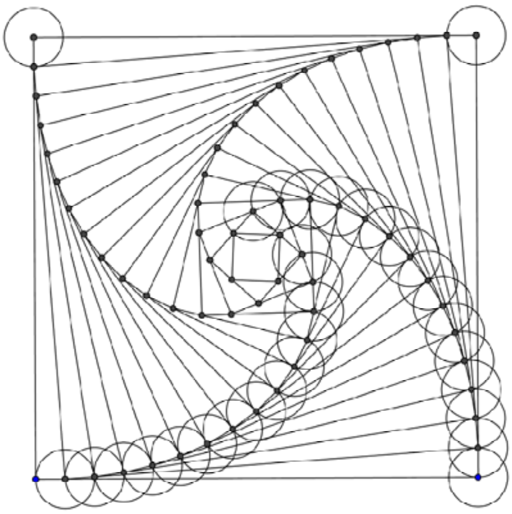
Da quattro cani alla cardioide

Un famoso problema del matematico Hugo Steinhaus è quello dei quattro cani che recita così :

"Quattro cani A,B,C e D stanno ai quattro vertici di un prato avente forma quadrata e cominciano a inseguirsi l'un l'altro. Ogni cane corre verso un vicino: A verso B,B verso C,C verso D e D verso A. Il lato del prato è di 100 m e la velocità di ogni cane è di 10 m/s. Dopo quanto tempo i cani si incontreranno i n qualche punto? Quanto sono lunghi i loro percorsi ?"



Utilizziamo il software Geogebra per realizzare la procedura ricorsiva che consente di tracciare i percorsi effettuati dai 4 cani (fig.1). (rif.bibl.Tomasi Luigi "Macro-costruzioni di Cabri e figure iterative"Bollettino CABRIRRSAE n 38 2004)

fig.1

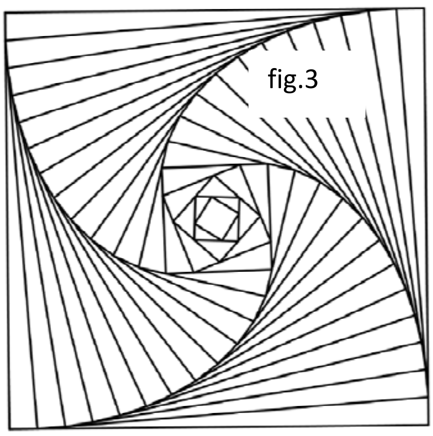


fig.3

fig.2

Da una prima suddivisione del lato del quadrato in 16 parti uguali, si intuisce che i cani si incontreranno al centro del quadrato .Il percorso di ogni cane è un arco di una magica curva legata alla sezione aurea : la spirale logaritmica . Ciascuno dei 4 archi di curva ottenuti taglia le diagonali del quadrato secondo un angolo di 45°. Nascondiamo la costruzione e incontriamo l'artista-matematico Maurits Cornelis Escher .

L'artista definiva il suo lavoro come un gioco,ma un gioco molto serio. Nelle sue opere le spirali e la geometria in movimento sono fantasia e creatività , la forma si trasforma e i paradossi e le illusioni ottiche fanno apparire perfette quanto a volte illogiche le sue costruzioni.

Ma le sorprese non sono finite. Nell'impostazione di una delle macro-costruzioni , quella che disegna i quadrati i cui vertici sono le posizioni via via occupate dai cani, compare questa inaspettata figura :

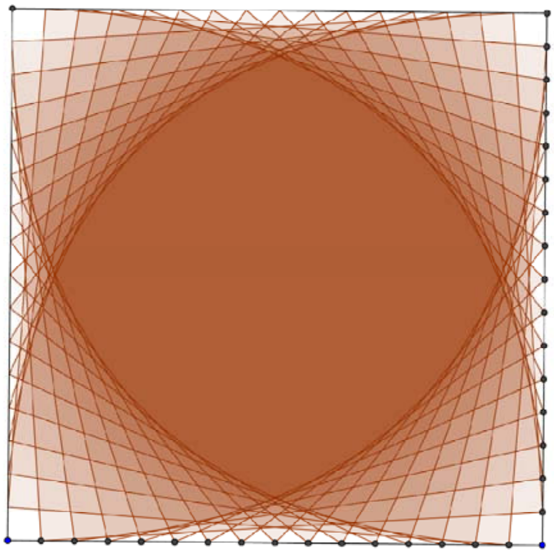
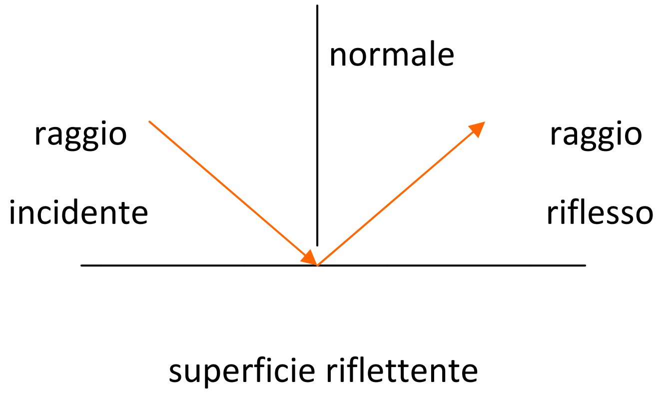


fig.4

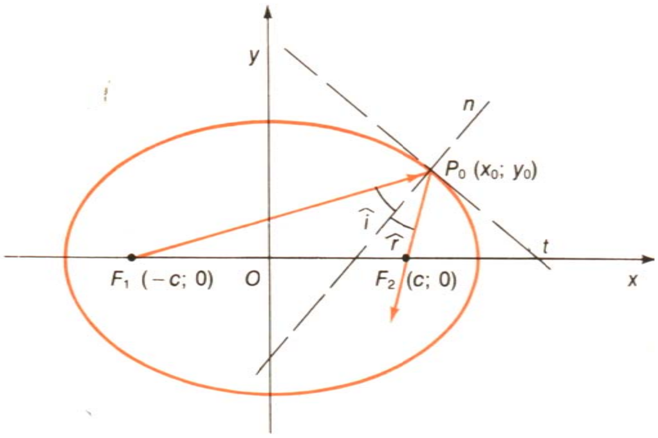
Cosa mai è successo? Cos'è questo quadrato "smussato "?

Per comprenderlo dobbiamo ricordare una proprietà ottica delle coniche .

Sappiamo che un raggio di luce che colpisce uno specchio piano viene riflesso in una direzione che dipende dalla direzione di arrivo dei raggi di luce ; precisamente il raggio incidente e quello riflesso formano con la perpendicolare allo specchio nel punto di incidenza angoli uguali e complanari .

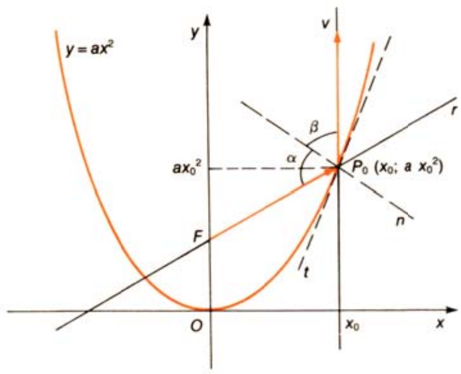


La stessa legge vale anche nel caso in cui la superficie riflettente non sia piana ma curva. A questo proposito, l'ellisse possiede una importante proprietà : se la si immagina come un filo riflettente , essa è tale da riflettere ogni raggio di luce proveniente da uno dei due fuochi in un raggio che passerà per l'altro fuoco.



La stessa proprietà vale per la parabola .Infatti ,un raggio proveniente dal suo fuoco viene riflesso dalla parabola in direzione parallela all'asse della stessa e, viceversa , un raggio proveniente secondo una direzione parallela all'asse è riflesso nel fuoco della parabola.

.



Queste proprietà possono essere verificate sia per via analitica che per via grafica attraverso software di geometria dinamica quali Cabri Geometre e Geogebra oppure o assieme a Derive.

La proprietà che hanno l'ellisse e della parabola di concentrare i raggi luminosi nel fuoco è una proprietà che non vale in generale per altre curve .

Tuttavia questo non vuol dire che i raggi riflessi si diffondono tutt'attorno , illuminando più o meno uniformemente lo spazio; spesso tali raggi si concentrano ,invece che in un punto, su di una curva, la cosiddetta **caustica**.

Come il fuoco delle sezioni coniche, anche il nome di questa curva deriva dal verbo bruciare; infatti l'aggettivo "*caustico* "significa "*che brucia"*.

Possiamo allora riconoscere nella figura 4 una caustica , quella ottenuta appunto attraverso i " percorsi dei cani-raggi di luce " che si "riflettono" sui lati dei quadrati ricorsivamente ottenuti.

Una nota curva che risulta essere caustica di una circonferenza è la cardioide. Per visualizzare il contorno di questa curva possiamo utilizzare un recipiente a pareti riflettenti ,di forma circolare (come una tazza), o cilindrica, o ancora conica come nella foto qui sotto .

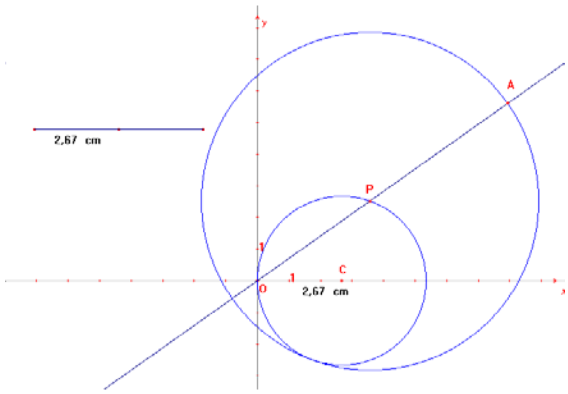

(dal sito xlatangente.it)

Illuminando dall'alto il latte contenuto nel recipiente , la riflessione dei raggi luminosi sulle pareti mostra la cardioide, che è detta appunto caustica di riflessione o catacaustica.

La curva è prodotta dalla concentrazione dei raggi di luce riflessi che cambiano gradualmente la loro inclinazione rispetto ai raggi incidenti ,così come i quattro cani cambiano la loro posizione lungo i lati del quadrato.

E se vogliamo sapere di più sulla cardioide...

Il nome deriva dalla forma a cuore, essa è una particolare lumaca di Pascal, ovvero una *concoide* di una circonferenza rispetto ad un suo punto, preso come polo, ove la misura del segmento costante che si prende sulla generica semiretta uscente dal polo a partire dal suo punto intersezione con la circonferenza è uguale al diametro, che indichiamo con $2a$, della circonferenza stessa. Effettuiamo la costruzione della curva utilizzando il software Cabri Geometre.
Detto P il punto intersezione della semiretta generica t uscente da O con la circonferenza e riportati da P segmenti di misura pari al diametro della circonferenza stessa, il luogo di questi punti al variare della semiretta t è una cardioide.

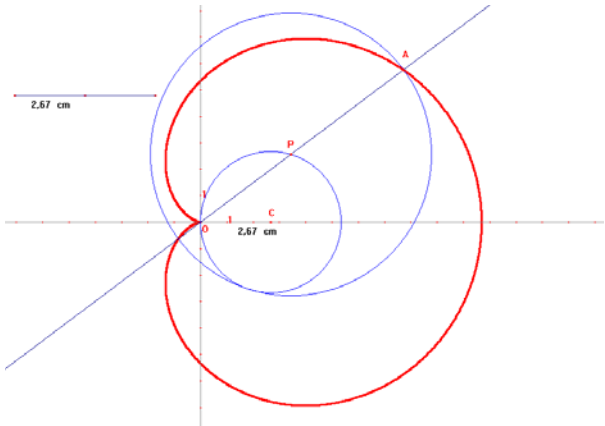


ISTRUZIONI CABRI

- Mostra gli assi
- Traccia un punto C sull'asse x -Traccia la circonferenza di centro C e raggio OC Traccia una retta generica uscente da O
- Punto P intersezione della retta tracciata con la circonferenza
- Strumento Distanza e lunghezza misura il diametro della circonferenza
- Trasporto di misura per costruire un segmento uguale al diametro della circonferenza
- Strumento Compasso per tracciare una circonferenza di centro P e raggio pari al diametro della circonferenza (cioè prendere sulla retta OP, a partire da P, un segmento uguale al diametro della circonferenza)

- Punto *A* intersezione della nuova circonferenza tracciata con la retta *OP*
- Strumento Traccia per disegnare il luogo del punto *A* al variare della retta uscente da *O* :

indica il punto A e trascina la retta *OA* nel piano (oppure muovi la retta con lo strumento Animazione)



L'equazione della cardioide in coordinate polari, assumendo *O* come polo e la retta del diametro della circonferenza come asse polare,si può scrivere molto semplicemente osservando la figura:

$$\rho = 2a(\cos\varphi \pm 1) \qquad con \ \ -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

Quest'equazione, ove si prenda il segno positivo nella parentesi, rappresenta il ramo superiore della curva, ove si prenda il segno negativo, il ramo inferiore. Passando dalle coordinate polari alle cartesiane si ottiene:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0$$

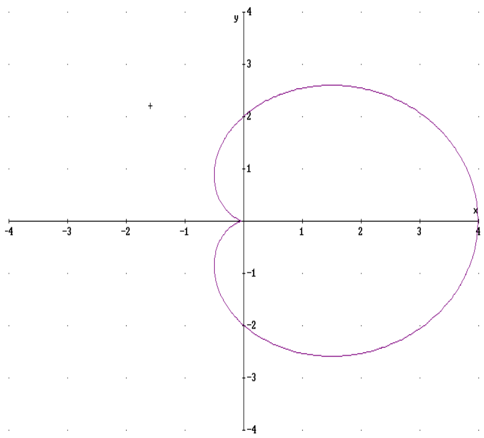


Grafico Derive attraverso l'equazione cartesiana (caso *a* =1)

Intersecando la cardioide con un fascio di circonferenze passanti per l'origine *O* e tangenti all'asse *x* di equazione:

$$x^2 + y^2 - ty = 0$$

si ottengono le equazioni parametriche razionali della curva:

$$\left[(x^2 + y^2)^2 - 4\cdot a\cdot x\cdot(x^2 + y^2) - 4\cdot a^2\cdot y^2 = 0,\ x^2 + y^2 - t\cdot y = 0\right]$$

$$x^2 + y^2 - t\cdot y = 0$$

$$\left[x = \sqrt{(y - t)}\cdot\sqrt{(-y)},\ x = -\sqrt{(y - t)}\cdot\sqrt{(-y)}\right]$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 4\cdot a\cdot x\cdot(x^2 + y^2) - 4\cdot a^2\cdot y^2 = 0$$

$$((\sqrt{(y - t)}\cdot\sqrt{(-y)})^2 + y^2)^2 - 4\cdot a\cdot(\sqrt{(y - t)}\cdot\sqrt{(-y)})\cdot((\sqrt{(y - t)}\cdot\sqrt{(-y}$$

$$4\cdot a\cdot t\cdot\sqrt{(y - t)}\cdot(-y)^{3/2} + y^2\cdot(t^2 - 4\cdot a^2) = 0$$

$$4\cdot a\cdot t\cdot\sqrt{(y - t)}\cdot(-y)^{3/2} = y^2\cdot(4\cdot a^2 - t^2)$$

$$16\cdot a^2\cdot t^2\cdot y^3\cdot(t - y) = y^4\cdot(4\cdot a^2 - t^2)^2$$

$$\left[y = 0,\ y = \frac{16\cdot a^2\cdot t^3}{16\cdot a^4 + 8\cdot a^2\cdot t^2 + t^4}\right]$$

$$\left[y = 0,\ y = \frac{16\cdot a^2\cdot t^3}{(4\cdot a^2 + t^2)^2}\right]$$

$$x = \sqrt{(y - t)}\cdot\sqrt{(-y)}$$

$$x = -\frac{4\cdot t\cdot\left|a\cdot t\cdot(4\cdot a^2 - t^2)\right|}{(4\cdot a^2 + t^2)^2}$$

cioè, liberando dal modulo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4at^2(t^2 - 4a^2)}{(t^2 + 4a^2)^2} \\ y = \dfrac{16a^2t^3}{(t^2 + 4a^2)^2} \end{cases}$$

Usando invece la via trigonometrica otteniamo le seguenti:

$$r = 2 \cdot a \cdot (\cos(t) + 1)$$

$$x = r \cdot \cos(t)$$

$$x = 2 \cdot a \cdot \cos(t)^2 + 2 \cdot a \cdot \cos(t)$$

$$x = 2 \cdot a \cdot \cos(t) \cdot (\cos(t) + 1)$$

$$x = 2 \cdot a \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \cdot \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1 \right)$$

$$x = \frac{4 \cdot a \cdot (1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}$$

$$y = r \cdot \sin(t)$$

$$y = 2 \cdot a \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) + 2 \cdot a \cdot \sin(t)$$

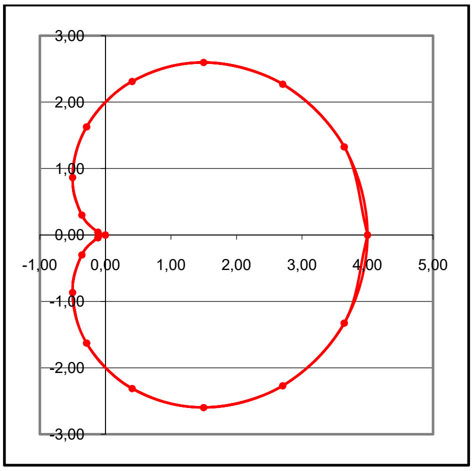
$$y = 2 \cdot a \cdot \sin(t) \cdot (\cos(t) + 1)$$

$$y = \frac{4 \cdot a \cdot t \cdot \cos(t)}{t^2 + 1} + \frac{4 \cdot a \cdot t}{t^2 + 1}$$

$$y = \frac{8 \cdot a \cdot t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4a(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \\ y = \dfrac{8at}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

Il foglio elettronico Excel ci consente di rappresentare la curva utilizzando le sue equazioni parametriche ,con le opportune approssimazioni relative al parametro, che è indefinito in $\pi/2$ e in $-\pi/2$.



CARATTERISTICHE della cardioide

La curva interseca l'asse x in O (0,0) e in A ($4r$, 0) , l'asse y nei punti (0, $\pm 2r$) .
E' simmetrica rispetto all'asse x (la y compare nella sua equazione con esponente pari).

Per stabilire la realtà della curva , ordiniamo la sua equazione rispetto alla y :

$$(x^2 + y^2)^2 - 4\cdot r\cdot x\cdot(x^2 + y^2) - 4\cdot r^2\cdot y^2 = 0$$

$$x^4 - 4\cdot r\cdot x^3 + 2\cdot x^2\cdot y^2 - 4\cdot r\cdot x\cdot y^2 + y^4 - 4\cdot r^2\cdot y^2 = 0$$

$$y^4 - 2\cdot y^2\cdot(2\cdot r^2 + 2\cdot r\cdot x - x^2) - x^3\cdot(4\cdot r - x) = 0$$

Dallo studio del segno del discriminante dell'equazione biquadratica ottenuta , assieme al segno dei tre suoi coefficienti , seguendo il metodo di Cartesio, si deduce che tale equazione ammette 4 radici reali se $-\frac{r}{2} \le x \le 0$, 2 radici reali se $0 \le x \le 4r$ e nessuna radice reale per ogni altro valore di *x* .

Pertanto, ogni retta parallela all'asse *y* e interna alla striscia limitata dalle rette $x = -\frac{r}{2}$ e $x = 0$ interseca la curva in 4 punti reali simmetrici a due a due rispetto all'asse *x* ; ogni retta parallela all'asse *y* interna alla striscia delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = 4r$, la interseca in due punti reali e due impropri.

La parte reale della cardioide è perciò interna alla striscia limitata dalle rette $x = -\frac{r}{2}$ e x = $4r$; la prima di queste rette è tangente alla curva nei punti di ordinata $\pm\frac{r\sqrt{3}}{2}$, mentre l'altra tocca la curva nel punto ($4r$, 0) .

Per determinare il massimo dell'ordinata sulla curva, osserviamo che la relazione $y = \rho\sin\varphi$, essendo per la curva : $\rho = 2r(\cos\varphi + 1)$, diventa : $y = 2r\sin\varphi(\cos\varphi + 1)$.

Derivando rispetto a φ e annullando la derivata prima di *y* :

$$y = 2\cdot r\cdot \mathrm{SIN}(t)\cdot(\mathrm{COS}(t) + 1)$$

$$\frac{d}{dt}(2\cdot r\cdot \mathrm{SIN}(t)\cdot(\mathrm{COS}(t) + 1))$$

$$4\cdot r\cdot \mathrm{COS}(t)^2 + 2\cdot r\cdot \mathrm{COS}(t) - 2\cdot r$$

$$4\cdot r\cdot \mathrm{COS}(t)^2 + 2\cdot r\cdot \mathrm{COS}(t) - 2\cdot r = 0$$

$$4\cdot r\cdot z^2 + 2\cdot r\cdot z - 2\cdot r = 0$$

$$\left[z = -1,\ z = \frac{1}{2}\right]$$

Per $z = \cos\varphi = -1$ si hanno l'origine *O* ed il punto ($4r$, 0) mentre per $z = \cos\varphi = \frac{1}{2}$ si ha $\varphi = \frac{\pi}{3}$ nell'intervallo $[0 ,\pi]$ e quindi il massimo valore della *y* che è dato da

$\frac{3\sqrt{3}}{2}r$. La cardioide è perciò contenuta nella striscia delimitata dalle rette $y = \pm\, 3$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}r$. In definitiva la curva è interna al rettangolo definito dalle quattro rette x = $-\frac{r}{2}$, x = 4*r* ,*y* = ± $\frac{3\sqrt{3}}{2}r$. Il massimo assoluto della curva è il punto ($\frac{3}{2}r$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}r$) e il minimo assoluto ($\frac{3}{2}r$,-$\frac{3\sqrt{3}}{2}r$). L'origine *O* è una cuspide con tangente nell'asse *x* e lo verifichiamo dettagliatamente .Infatti :

$$(x^2 + y^2)^2 - 4\cdot a\cdot x\cdot(x^2 + y^2) - 4\cdot a^2\cdot y^2 = 0$$

$$(0^2 + 0^2)^2 - 4\cdot a\cdot 0\cdot(0^2 + 0^2) - 4\cdot a^2\cdot 0^2 = 0$$

true

le coordinate di *O* soddisfano l'equazione della curva .

$$(x^2 + y^2)^2 - 4\cdot a\cdot x\cdot(x^2 + y^2) - 4\cdot a^2\cdot y^2 = 0$$

$$\frac{d}{dx}((x^2 + y^2)^2 - 4\cdot a\cdot x\cdot(x^2 + y^2) - 4\cdot a^2\cdot y^2)$$

$$4\cdot x^3 - 12\cdot a\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot y^2 - 4\cdot a\cdot y^2$$

$$4\cdot 0^3 - 12\cdot a\cdot 0^2 + 4\cdot 0\cdot 0^2 - 4\cdot a\cdot 0^2$$

$$0$$

$$\frac{d}{dy}((x^2 + y^2)^2 - 4\cdot a\cdot x\cdot(x^2 + y^2) - 4\cdot a^2\cdot y^2)$$

$$4\cdot y\cdot(x^2 - 2\cdot a\cdot x + y^2 - 2\cdot a^2)$$

$$4\cdot 0\cdot(0^2 - 2\cdot a\cdot 0 + 0^2 - 2\cdot a^2)$$

$$0$$

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^2((x^2 + y^2)^2 - 4\cdot a\cdot x\cdot(x^2 + y^2) - 4\cdot a^2\cdot y^2)$$

$$4\cdot(x^2 - 2\cdot a\cdot x + 3\cdot y^2 - 2\cdot a^2)$$

$$4\cdot(0^2 - 2\cdot a\cdot 0 + 3\cdot 0^2 - 2\cdot a^2)$$

$$-8\cdot a^2$$

le derivate parziali prime si annullano in *O* , ma non tutte le derivate parziali seconde.

$$(x^2 + y^2)^2 - 4 \cdot a \cdot x \cdot (x^2 + y^2) - 4 \cdot a^2 \cdot y^2 = 0$$

$$\frac{d}{dx} ((x^2 + y^2)^2 - 4 \cdot a \cdot x \cdot (x^2 + y^2) - 4 \cdot a^2 \cdot y^2)$$

$$4 \cdot x^3 - 12 \cdot a \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y^2 - 4 \cdot a \cdot y^2$$

$$\frac{d}{dy} (4 \cdot x^3 - 12 \cdot a \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y^2 - 4 \cdot a \cdot y^2)$$

$$8 \cdot y \cdot (x - a)$$

$$8 \cdot 0 \cdot (0 - a)$$

$$0$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 ((x^2 + y^2)^2 - 4 \cdot a \cdot x \cdot (x^2 + y^2) - 4 \cdot a^2 \cdot y^2)$$

$$12 \cdot x^2 - 24 \cdot a \cdot x + 4 \cdot y^2$$

$$12 \cdot 0^2 - 24 \cdot a \cdot 0 + 4 \cdot 0^2$$

$$0$$

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^2 ((x^2 + y^2)^2 - 4 \cdot a \cdot x \cdot (x^2 + y^2) - 4 \cdot a^2 \cdot y^2)$$

$$4 \cdot (x^2 - 2 \cdot a \cdot x + 3 \cdot y^2 - 2 \cdot a^2)$$

$$4 \cdot (0^2 - 2 \cdot a \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot a^2)$$

$$- 8 \cdot a^2$$

essendo : $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right]^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$, l'origine *O* è una cuspide . L'equazione complessiva delle tangenti è data dalla : $-8a^2y^2 = 0$, ovvero y^2= 0 e quindi la tangente cuspidale per la curva è l'asse *x* .

Lunghezza della cardioide

In generale , la lunghezza di una curva di cui si conosce l'equazione polare , si calcola attraverso la formula : $L = \int_a^b \sqrt{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)} d\varphi$

con opportuni estremi di integrazione relativi alla curva .

Nel caso della cardioide , che è simmetrica rispetto all'asse polare : $L = 2\int_0^\pi 4r\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} d\varphi$

che risolviamo con l'ausilio del software Derive :

$$\int_0^{\pi} 4 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$8 \cdot r$

$2 \cdot (8 \cdot r)$

$16 \cdot r$

Area della cardioide

L'area della superficie delimitata dalla cardioide è uguale a $6\pi r^2$; essa è il doppio dell'area della superficie racchiusa dalla circonferenza da cui si parte per individuare questa curva come luogo geometrico.

Intanto la circonferenza è interna alla cardioide , avendo in comune con essa il polo *O* ed il punto *A* (4*r* , 0) . Infatti, l'equazione della circonferenza in coordinate polari è : $\rho_1 = 4r\cos\varphi$, che si può scrivere anche : $\rho_1 = 2r(\cos\varphi + \cos\varphi)$

Confrontando questa equazione con quella della cardioide : $\rho = 2r(\cos\varphi + 1)$

essendo $|\cos\varphi| \le 1$, si riconosce che $\rho_1 \le \rho$ e quindi che la circonferenza è interna alla cardioide . Per cos φ = 1 ovvero per φ = 0 e φ = π , le due curve hanno in comune il polo *O* ed il punto *A* . L'area della parte di piano limitata dalla cardioide e dalla circonferenza si ottiene come differenza fra l'area S_1 della regione piana delimitata dalla cardioide :

$$\int_0^{\pi} 4 \cdot r^2 \cdot (1 + \cos(t))^2 dt$$

$6 \cdot \pi \cdot r^2$

e quella delimitata dalla circonferenza : $S_2 = 4\pi r^2$. Risultando : $S = S_1 - S_2 = 2\pi r^2$, l'area *S* è il doppio dell'area del cerchio .

Concludiamo con due PROPRIETA' della cardioide

1) La cardioide è la *podaria* rispetto all'origine *O* del cerchio di centro (*a*, 0) e raggio *a*

Infatti il cerchio ha equazione :

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

e la tangente ad esso in un punto generico P (x_0, y_0) ha equazione :

$(x_0 - a)x + y_0 y - ax_0 = 0$, con la condizione di appartenenza di *P* al cerchio :

$$(*) \quad x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 = 0$$

La retta passante per l'origine e perpendicolare alla tangente in *P* al cerchio ha invece equazione : $y_0 x - (x_0 - a)y = 0$.

L'intersezione fra le due rette si ottiene risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni :

$$\begin{cases} (x_0 - a)x + y_0 y - ax_0 = 0 \\ y_0 x - (x_0 - a)y = 0 \end{cases}$$

Ricavando x_0 ed y_0 da queste e sostituendo le espressioni trovate nella (*) otteniamo l'equazione della podaria rispetto all'origine del suddetto cerchio , che è appunto la cardioide .

Infatti dalla seconda equazione del sistema si ricava :

(1) $y_0 = \dfrac{(x_0 - a)y}{x}$ che , sostituita nella prima equazione ci dà : $(x_0 - a)x + \dfrac{(x_0 - a)y^2}{x - ax_0} = 0$

da cui : $(x_0 - a)(x^2 + y^2) - ax_0 x = 0$

e quindi $x_0 = \dfrac{a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - ax}$.

Ora sostituendo questa espressione nella (1) abbiamo:

$$y_0 = \left(\frac{a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - ax} - a \right) \frac{y}{x} = \frac{a^2 xy}{x(x^2 + y^2 - ax)} = \frac{a^2 y}{(x^2 + y^2 - ax)}$$

Poniamo infine le due espressioni trovate per x_0 e y_0 nella (*) :

$$x_0 = \frac{a\cdot(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - a\cdot x}$$

$$y_0 = \frac{a^2\cdot y}{x^2 + y^2 - a\cdot x}$$

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\cdot a\cdot x_0 = 0$$

$$\left(\frac{a\cdot(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - a\cdot x}\right)^2 + y_0^2 - 2\cdot a\cdot\frac{a\cdot(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - a\cdot x} = 0$$

$$\left(\frac{a\cdot(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - a\cdot x}\right)^2 + \left(\frac{a^2\cdot y}{x^2 + y^2 - a\cdot x}\right)^2 - 2\cdot a\cdot\frac{a\cdot(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - a\cdot x} = 0$$

$$-\frac{a^2\cdot(x^4 - 2\cdot a\cdot x^3 + 2\cdot x^2\cdot y^2 - 2\cdot a\cdot x\cdot y^2 + y^2\cdot(y^2 - a^2))}{(x^2 - a\cdot x + y^2)^2} = 0$$

$$x^4 - 2\cdot a\cdot x^3 + 2\cdot x^2\cdot y^2 - 2\cdot a\cdot x\cdot y^2 + y^2\cdot(y^2 - a^2) = 0$$

$$x^4 - 2\cdot a\cdot x^3 + 2\cdot x^2\cdot y^2 - 2\cdot a\cdot x\cdot y^2 - a^2\cdot y^2 + y^4 = 0$$

$$-a^2\cdot y^2 - 2\cdot a\cdot x\cdot(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 = 0$$

2) La cardioide è la curva inversa di una parabola rispetto al suo fuoco .

Se la parabola ha equazione polare $\rho = \frac{a}{1+\cos\varphi}$, ricaviamo la sua equazione cartesiana :

$$r = \frac{a}{1 + \mathrm{COS}(t)}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{a}{1 + \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} + x = a$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = a - x$$

$$x^2 + y^2 = (x - a)^2$$

$$y^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot x$$

questa parabola ha il fuoco nell'origine $F = O(0,0)$ ed il vertice nel punto $V\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Il raggio del cerchio base per l'inversione è $R = 2\cdot VF = a$; applicando le formule per l'inversione :

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}$$
$$y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}$$

con $R = a$ ed applicandole all'equazione della parabola, si ottiene l'equazione di una cardioide .

Eseguiamo i calcoli con Derive e per semplicità poniamo a = 2 :

$$x = -\frac{y^2}{2 \cdot a} + \frac{a}{2}$$

$$x = 1 - \frac{y^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\left[x_1 = \frac{a^2 \cdot x}{x^2 + y^2},\ y_1 = \frac{a^2 \cdot y}{x^2 + y^2}\right]$$

$$\left[x_1 = \frac{4 \cdot x}{x^2 + y^2},\ y_1 = \frac{4 \cdot y}{x^2 + y^2}\right]$$

$$\frac{4 \cdot x}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{4 \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$4 \cdot x \cdot (x^2 + y^2) = x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + y^2 \cdot (y^2 - 4)$$

$$4 \cdot x \cdot (x^2 + y^2) = x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + y^4 - 4 \cdot y^2$$

Nel grafico realizzato con Derive abbiamo la parabola e il cerchio base ,assieme alla cardioide ottenuta :