valori di x sono ''sufficientemente vicini a'' zero.

Ciò si traduce dicendo che il limite di $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ per x che tende a zero tende a più infinito oppure che la funzione (2.1) diverge positivamente per x che tende a zero. In simboli

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \qquad (x > 0). \tag{2.2}$$

E' stato poi chiesto ai ragazzi se, a parer loro, poteva essere interessante studiare il comportamento della funzione vicino ad altri punti che non appartenevano al dominio di $f(x)$, ad esempio $x = -1$. Gli studenti avevano ben chiaro che un tale esercizio non aveva senso. La domanda è stata posta per far capire loro che il limite di una funzione va studiato in un punto che non appartiene al dominio e per il quale ciascun intervallo che lo include contiene punti del dominio.

Dopo queste osservazioni, sono state formulate le definizioni di *intorno di un punto* e di *punto di accumulazione* per un sottoinsieme di numeri reali (sono stati anche forniti esempi e sono stati svolti esercizi in aula, suddividendo gli alunni in piccoli gruppi).

E' stato poi chiarito agli studenti che occorreva costruire una definizione rigorosa di limite, traducendo in termini matematici espressioni come ''valori via via sempre più grandi'' e ''valori sufficientemente vicini''.

Tenendo presente il grafico della funzione (2.1), si è fissato un valore arbitrario di *soglia*, per esempio $M = 10$ (ed è stata disegnata una retta orizzontale $y = 10$). E' stato quindi chiesto agli studenti di trovare per quali $x > 0$, i valori di $f(x)$ superassero $M = 10$. Tutti hanno risolto la disequazione trovando che $0 < x < 0,01$. E' stato poi scelto un altro valore di soglia M più grande del precedente, $M = 10^3$. In questo caso la disequazione $f(x) > 10^3$ ha soluzione $0 < x < 0,000001$. Gli studenti hanno intuito immediatamente che man mano che il valore di soglia M aumentava, i valori di x si schiacciavano a zero. In generale, scelta una qualunque arbitraria soglia grande a piacere M, si può determinare il corrispondente valore δ_M al di sotto del quale $f(x) > M$, infatti basta scegliere $\delta_M = \dfrac{1}{M^2}$. In questo senso, la funzione (2.1) cresce illimitatamente, cioò supera ogni soglia arbitrariamente fissata quando x tende a 0.

Pertanto, il simbolo di limite (2.2) si può scrivere in termini rigorosi in questo modo:

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta_M > 0 \ \text{ tale che } \ \frac{1}{\sqrt{x}} > M \ \text{ se } \ x \in (0, \delta_M).$$

Successivamente, al fine di introdurre il concetto di convergenza di una funzione in un punto e quindi di limite finito è stato osservato il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

da cui è emerso che $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Infine dalla visualizzazione del grafico dell'iperbole equilatera

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

è scaturita la circostanza che il limite di $f(x)$ non esiste per x che tende a zero: $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

Durante il resto del laboratorio sono stati introdotti anche i limiti di funzioni per $x \to +\infty$, partendo dall'osservazione di grafici e scrivendo quindi la definizione rigorosa.
Sono stati, inoltre, svolti alcuni esercizi sui limiti, in particolare quelli in cui occorreva dedurre da un grafico il valore dei limiti proposti.

3 Valutazione

A conclusione dell'itinerario didattico, si è scelto come metodo di verifica delle competenze quello dell'*autovalutazione*. L'uso dell'autovalutazione ha il vantaggio di far prendere allo studente coscienza del proprio processo di apprendimento. Egli infatti assume un ruolo centrale nel processo valutativo, diventadone soggetto attivo e consapevole.

Gli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, hanno elaborato dei quesiti a risposta multipla relativi a tutti gli argomenti trattati.

E' seguita la correzione in aula ed il confronto tra gli studenti con i propri ed altrui errori al termine del quale sono stati selezionati quindici esercizi che vengono di seguito riportati.

TEST di AUTOVALUTAZIONE relativo al laboratorio

APPROFONDIMENTO DEL CONCETTO DI LIMITE ED AUTOVALUTAZIONE

ISTITUTO EINSTEIN - DE LORENZO, Docente tutor: Prof.ssa M. Coriglione

UNIVERSITA' DELLA BASILICATA, Esperto esterno: Prof.ssa A. Malaspina

1. Nel 1861 chi scrisse la definizione definitiva di limite?

A. Anassagora

B. Weierstrass

C. Nietzsche

D. Archimede

2. Quale di questi è un intorno circolare di $x = 1$?

A. (0,3)

B. (-1,3)

C. (1,2)

D. (-1,1)

3. Il punto $x = 2$ è un punto di accumulazione per quale di questi insiemi?

A. (0,2)

B. $(-1,-2) \cap \{2\}$

C. $(3,+\infty)$

D. (1, 1.999)

4. Quale tra i seguenti intervalli è un intorno di meno infinito?

A. (-650,0)

B. (4,+∞)

C. (-∞,8)

D. (-7,-5)

5. Quanto vale $\lim_{x \to +\infty} \frac{23}{x+2}$?

A. 23

B. 2

C. 0

D. +∞

6. Quanto vale $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$?

A. +∞

B. -∞

C. 0

D. ∄

7. Quale tra queste funzioni è un infinito di ordine maggiore di x^3 per x→+∞ ?

A. x^2

B. $\ln(x^4+x^3)$

C. √x

D. 1.1^x

8. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^x}$?

A. 1

B. 0

C. $+\infty$

D. $-\infty$

9. Quanto vale $\lim_{x \to +\infty} \frac{15x^4 + \ln x}{\sqrt{x} + 3x^4}$?

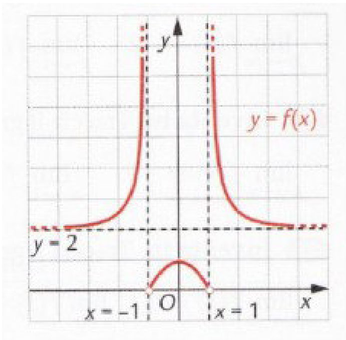
A. 15

B. 3

C. 5

D. 1

10. Guardando il seguente grafico, possiamo dedurre che il $\lim_{x \to -1} f(x) =$



A. 2^+

B. 0^-

C. $\nexists$

D. $+\infty$

11. Individua il risultato del seguente limite: $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+1}{2-x}$

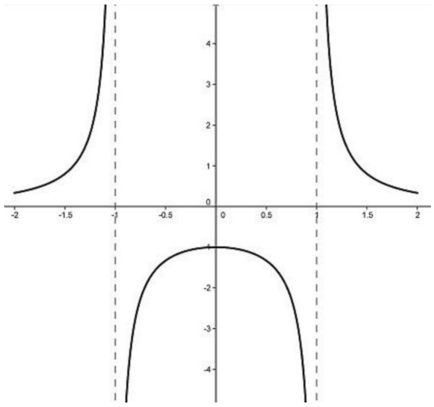
A. 4

B. $+\infty$

C. 0

D. $-\infty$

12 Dedurre dal grafico il valore del seguente limite: $\lim_{x \to 1^+} f(x)$



A. 1

B. -∞

C. non esiste

D. +∞

13.Quanto vale il seguente limite $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$?

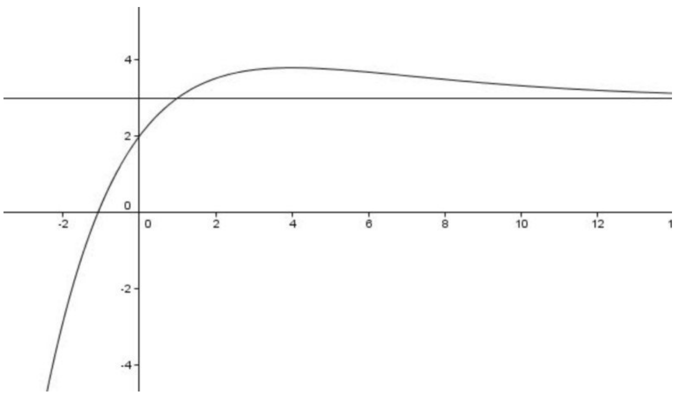
A. non esiste

B. +∞

C. 1

D. 0

14. La funzione in figura è caratterizzata nell'avere un asintoto:



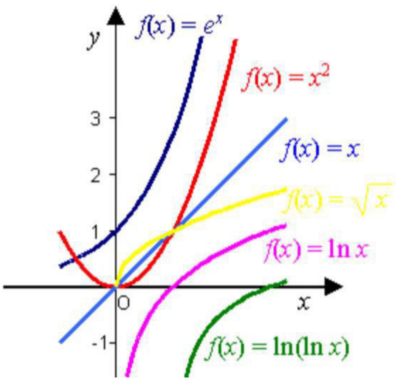
A. verticale

B. orizzontale

C . orizzontale sinistro

D. orizzontale destro

15. Quale delle seguenti funzioni diverge più rapidamente per $x \to \infty$:



A. $f(x) = \ln\ (lnx)$

B. $f(x) = \ln\ x$

C . $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$

D. tutte