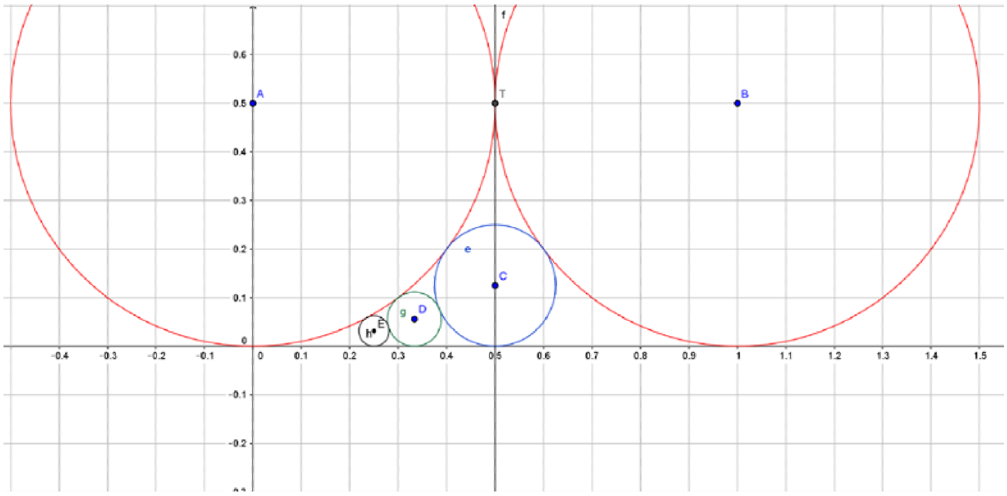
I cerchi di Ford e...



Consideriamo due circonferenze C0 e C1 entrambi di raggio r1 pari a 1/2 ,tangenti fra loro e tangenti ad una semiretta di origine O .Costruiamo la circonferenza C2 ,tangente alla semiretta e alle due circonferenze iniziali; poi la circonferenza C3,tangente alla semiretta e a C0 e C2 ; poi la C4 tangente alla semiretta e a C0, ...e così via.

La serie di circonferenze ottenute è quella dei cosiddetti **cerchi di Ford**.

Assunto che il punto O , origine della semiretta ,corrisponda allo zero i cerchi di Ford godono di due particolari proprietà :

1)i punti di tangenza con la semiretta hanno ascisse pari a 1/2,1/3,1/4,...

2) i diametri dei cerchi sono i quadrati delle ascisse dei punti di tangenza, e quindi sono pari a 1/4 ,1/9 ,1/16...

Per verificare le proprietà scegliamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy ,come in

figura ,nel quale il centro della circonferenza C0 è il punto A (0,1/2) e quello della circonferenza C1 è il punto B(1,1/2). La semiretta tangente alle due circonferenze è il semiasse delle ascisse.

La simmetria garantisce che l'ascissa del punto di tangenza di C0 e C1 sia pari a 1/2. Osserviamo tuttavia , per la generalizzazione successiva, che il centro C (x,y) della circonferenza C2 , di raggio r2, è tale che CA = CB = r2+r1=y+1/2 .

Imponiamo che sia CA = CB =y+1/2 e otteniamo il seguente sistema di due equazioni in due incognite: $\left\{\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2} = y+\frac{1}{2}\right.$, da cui otteniamo le coordinate di C $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$.

Possiamo constatare che l'ascissa di C è appunto pari a 1/2 e che il diametro di C2 è pari al suo quadrato , ovvero che : d2=2r2=1/4.

Ricerchiamo ora le coordinate del punto D , centro della circonferenza C3 tangente all'asse x e alle circonferenze C0 e C2. Dette quindi (x,y) le coordinate del punto D ,abbiamo :

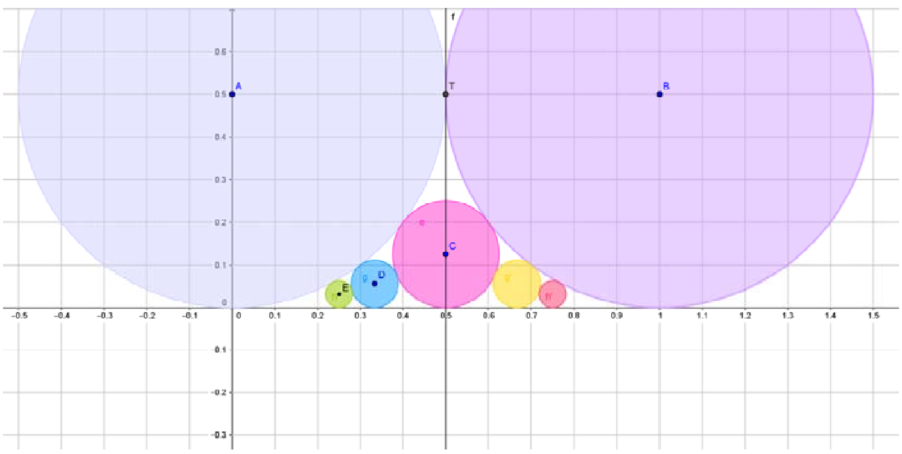
$y = DA - \frac{1}{2} = DC - \frac{1}{8}$, essendo l'ordinata del punto D uguale al raggio della circonferenza C3. Scriviamo le due equazioni del sistema nella forma seguente :

$$\left\{ y + \frac{1}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} \ ; y + \frac{1}{8} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{8}\right)^2} \right. .$$

Svolgendo i calcoli, notiamo che la prima equazione diventa :$x^2 = 2y$ e questa relazione , che si ritrova iterando il procedimento anche per le altre circonferenze, ci dice che il quadrato dell'ascissa del punto di tangenza (ovvero l'ascissa del centro della nuova circonferenza) è uguale al doppio della sua ordinata, che è il diametro della nuova circonferenza. La soluzione accettabile del sistema ci dà le coordinate del centro di C3 ,D(1/3,1/18) ,ed il suo raggio diametro d3=2y=1/9.

Ripetiamo ancora una volta il procedimento per la circonferenza C4 , di centro E(x,y) e raggio r4=y Essendo y+1/2=EA e y+1/3=ED ,dal seguente sistema :

$\left\{ y + \frac{1}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} \ ; y + \frac{1}{18} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{18}\right)^2} \right.$ otteniamo ancora la relazione $x^2 = 2y$ dalla prima equazione , e come soluzione accettabile le coordinate del punto E(1/4,1/32). Il diametro della circonferenza C4, che è il doppio dell'ordinata di E,è pari a 1/16 ovvero al quadrato della sua ascissa.Si potrebbero anche trovare , attraverso la simmetria assiale avente come asse di simmetria la retta x=1/2 , gli altri cerchi di Ford che completano la figura formando il cosiddetto "impacchettamento"di cerchi.



Dai Cerchi di Ford agli insiemi numerici limitati e i punti di accumulazione

Quello di *punto di accumulazione di un insieme numerico* è uno dei più delicati dell'analisi matematica. Considerato il sottoinsieme di **R** costituito dalle ascisse dei punti di tangenza dei cerchi di Ford definito attraverso la sua proprietà caratteristica :

A = $\left\{x \in R : x(n) = \frac{1}{n}, \forall n \in N_0\right\}$. Osserviamo che esso ha le seguenti caratteristiche :

a) è un insieme limitato , infatti i suoi elementi appartengono tutti all'intervallo $]0,1]$;

b)è infinito , cioè possiede infiniti elementi;

c)i suoi elementi , al variare di $n \in N_0$, si addensano , si *accumulano* , attorno al particolare punto $x_0 = 0$ che non appartiene ad A .

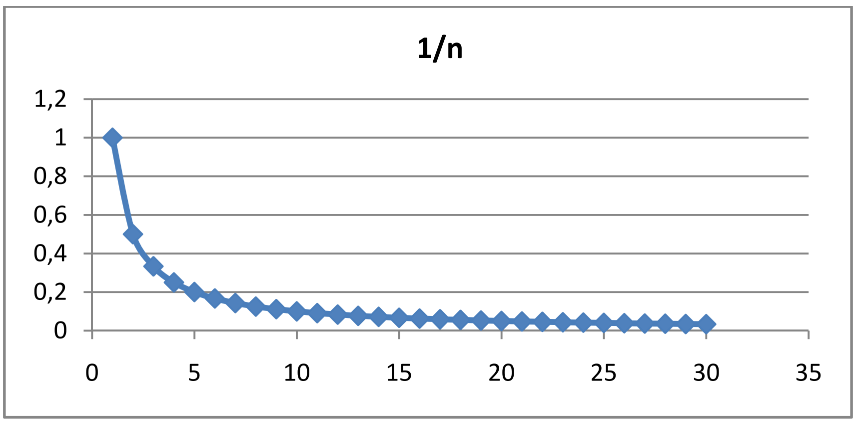
Gli elementi dell'insieme A , al crescere di n , si avvicinano **indefinitamente** al punto $x_0 = 0$; per questo motivo si dice che $x_0 = 0$ è un punto di accumulazione dell'insieme A.

E' allora intuitivo comprendere che , fissato un qualunque intorno destro di x_0 , cioè un intervallo del tipo I = $]0, \varepsilon[$, con ε > 0 e piccolo finché si voglia ,si potrà sempre trovare almeno un elemento x appartenente ad A e a I ,ovvero : $0 < x < \varepsilon$. Se ad esempio si sceglie $\varepsilon = \frac{1}{100}$, basta considerare $x = \frac{1}{101}$ che appartiene all'intorno in quanto: $0 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$. All'intorno appartengono infiniti altri punti dell'insieme A (nell'esempio scelto saranno $\frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \frac{1}{104} ..etc.$). L'arbitrarietà nella scelta del raggio dell'intorno consente di generalizzare il risultato per un qualunque suo valore anche molto ,molto piccolo.

Dai cerchi di Ford alle successioni convergenti

La successione numerica è una funzione che associa ad ogni numero naturale n un numero reale $a_n = f(n)$; essa è perciò un insieme ordinato e infinito di numeri reali che sono detti **termini** della successione. La successione i cui termini sono : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}, \dots$ (i raggi dei cerchi di Ford da quello delle due circonferenze C0 e C1 a quelli delle altre) , è una successione limitata superiormente , in quanto tutti i suoi termini sono minori o uguali di 1 ; essa è anche limitata inferiormente in quanto i suoi termini sono maggiori di 0 . Questa successione è anche convergente e tende a 0 per n che tende a +∞ .In altre parole, il punto di accumulazione dell'insieme numerico A è il valore limite verso cui convergono i termini della successione ,cioè :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$,come si può verificare attraverso la definizione di limite finito di una successione.



Dai Cerchi di Ford alle serie armoniche

La serie armonica è la serie : $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

E' una serie particolare perché ,pur essendo $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$,si può dimostrare che essa è divergente. Ebbene, le ascisse dei punti di tangenza dei cerchi di Ford con la semiretta costituiscono i termini della successione da cui si ottiene la serie armonica.

I diametri dei cerchi di Ford ,invece,costituiscono i termini della successione da cui si ottiene una serie armonica generalizzata. E' quest'ultima la serie del tipo $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. La particolarità di questa serie sta nel fatto che essa è convergente , come si può dimostrare ,per α>1 . Nel caso in questione la serie $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è appunto convergente.

Dai Cerchi di Ford al numero di Nepero *e*

Il numero di Nepero è quel numero , irrazionale e trascendente come π , straordinariamente importante per i matematici .Esso viene definito ,magicamente quanto incomprensibilmente per i meno esperti , attraverso il limite notevole: $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ecco che i raggi dei cerchi di Ford sommati all'unità e travolti dalla funzione esponenziale ci conducono verso il piccolo ,grande numero e = 2,7182..., che è di poco più piccolo di π =3,14...