Ennio De Giorgi
e la moderna Teoria Geometrica della Misura

Luigi Ambrosio

Introduzione

Nel mio intervento vorrei parlare del fondamentale contributo di Ennio De Giorgi allo sviluppo della moderna Teoria Geometrica della Misura. Come è spesso accaduto anche per altre ricerche di De Giorgi, le tecniche da lui introdotte sono risultate di importanza fondamentale per affrontare problemi anche apparentemente lontani da quelli iniziali. Una spiegazione, certamente parziale, dell'"universalità" delle idee di De Giorgi nel campo dell'Analisi è l'unitarietà con la quale egli affrontava i problemi "analitici" e quelli "geometrici": molti suoi lavori analitici contengono in nuce idee geometriche, e viceversa.

In particolare, vorrei concentrarmi su una serie di lavori, dal 1953 (definizione di perimetro basata sul semigruppo del calore) al 1960 (regolarità analitica della frontiera ridotta delle superfici minime, scritto per l'ordinariato!), nei quali si realizza compiutamente un programma, in qualche modo intuito da Caccioppoli, dall'esistenza di soluzioni deboli dei problemi di area minima alle loro proprietà strutturali, fino alla regolarità e, quindi, al ritorno a soluzioni classiche. Se si pensa agli altri contributi di De Giorgi in quei pochi anni (primo tra tutti, la completa risoluzione del XIX problema di Hilbert), questa progressione è veramente impressionante, e continua ancora oggi a colpirmi tutte le volte che ho l'occasione, come nella preparazione di questa conferenza, di riesaminarla.

Naturalmente, la descrizione che qui darò dei problemi della Teoria Geometrica della Misura, e delle soluzioni date ad alcuni di essi da De Giorgi, è sommaria e volutamente ricalca lo schema seguito nella mia presentazione orale; descrizioni più sistematiche sono disponibili ad esempio nel necrologio di De Giorgi apparso sul Bollettino UMI, e nelle Opere Scelte, pubblicate nel 2006 da Springer.

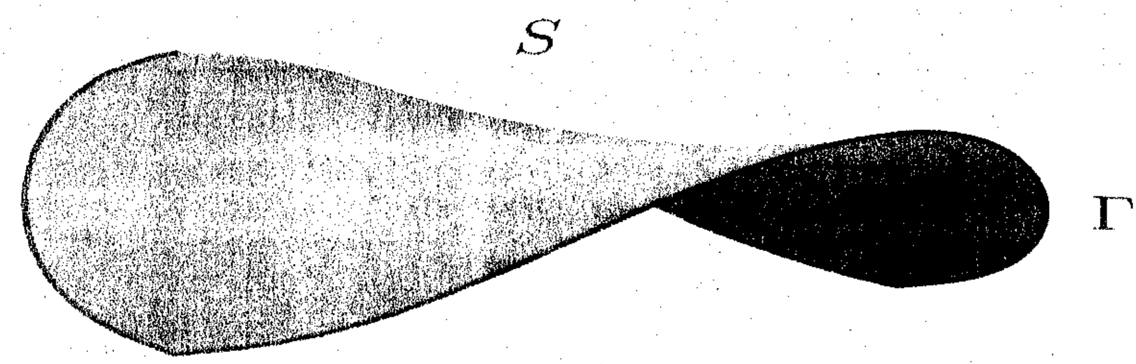

Figura 1: Il problema di Plateau

Formule di Gauss–Green, Stokes ed il problema del calcolo dell'area di una superficie

Lo studio del problema, posto dal fisico belga Plateau, di trovare le superfici S di area minima aventi un contorno Γ assegnato è stato una delle motivazioni più forti nella ricerca di:

(a) classi di superfici 2-dimensionali $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ *generalizzate* (anche con singolarità);

(b) metodi efficienti di calcolo della loro area superficiale.

Naturalmente i due problemi sono connessi tra loro, e possono essere facilmente formulati in spazi Euclidei di dimensione superiore, e anche per superfici di codimensione maggiore di uno (ad esempio curve in $\mathbf{R}^3$, 2-superfici in $\mathbf{R}^4$, etc.).

Ricordiamo che una 2-superficie Γ si dice *parametrizzata* se

$$\Gamma = \{\Phi(u,v) : (u,v) \in D\} \quad \text{con} \quad \Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3;$$

si dice di tipo *grafico* se $\Phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

Nel '31 Douglas aveva stabilito un risultato di esistenza per 2-superfici parametrizzate sul disco unitario in $\mathbb{R}^2$, utilizzando una classe particolare di parametrizzazioni indotte dalla struttura complessa dello spazio dei parametri. Ricordiamo, nelle notazioni precedenti, le formule classiche per il calcolo dell'area:

$$\text{Area}(\Gamma) = \int_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dudv.$$

Tuttavia, i metodi di Douglas difficilmente avrebbero potuto essere estesi a k-superfici con $k > 2$, o a superfici di tipo non parametrizzato (o non presentate mediante una parametrizzazione). Di qui la necessità di sviluppare una teoria dell'integrazione più intrinseca.

Un'altra linea di ricerca era quella di trovare le condizioni più generali possibili su $\mathbf{V}$, E e Γ per la validità delle formule di Gauss–Green e Stokes:

$$(GG) \qquad \int_E \operatorname{div} \mathbf{V}\, dx = \int_{\partial E} \langle \mathbf{V}, \nu_E \rangle \, d\sigma_2$$

$$(S) \qquad \int_\Gamma \langle \operatorname{rot} \mathbf{V}, \mathbf{n}_\Gamma \rangle \, d\sigma_2 = \int_{\partial\Gamma} \langle \mathbf{V}, \tau_{\partial\Gamma} \rangle \, d\sigma_1$$

Più in generale, si poneva il problema di trovare una teoria efficiente e generale dell'integrazione delle forme differenziali su insiemi k-dimensionali in $\mathbf{R}^n$.

Nello studio del problema, la scuola italiana (forse più delle altre) era fortemente ispirata da un lato dalla teoria dell'integrazione di Lebesgue ($k = n$), dall'altro dalla teoria delle curve rettificabili ($k = 1$), due teorie ormai "definitive" e di grande successo. Nell'introduzione del lavoro [C1] Caccioppoli scrive:

« ... Sta di fatto che è indispensabile stabilire queste teorie, se si vuole che siano feconde, nel loro campo naturale di validità; il problema della quadratura della superficie deve essere risoluto sullo stesso piano di generalità che quello della rettificazione delle curve, e se le difficoltà che si incontrano sono incomparabilmente maggiori, ciò non è imputabile che ad una complessità insita nella natura stessa delle cose. La generalità delle ipotesi assicura d'altronde spesso la generalità non solo, ma anche la semplicità e la coerenza dei risultati ultimi».

Lo stato dell'arte negli anni '40-'50

Scartata, sulla base di un controesempio di Schwarz, l'ovvia estensione della definizione 1-dimensionale (i.e. l'estremo superiore delle aree delle triangolazioni della superficie, che può spesso valere $+\infty$ anche per superfici regolari), molteplici definizioni di area erano state proposte in letteratura.

Nel contesto dei grafici di codimensione 1, spiccava in particolare quella di Lebesgue, studiata a fondo da Tonelli e Cesari:

$$\operatorname{Area}(\Gamma_f) = \inf\Big\{ \liminf_{h\to\infty} \int_D \sqrt{1 + |\nabla f_h|^2}\, dx : \\ f_h \in C^1(\overline{D}),\ \sup|f_h - f| \to 0 \Big\},$$

ove $\Gamma_f \subset D \times \mathbf{R}$ è il grafico di f.

Peano aveva anche proposto una definizione che teneva conto del carattere *orientato* della superficie, e che illustreremo più avanti. Per superfici non parametrizzate, Minkowski aveva invece proposto la seguente definizione:

$$\sigma_{n-1}(\Gamma) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathrm{Vol}(I_r(\Gamma))}{2r},$$

ove $I_r(\Gamma)$ è l'intorno di raggio r di Γ.

Molta attenzione era anche stata dedicata alle misure Φ originate dalla costruzione di Carathéodory, che ora richiamiamo: data una funzione $\zeta \geq 0$ definita sui chiusi di $\mathbf{R}^n$ e $\delta > 0$, definiamo

$$\Phi_\delta(\Gamma) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \zeta(S_i) : \Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i,\ \mathrm{diam}\,(S_i) < \delta\right\}.$$

A causa della monotonia di $\delta \mapsto \Phi_\delta$ la funzione $\Phi(\Gamma) = \lim_{\delta \downarrow 0} \Phi_\delta(\Gamma)$ è ben definita.

Se ad esempio $\zeta(S)$ è il diametro di S, allora $\Phi(\Gamma)$ corrisponde alla lunghezza di Γ. La Figura 2 illustra bene il motivo per il quale è necessario passare al limite per $\delta \downarrow 0$, "forzando" i ricoprimenti a essere piccoli: vicino al centro della spirale, infatti, qualsiasi ricoprimento di taglia fissata dà un'approssimazione grossolana della lunghezza della spirale.

Più in generale, variando ζ si possono produrre varie misure "geometriche" Φ, e in particolare:

(a) $\zeta(S) = [\mathrm{diam}\,(S)]^k$, la misura k-dimensionale $\mathscr{H}^k$ di Hausdorff;

(b) $\zeta(S) = \sup_p \mathrm{Vol}\,(p(S))$, la misura k-dimensionale di Gross;

(c) $\zeta(S) = \sup_p \mathrm{Vol}\,(p(S))$ per i soli convessi S, la misura k-dimensionale di Carathéodory.

Per superfici *regolari* k-dimensionali tutte queste misure coincidono, a meno di costanti moltiplicative, con quella definibile elementarmente mediante parametrizzazioni locali.

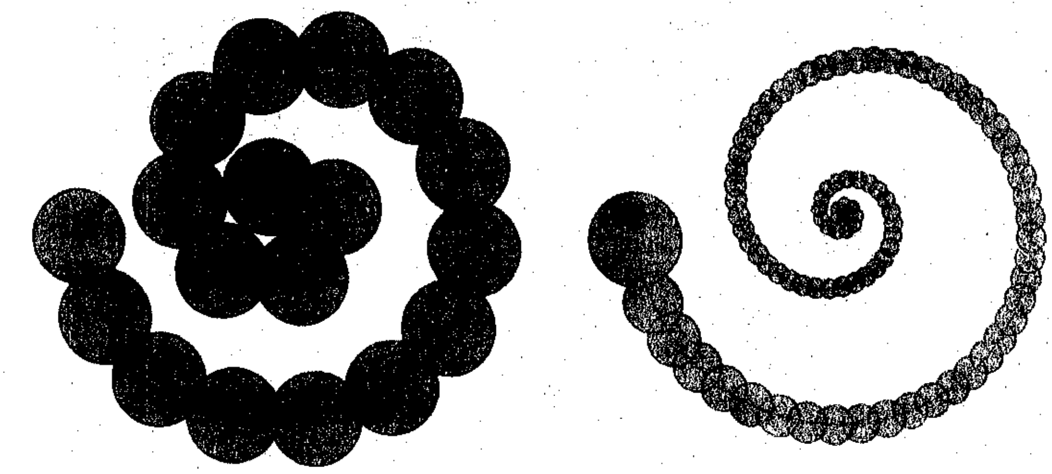

Figura 2: La costruzione di Carathéodory

Usando le misure originate dalla costruzione di Carathéodory, vari risultati, anche estremamente complessi sul piano tecnico, erano stati ottenuti negli anni '40. Federer mostrò ad esempio che un'opportuna formula di Gauss–Green valeva per domini E in $\mathbf{R}^n$ la cui frontiera *topologica* soddisfa $\mathscr{H}^{n-1}(\partial E) < +\infty$. La difficoltà del risultato è nella dimostrazione dell'esistenza di un vettore in un certo senso normale alla frontiera ∂E, a partire da una informazione *puramente quantitativa* sulla sua grandezza.

Tuttavia, Caccioppoli era estremamente scettico sull'utilità di questi strumenti per una soluzione definitiva del problema dell'integrazione k-dimensionale in $\mathbf{R}^n$ e in [C2] scrive:

«...Basti ricordare la molteplicità quasi caotica delle definizioni di misura lineare o superficiale (Carathéodory, Gross, Hausdorff, Kolmogoroff, ecc.), la serie di esempi intesi a dimostrare queste a coppie non equivalenti tra loro, e le varie estensioni parziali della formola di Gauss–Green (Schauder, Federer, Lorentz, ecc.), spesso di una generalità artificiosa».

Il programma di Caccioppoli e De Giorgi

Due sono gli elementi caratterizzanti della teoria intuita da Caccioppoli e poi compiutamente sviluppata da De Giorgi:

(a) Il considerare le ipersuperfici orientate, e quindi (almeno localmente) bordi di insiemi;

(b) L'abbandono definitivo, nello studio della formula di Gauss–Green, di ogni considerazione di tipo topologico, con l'uso pressoché esclusivo di tecniche di teoria della misura.

In particolare il punto (b), che si rivelerà decisivo, è fortemente contestato da L.C. Young, che recensisce in maniera sprezzante le note [C2], [C3] e scrive:

«... He states that his theory has many advantages over subsequent theories and that it desires to be independent of special topological investigations ... The reviewer has the strong impression that a careful analysis of the notions introduced so light-heartedly would lead more deeply into the topological background than the author considers desirable».

Consideriamo una superficie regolare *orientata* Γ, una porzione aperta A dello spazio $\mathbf{R}^3$, e un iperpiano π di proiezione. Seguendo Peano, Caccioppoli propone di considerare la funzione d'insieme

$$\varphi(A,\pi) = \int_{\pi(A\cap\Gamma)} m(x)\,dx$$

ove m è la molteplicità *algebrica* di $m^{-1}(x)\cap\Gamma$.

Si osserva facilmente che $\varphi(\cdot,\pi)$ è la restrizione agli insiemi aperti di una misura σ-additiva, avente massa totale minore dell'area superficiale elementarmente definita. Più precisamente, il valore $\varphi(A,\pi)$ è esprimibile mediante un integrale superficiale nel modo seguente:

$$\varphi(A,\pi) = \int_{A\cap\Gamma} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_\pi\rangle\, d\sigma_2,$$

ove $\mathbf{n}$ è il versore normale di Γ. Quindi ciascuna di queste funzioni fornisce, localmente, una stima per difetto dell'area.

Nel caso in cui $\Gamma = \partial E$, scegliendo $\pi = \pi_{yz}$ otteniamo

$$\int_E \frac{\partial g}{\partial x}\,dxdydx = \int_\Gamma g\,d\varphi(\cdot,\pi_{yz}) \qquad \forall g\in C^1_c(\mathbf{R}^3).$$

Nella terminologia moderna $\varphi(\cdot,\pi_{yz})$ è quindi la derivata *nel senso delle distribuzioni* della funzione caratteristica χ_E lungo la direzione x (e analogamente $\varphi(\cdot,\pi_{xy})$ e $\varphi(\cdot,\pi_{zx})$ corrispondono alle derivate nel senso delle distribuzioni lungo la direzione z e la direzione y).

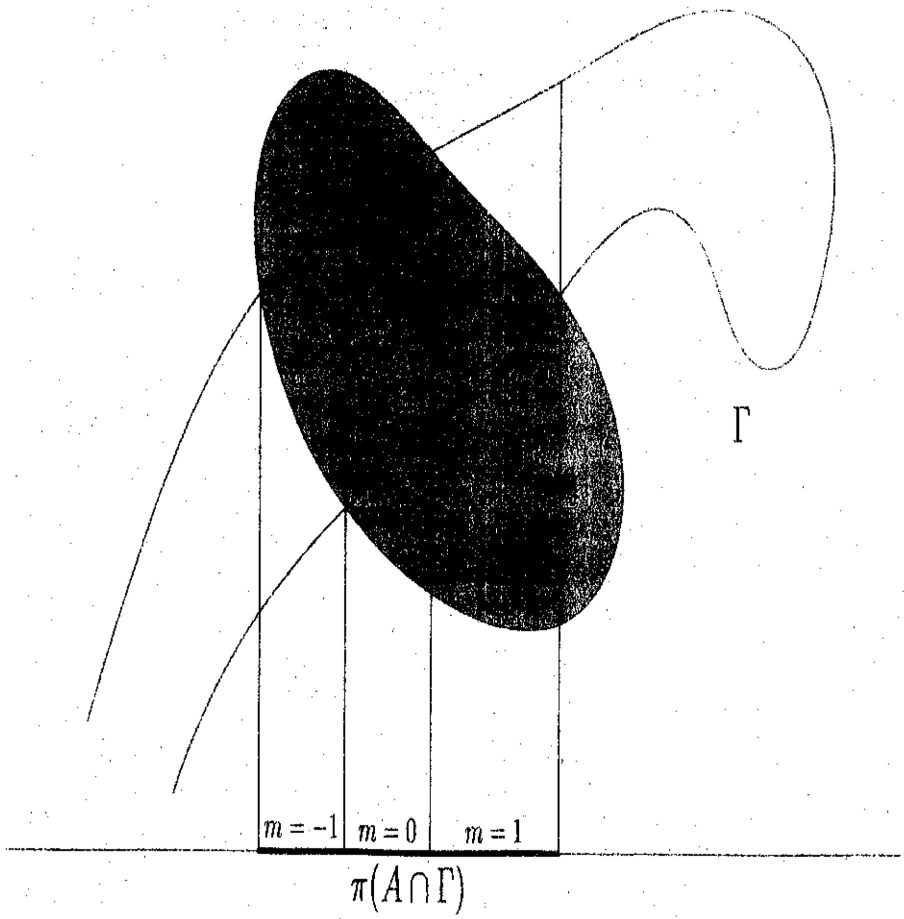

Figura 3: Molteplicità algebrica

L'idea di Peano si basava sul procedimento di costruzione dell'elemento d'area (e più in generale degli integrali di forme differenziali) a partire dalle misure $\varphi(A,\pi_{xy})$, $\varphi(A,\pi_{yz})$, $\varphi(A,\pi_{zx})$:

$$\mathrm{Area}(\Gamma) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{p}\sqrt{\varphi^2(A_k,\pi_{xy})+\varphi^2(A_k,\pi_{yz})+\varphi^2(A_k,\pi_{zx})}\right\}$$

(il sup, al variare di tutte le partizioni finite $A_1,\ldots,A_p$ di Γ). Si recupera in questo modo una formula del tipo "Area=sup.." molto utile per la semicontinuità inferiore del funzionale Area (una proprietà fondamentale per poter usare il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni), che sembra l'estensione naturale di quella unidimensionale.

Caccioppoli osserva in [C3] che il membro destro della formula precedente continua ad avere senso nella classe degli insiemi E, da

De Giorgi in poi chiamati di perimetro finito, caratterizzati dalla seguente proprietà:
esiste una successione (E_h) *di poliedri, convergente a E in media (i.e. tale che i volumi delle differenze simmetriche* $(E \setminus E_h) \cup (E_h \setminus E)$ *tendono a zero) tali che*

$$\liminf_{h \to \infty} \text{Area}\,(\partial E_h) < +\infty.$$

Si osservi anche che le misure $\varphi_h(\cdot, \pi)$ sono definibili elementarmente (essendo gli insiemi E_h dei poliedri) e che l'approssimazione in media è estremamente più debole di quella "uniforme" considerata in tutta la letteratura antecedente, anche nel contesto dei grafici.

Passando al limite per $h \to \infty$ nella formula di Gauss–Green relativa agli insiemi E_h si ottiene una "versione debole" della stessa formula:

$$\int_E \text{div}\, \mathbf{V}\, dxdydz = \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{V}_1\, d\varphi(\cdot, \pi_{yz}) + \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{V}_2\, d\varphi(\cdot, \pi_{zx}) + \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{V}_3\, d\varphi(\cdot, \pi_{xy}).$$

In questa formula sono *scomparse* la frontiera topologica e la normale esterna dell'insieme, sostituite dalle misure $\varphi(\cdot, \pi)$.

L'abbandono di considerazioni "puntuali" o "topologiche" sta proprio in questa scelta, certamente ardita (e, come abbiamo visto, contestata).

I primi risultati di De Giorgi

Nel 1953-54 scende in campo De Giorgi, che:

(1) in [D1] ottiene un'espressione analitica del perimetro di un insieme $\text{Per}(E)$, per vari versi più maneggevole di quella di Caccioppoli. Illustreremo questa definizione, ripresa recentemente da alcuni colleghi leccesi anche in contesti molto più generali, nella prossima sezione.

(2) in [D2] mostra che la classe degli insiemi di perimetro $\leq C$ è *compatta* rispetto alla convergenza locale in media; quindi la

definizione di Caccioppoli, se si vuole includere i poliedri e avere compattezza rispetto alla convergenza locale in media, è la più restrittiva possibile.

(3) in [D2] mostra anche che la definizione di Caccioppoli *equivale* alla validità di una formula debole di Gauss–Green; quindi tutti i casi parziali considerati da Federer e altri autori rientrano nel quadro di Caccioppoli.

(4) in [D4] mostra che la palla è l'unica soluzione del problema isoperimetrico anche nella classe degli insiemi di perimetro finito. In altre parole, per insiemi E di volume finito sussiste la disuguaglianza isoperimetrica

$$\mathrm{Vol}(E) \le C(n)\,[\mathrm{Per}(E)]^{n/(n-1)}$$

con uguaglianza se, e solo se, E è equivalente a una palla. Recentemente anche questo risultato è stato ripreso in considerazione, mostrandone alcune versioni quantitative (in altre parole, se il rapporto isoperimetrico $\mathrm{Vol}(E)/\mathrm{Per}(E)^{n/(n-1)}$ è vicino a quello della palla, allora l'insieme è (quantitativamente) vicino in media a una palla di raggio opportuno).

La definizione di perimetro Indichiamo con $\Phi(t,x)$ la soluzione fondamentale dell'equazione del calore in $\mathbf{R}^n$:

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

De Giorgi osserva che, posto $u(t,\cdot) = f * \Phi(t,\cdot)$ (la soluzione dell'equazione con dato iniziale $f \in L^\infty$), si ha che

$$t \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla_x u(t,x)|\,dx \quad \text{è non crescente in } (0,+\infty).$$

Posto $f = \chi_E$, definisce quindi

$$\mathrm{Per}(E) := \lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla_x u(t,x)|\,dx.$$

Tutti questi risultati portano L.C.Young a una (parziale) autocritica, che nella sua recensione al lavoro [D2] scrive:

«... he is able to show that his definition of perimeter coincides with the one proposed by Caccioppoli. This makes it possible to judge more clearly the precise scope of Caccioppoli's definitions».

L'obiettivo finale viene raggiunto da De Giorgi in [D3], che sorprendentemente riconcilia la teoria di Caccioppoli con quella di Carathéodory, Hausdorff, Federer e con la teoria degli insiemi rettificabili: mostra infatti che esiste un insieme $\mathscr{F}E \subset \partial E$, detto *frontiera ridotta*, di misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale (o di Gross, Carathéodory, etc..) finita su cui tutte le misure $\varphi(\cdot, \pi)$ sono concentrate.

La frontiera ridotta Definite la misura perimetro $|D\chi_E|$ e la derivata distribuzionale $D\chi_E = \nu_E|D\chi_E|$, con $|\nu_E| = 1$, i punti $x \in \mathscr{F}E$ sono caratterizzati da:

$$\lim_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |\nu_E(y) - \bar{\nu}_{x,r}|^2 \, d|D\chi_E|(y) = 0,$$

ove

$$\bar{\nu}_{x,r} := \fint_{B_r(x)} \nu_E(y)|D\chi_E|(y).$$

Quindi, nei punti della frontiera ridotta l'oscillazione quadratica media del vettore normale tende a 0. Un classico teorema di Besicovitch, valido per tutte le misure vettoriali in $\mathbf{R}^n$, assicura che la proprietà su scritta vale in $|D\chi_E|$-quasi ogni punto x (e inoltre $\bar{\nu}_{x,r} \to \nu_E(x)$ per $|D\chi_E|$-quasi ogni x): in altre parole, la misura perimetro è *concentrata* sulla frontiera ridotta.
Mettendo insieme tutti questi risultati si ottiene quindi una nuova formula di Gauss–Green, molto più simile a quella classica

$$\int_E \operatorname{div} \mathbf{V} \, dxdydz = -\int_{\mathscr{F}E} \langle \mathbf{V}, \nu_E \rangle \, d\mathscr{H}^2,$$

con l'unica differenza che la frontiera $\mathscr{F}E$ (e la normale interna ν_E) non devono essere intese nel senso convenzionale (di fatto, semplici esempi mostrano che la frontiera topologica può essere estremamente più grande di quella ridotta, e addirittura di misura di Lebesgue positiva).

A differenza di L.C.Young (non critico, ma tiepido anche nei confronti dei lavori di De Giorgi), Federer e i suoi collaboratori comprendono immediatamente l'importanza e la novità di questo nuovo approccio alla teoria dell'integrazione.

La tappa in un certo senso conclusiva di questo lungo percorso può essere considerato il lavoro di Federer e Fleming del '60, nel quale la teoria dell'integrazione k-dimensionale in $\mathbf{R}^n$ viene compiutamente sviluppata basandosi da un lato sulle idee introdotte in codimensione 1, dall'altro usando la dualità tra oggetti geometrici e forme differenziali (un'idea introdotta da De Rham), nel contesto dalla teoria delle distribuzioni di Schwartz. Nel lavoro vengono quindi introdotte le *correnti* k-dimensionali, poste in dualità con le forme k-dimensionali a supporto compatto.

In codimensione 1 la teoria delle correnti coincide sostanzialmente con quella dei perimetri.

La regolarità delle superfici minime

Nel 1959-60 De Giorgi completa il suo programma mostrando la regolarità analitica di $\mathscr{F}E$, quando E ha perimetro localmente minimo. Gli insiemi E di perimetro localmente minimo sono definiti dalla proprietà:

$$P(E,A) \leq P(F,A) \quad \text{tutte le volte che } F\Delta E \subset\subset A \subset\subset \mathbf{R}^n.$$

Il procedimento di regolarizzazione, totalmente inventato e realizzato da De Giorgi, si basa su una quantità, da lui chiamata *eccesso*, che dà una stima quantitativa dell'oscillazione quadratica media del vettore normale (si noti che una quantità simile, modulo un diverso riscalamento, compare nella definizione di frontiera ridotta):

$$\mathrm{Ecc}(E, B_r(x)) := r^{1-n} \min_{\nu \in \mathbf{S}^{n-1}} \int_{B_r(x)} |\nu_E(y) - \nu|^2 \, d|D\chi_E|(y).$$

Il risultato fondamentale, che "innesca" il processo di regolarizzazione, è il:

Decadimento dell'eccesso. *Se E ha perimetro localmente minimo, esistono costanti $\varepsilon(n) > 0$, $\tau(n) \in (0,1)$ tali che, per $x \in \overline{\mathscr{F}E}$, vale*

$$\mathrm{Ecc}(E, B_r(x)) < \varepsilon \Rightarrow \mathrm{Ecc}(E, B_{r/2}(x)) \leq \tau \, \mathrm{Ecc}(E, B_r(x)).$$

Quindi, non appena $\mathrm{Ecc}(E, B_r(x))$ scende al di sotto di una certa soglia "critica ε (e questo avviene, per r piccolo, almeno nei punti x di $\mathscr{F}E$), l'eccesso inizia a decadere in modo geometrico. Attraverso un semplice meccanismo iterativo si ottiene

$$\nu_E \in C^{0,\alpha}(\mathscr{F}E; \mathbf{S}^{n-1}) \qquad \text{con} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} = \tau.$$

Quindi, localmente, $\mathscr{F}E$ è esprimibile come grafico di una funzione $f \in C^{1,\alpha}$ di $(n-1)$-variabili che minimizza (sempre localmente) il funzionale area. Soddisfa quindi, nel senso delle distribuzioni, l'equazione delle superfici minime

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0.$$

Da questo fatto si deduce infine (usando essenzialmente la teoria di Schauder) la regolarità analitica di f e quindi di $\mathscr{F}E$.

La dimostrazione del decadimento è estremamente complessa: si mostra che, nelle regioni ove l'eccesso è piccolo, $\mathscr{F}E$ si approssima bene (in termini quantitativi) con grafici di funzioni f_i, che saranno quindi "quasi minimi" del funzionale area, con $|\nabla f_i| \ll 1$.

Dato che

$$\int_D \sqrt{1+|\nabla f_i|^2}\, dx \;\sim\; \mathrm{Vol}(D) + \frac{1}{2}\int_D |\nabla f_i|^2\, dx$$

si ha che le funzioni f_i, opportunamente riscalate, sono prossime ad essere armoniche. Quindi il decadimento dell'eccesso è proprio la controparte "geometrica" delle stime di decadimento delle funzioni armoniche:

$$\fint_{B_{\alpha r}(x)} |\nabla f - \overline{\nabla f}|^2\, dx \le C(n)\alpha^2 \fint_{B_r(x)} |\nabla f - \overline{\nabla f}|^2\, dx.$$

La tecnica di De Giorgi venne adattata quasi immediatamente da Almgren e Allard a superfici di dimensione e codimensione arbitraria, ed è oggi di uso comune in moltissimi altri contesti anche non strettamente geometrici, quali:

• Sistemi di equazioni ellittiche/paraboliche;
• Mappe armoniche;
• Problemi geometrici di evoluzione (ad esempio, il moto per curvatura media).

Considerazioni conclusive Sicuramente si può affermare che la moderna Teoria Geometrica della Misura (la cui data ufficiale di nascita è probabilmente il 1969, anno della pubblicazione della monografia di Federer) nasce da una felice sintesi delle idee sviluppate dalla scuola italiana (e da Caccioppoli e De Giorgi in particolare) con la teoria degli insiemi rettificabili e dell'integrazione rispetto a misure del tipo di Carathéodory.

L'associazione di una famiglia di misure a un oggetto geometrico o analitico (nel caso dei perimetri, la frontiera di un insieme), abbandonando almeno in prima istanza una descrizione di tipo puntuale/topologico è ormai una tecnica standard in moltissimi contesti, ad esempio nel moto per curvatura media, nei problemi con discontinuità libere, nello studio delle singolarità delle mappe armoniche, nell'elasticità non lineare, nelle leggi di conservazione.

Bibliografia

[C1] R. CACCIOPPOLI, *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie.* Rend. Circ. Mat. Palermo, 1930.

[C2] R. CACCIOPPOLI, *Elementi di una teoria generale dell'integrazione k-dimensionale in uno spazio n-dimensionale.* Atti IV Convegno UMI, 1951.

[C3] R. CACCIOPPOLI, *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati.* Note I e II, Rend. Accad. Naz. Lincei, 1952.

[D1] E. DE GIORGI, *Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme.* Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1953.

[D2] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni.* Ann. Mat. Pura Appl., 1954.

[D3] E. DE GIORGI, *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni.* Ricerche Mat., 1955.

[D4] E. DE GIORGI, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita,* Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci., 1958.

[D5] E. DE GIORGI, *Frontiere orientate di misura minima,* Seminario di Matematica della Scuola Normale, ETS Pisa, 1960.

Novantesimo anniversario della nascita di Ennio De Giorgi

Presentazione

Il giorno 8 febbraio 2018 ricorre il 90° anniversario della nascita di Ennio De Giorgi. Il giornale che nella rinascita della III Serie ha avuto l'onore di pubblicare l'articolo scritto da Ennio De Giorgi proprio per Angolo Acuto non può dimenticare questa data pubblicando quanto scritto dal prof. Luigi Ambrosio della Normale di Pisa, allievo dello stesso De Giorgi, sulla moderna teoria geometrica della misura (Teorema De Giorgi - Nash).

Antonio Salmeri