Aspetti inconsueti e curiosi della matematica

*Silvana Bianchini **

Problemi ínusuali , questioni curiose in contesti concettuali
diversi e ricchi consentono di progettare percorsi
per gli studenti più motivati e intuitivi.

Come è ormai consuetudine, nella scuola si è rivolta maggiore attenzione agli studenti «più deboli», adeguando il livello di preparazione, mentre ci si è meno preoccupati degli allievi più motivati allo studio. Da tempo si avverte l'esigenza di rivolgere l'attenzione agli studenti «migliori» e di offrire loro, al di fuori del normale svolgimento dei programmi curricolari, la possibilità di approfondire e ampliare le conoscenze, affinare le proprie abilità. Accanto alle attività di recupero prendono campo progetti culturali come un «laboratorio di matematica» che, nel liceo scientifico «Benedetto Varchi», è attìvo da diversi anni. Un laboratorio in cui si lavora «ìntomo alla matematìca» divertendosi non solo a risolvere problemi, ma anche imparando ad apprezzare gli aspetti culturali della disciplina. In questa attività interessa soprattutto mutare quell'atteggiamento psicologico di timore e inadeguatezza, che accompagna come un'eredità negativa l'approccio alla matematica, nel piacere di fare e di scoprire la matematica, approfondire le relazioni tra la matematica e le altre discipline e.contribuìre al rinnovamento della didattica coinvolgendo gli studenti come parte attiva in questa ricerca.

La preparazione alle gare matematiche

Nel mese di febbraio si organizzano due incontri, specifici per la preparazione alle Olimpiadi di Matematica, gestiti da allievi dalla Scuola Normale di Pisa con funzioni di Tutor.

** Silvana Bianchini, Dipartimento Ricerche Didattiche – Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini" dell'Università di Firenze*

I normalisti, in genere, sono persone straordinarie che amano la matematica e questa loro passione è così evidente che i ragazzi la percepiscono, ne rimangono affascinati ed emotivamente attratti. Parlando di matematica con naturalezza, riescono a catturare l'attenzione degli studenti e a trasmettere loro questionì anche non semplici. Si soffermano per lo più su alcuni elementi teorici di aritmetica, di calcolo combinatorio, di probabilità proprio perché questi argomenti non sempre rientrano nel normale svolgimento delle lezioni curricolari. Propongono problemi inconsueti e guidano alla loro risoluzione insegnando particolari strategie. Il Laboratorio coinvolge positivamente i ragazzi che si impegnano con entusiasmo in vista anche di gare matematiche, a livello nazionale e internazionale, il cui superamento gratifica la loro fatica.

I temi culturali

Nel laboratorio trovano spazio anche temi di carattere pluridisciplinare, che di anno in anno variano. Ad esempio, prendendo spunto dalla visione di un filmato di Michele Emmer sui disegnì di Escher si è discusso, alla presenza di un esperto sugli aspetti artistici della matematica e attraverso l'analisi di particolari problemi si è scoperto il ruolo non indifferente che la matematica ha nel gioco. Inoltre abbiamo posto attenzione alla matematica industriale e ci siamo resi conto come sia vasto e sorprendente il campo di indagine: perfino la quantità e la qualità del caffè di una tazzina dipende dalla matematica.

Uno degli obiettivi prioritari di questo progetto è dare un «volto umano» alla matematica inserendola nel suo contesto storico. A tal riguardo sono intervenuti relatori che hanno parlato delle diverse concezioni della forma della Terra attraverso i tempi, spiegato perché la geometria di Euclide sia insufficiente per valutare le grandi distanze, illustrando la necessità di ricorrere alle geometrie non euclidee. Nel 2002 ricorrevano ottocento anni dalla pubblicazione del *Liber Abaci* di Leonardo Písano: ci siamo soffermati su questo matematico e sulle caratteristiche della sua opera, focalizzando gli aspetti sociali ed economici del tredicesimo secolo.

I problemi del laboratorio

I problemi che vengono propoti riguardano vari ambiti : aritmetica, geometria, calcolo combinatorio, logica; in genere si discostano dagli ordinari quesiti del quotidiano scolastico e alcuni tra questi potremmo definirli «problemi non standard». Non mancano quelli tratti dalla storia della matematica che di solito sono accompagnati da una breve presentazione dell'autore o del periodo relativo.

«***Qual è l'ultima cifra di*** 47^{95}***?*** »; un quesito di aritmetica di semplice risoluzione con le congruenze che offrono la facoltà di dominare la visione su «tantì» numeri .

E' noto che se «a *e* b *sono numeri positivi,* $a \equiv b$ *mod 10 se e solo se nella rappresentazione decimale hanno la stessa cifra delle unità***»;** ne segue che $47 \equiv 7$ mod 10. Se effettuiamo l'operazione di moltiplicazione tra congruenze si ha che se $a \equiv b$ mod 10 e $c \equiv d$ mod 10 allora anche il prodotto $ac \equiv bd$ mod 10; ciò ci porta a scrivere che $47 \cdot 47 \cdot 47 \ldots\ldots 47 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \ldots 7$ mod 10 ovvero nel nostro caso $47^{95} = 7^{95}$ mod 10.

Analizzando le potenze del 7 osserviamo che:

$7^1 = 7$ mod 10,

$7^2 = 49$ $\quad 49 \equiv 9$ mod 10 $\rightarrow$ $7^2 \equiv 9$ mod 10

$7^3 = 343$ $\quad 343 \equiv 3$ mod 10 $\rightarrow$ $7^3 \equiv 3$ mod 10

$7^4 = 2401$ $\quad 2401 \equiv 1$ mod 10 $\rightarrow$ $7^4 \equiv 1$ mod 10

$7^5 = 16807$ $\quad 6807 \equiv 7$ mod 10 $\rightarrow$ $7^5 \equiv 7$ mod 10

7^5 si comporta come 7^1 e cioè le potenze del 7 hanno periodo 4.

Tenendo conto di ciò, nel nostro caso specifico occorre esprimere la potenza del 7 nella forma :

$7^{95} = 7^{23 \cdot 4 + 3} = 7^{23 \cdot 4} \cdot 7^3 = (7^4)^{23} \cdot 7^3$.

Poiché $7^4 \equiv 1$ mod 10 e $7^3 \equiv 3$ mod 10 è $(7^4)^{23} \equiv 1$ mod 10 .

$(7^4)^{23} \cdot 7^3 \equiv 1 \cdot 3$ mod 10 ed infine $(7^4)^{23} \cdot 7^3 \equiv 3$ mod 10 ovvero $7^{95} \equiv 3$ mod 10.

Ricordando che $47^{95} \equiv 7^{95}$ mod 10 si ha che $47^{95} \equiv 3$ mod 10.

Quindi la cifra delle unità di 47^{95} è 3 .

Si procede allo stesso modo per dimostrare ad esempio che *«*$3^{2n+1} + 2^{n+1}$ è divisibile per 7***»*** e per determinare gli interi positivi *n* per i quali *«* $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ è divisibile per 5***»*** .

«***In quante parti può essere divisa al massimo una torta co 5 tagli ? »***; un problema di combinatoria che tratta del «modo di contare gli insiemi ***»*** e richiede il conteggio delle parti risultanti dalla divisione con tagli di una regione del piano.

In questo caso basta disegnare la torta eseguire i tagli e contare le parti. Si trova che le parti sono 16.

Questa operazione concreta è essenziale in quanto porta a capire che per rispettare la condizione «al massimo», i tagli devono non incontrarsi in uno stesso punto e non essere paralleli.

E se i tagli fossero tanti? «***In quante parti può essere divisa al massimo una torta co 125 tagli? »***

Occorre affrontare la questione in modo generale e ricercare, ragionando in modo ricorsivo, l'algoritmo che permetta di valutare le parti che si producono con *n* tagli.

Indicando con a_n il numero «massimo» delle parti corrispondenti ad *n* tagli costruiamo la seguente successione :

$n = 1 \rightarrow a_1 = 2$

$n = 2 \rightarrow a_2 = a_1 + 2$

$n = 3 \rightarrow a_3 = a_2 + 3$

$n = 4 \rightarrow a_4 = a_3 + 4$

…………………………..

…………………………..

…………………………..

$n = n \rightarrow a_n = a_{n-1} + n$

addizionando membro a membro i termini delle *n* uguaglianze si ha :

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots a_{n-1} + 2+2+3+4+\ldots\ldots + n$

e riducendo si ottiene: $a_n = 2+2+3+4+\ldots\ldots + n$

che si può anche scrivere

$a_n = (1+1) + 2+3+4+\ldots + n$ ovvero

$a_n = 1 + (1+2+3+4+\ldots + n)$

da cui l'espressione del numero massimo delle parti corrispondente ad n tagli è

$a_n = 1 + [n(n+1)]/2$.

A questo punto applicando la relazione trovata, con 125 tagli si hanno:

$a_{125} = 1+[125+(125+1)]/2 = 7876$.

*«**Carlo ha tre figli, Anonio, Luca e Paolo. Uno di questi ha rotto la finestra del siggiorno. Il padre sta cercando di scoprire il colpevole :***

- ***Antonio.** «**Non sono stato io. E neanche Luca**».*
- ***Luca. «Non è stato Antonio. Il colpevoie è Paolo**».*
- ***Paolo. «Non è vero, non ho rotto io la finestra. L'ha rotta Antonio**».*

***Ciascun ragazzo ha pronuciato due frasi: uno soltanto ha detto la verità, un altro tutte bugie ed il terzo una cosa vera ed una falsa. Chi ha rotto la finestra?**».*

Un semplice quesìto di logica al quale è facile rispondere con immediatezza leggendo e riftettendo sulle frasi pronunciate da ciasuno dei tre figli. Tuttavia può essere interessante vedere come un allievo del biennio abbia formalizzato la questione. Indicate con *a, b, c* rispettivamente le proposizioni «Antonio è colpevole», «Luca è colpevole», «Paolo è colpevole», gli enunciati logici che esprimono le affermazioni pronunciate sono:

- $(\bar{a} \wedge \bar{b}) \rightarrow c.$ Antonio:
- Luca : $(\bar{a} \wedge \bar{b}) \rightarrow c.$
- Paolo : $(\bar{a} \wedge \bar{b}) \rightarrow a.$

Le prime due proposizioni sono equivalenti pertanto se Antonio dicesse la verità, la direbbe anche Luca; ma solo uno dei tre è completamente sincero quindi Paolo non mente e allora il colpevole è Antonio.

«Dati due punti A e B in un angolo retto, trovare il cammino più breve che va da A a B toccando l'uno e poi l'altro lato dell'angolo ».

Un interessante problema di minimo da affrontare con l'applicazione delle simmetrie, senza ricorrere al calcolo differenziale. Siano A e B due $X\hat{O}Y$ punti interni all'angolo retto, P e Q punti qualsiasi appartenenti rispettivamente ai lati OX e OY dell'angolo.

La spezzata APQB è un cammino che da A porta a B. Si costruisce A′ simmetrico di A rispetto a OX e B' simmetrico di B rispetto a OY. Poiché P e Q sono punti uniti, si ha: AP ≡ A′P e BQ ≡ B′ Q e il percorso A′PQB' è congruente al percorso APQB *(fig. 1).*

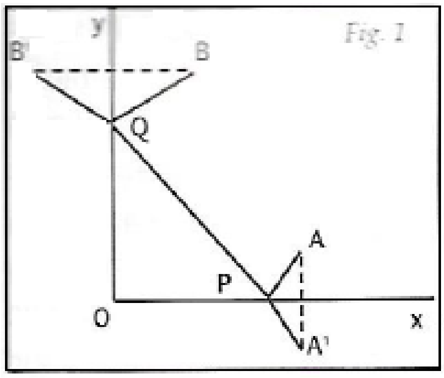

Fig. 1

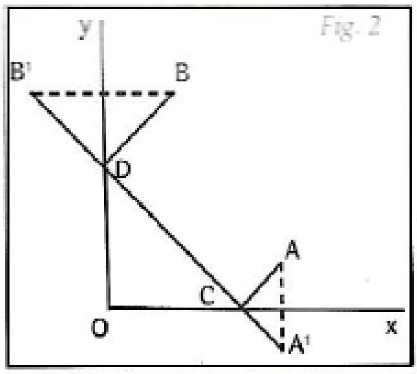

Fig. 2

Ma, tra tutti i cammini che congiungono A′ con B′ il più breve è quello rettilineo.

Il segmento A'B' incontra i lati OX e OY dell'angolo rispettivamente in C e in D. Dunque ACDB, congruente ad A′CDB′ è il tragitto più breve che *«va da A a B toccando prima l'uno e poi l'altro dei due lati dell'angolo» (Fig. 2).*

«Si dístribuiscono 100 misure di grano fra uomini, donne, ragazzi. Ogni uomo ne ha tre, ogni donna due, ogni due ragazzi una. Quanti sono gli uomini, le donne i ragazzi?

(Alcuino dà una sola soluzione del problema : u=11, d=15 , r=74. Determinare le altre cinque soluzioni)» (Fig. 3).

Fig 3

Laboratorio di Matematica

Mese di Ottobre

Alcuino (730-804)

Famoso monaco benedettino di nobile famiglia anglosassone,uno fra gli uomini più colti del Medioevo, fu eccellente soprattutto nel-l'insegnamento. A Parma ebbe un incontro con **Carlo Magno** che sentitolo parlare lo invitò con insistenza presso la sua corte. Alcui-no insegnò a Carlo la retorica, la dialettica e l'astronomia; scrisse molti libri e fu l'ispiratore della **riforma scolastica** di Carlo Magno.

Problema di Alcuino

Si distribuiscono 100 misure di grano fra uomini, donne, ragazzi. Ogni uomo ne ha tre, ogni donna due, ogni due ragazzi una. Quanti sono gli uomini, le donne, i ragazzi?

(Alcuino dà una sola soluzione del problema: u = 11, d = 15, r = 74. Determinare le altre cinque soluzioni).

È uno dei problerni indeterminati di Alcuino, famoso monaco benedettino di nobile famiglia anglosassone, uno fra gli uomini più colti del Medioevo. Alcuino conobbe a Parma Carlo Magno e fu da questi invitato con insistenza presso la sua corte come maestro di retorica, di dialettica e di astronomia. Indicati con *u* gli uomini, *d* le donne, *r* i ragazzi, il problema si traduce nell'equazione 3u + 2d + ½ r = 100 che ammette infinite soluzioni . E' data la soluzione (11, 15, 74) e si chiede di determinare le altre cinque.

Posto u = 11 + a,   d = 15 + b,   r = 74 + c, si può scrivere

3(11 + a) + 2(15 +b)+1/2   (74 + c) = 100
da cui sviluppando e riducendo si ottiene 6a + 4d + c = 0 .
Sotto le condizioni :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 6a+4d+c=0 \end{cases}$$ si hanno le 5 soluzioni richieste.

Infatti risolvendo il sistema si $$\begin{cases} a=-\frac{3}{5}b \\ c=-\frac{2}{5}b \end{cases}$$ trova

e per b=5k , a= -3k , c=-2k la terna (*u,d,r*) $$\begin{cases} u=11-3k \\ d=15+5k \\ r=74-2k \end{cases}$$ diventa

Poiché *u, d, r* devono essere interi positivi, il parametro k può assumere valori che soddisfano la relazione: $-3 < k \geq 3$.
Per *k=0* si ha soluzione *u*=11*, d*=15 *, r* =74 che già conosciamo. Le altre cinque sono corrispondenti ai valori *k*=-2, *k*=-1, *k* =1 *,* *k* = 2, *k = 3.*

Intero k	Uomini	donne d	ragazzi r	u+ d+r
-2	17	5	78	100
-1	14	10	76	100
1	8	20	72	190
2	5	25	70	100
3	2	30	68	100

Fragilità in geometria
I ragazzi che partecipano a questa attività culturale sono molto interessati e capaci di intuire con celerità la strategia risolutiva di problemì che non rientrano negli usuali schemi del lavoro svolto in classe. In questa sede si presenta l'occasione di scoprire le potenzialità dei partecipanti, di coltivarle e anche di individuare quegli aspetti del programma che risultano meno assimilati. La geometria, è il tema in cui si riscontra una maggior fragilità. In una serie di 20 quesiti, riguardanti vari argomenti, proposti nei «giochì a squadre », solo tre non sono stati risolti correttamente e questi sono proprio relativi alla geometria. Ecco i testi dei tre problemi.
Uno, abbastanza semplice*,* si articola sul trapezio, una delle solite figure piane:
«Il nonno Desiderio ha un appezzamento di terra costituito da un trapezio ABCD, in cui le basi AD, e CD misurano rispettivamente 7 km e 1 km. Vuole

dividerlo in due parti equivalenti per i suoi due nipoti, tracciando una linea retta MN parallela alle basi. Quanto sarà lungo (in km) il segmento MN?»
(Risultato: 5 km).

Un altro, più laborioso, richiede anche conoscenze di trigonometria:
«Quanto misura in gradi angolo nel quadrato rappresentato in figura ? (fig. 4)
(Risultato 135°) .

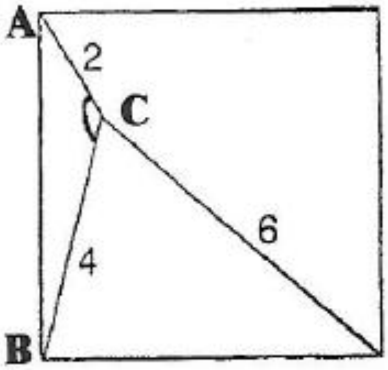

Fig. 4
L'angolo misterioso
«Quanto misura (in gradi) l'angolo $A\hat{C}B$ nel quadrato rappresentato in figura?».

Il terzo implica il possesso di una buona visione spazíale :
«Jacob ha 2001 cubetti (identici) di lego, che unisce performare un grande parallelepipedo . Poi dipinge di verde le facce esterne (anche quella inferiore) e toglie i cubetti con almeno una faccia verde . Con quelli rimasti, ripete l'operazione e così via …. finché si accorge che, se colorasse l'ultimo parallelepipedo che ha formato, non gli resterebbero più cubetti bianchi. A questo punto si ferma . Al massimo quanti cubetti Jacob può aver dipinto di verde (su almeno una faccia)?» (Risultato 2000)

I vantaggi di un laboratorio di matematica
Questo tipo di attività culturale permette di intervenire in qualche modo sia sui ragazzi «più bravi» che su quelli «meno bravi». Si scoprono allievi particolarmente dotati e desiderosi di approfondire gli studi che però vivono in ambienti culturalmente non adeguati; il laboratorio crea l'opportunità di mettere in evidenza le loro attitudini. D'altra parte gli studenti «meno brillanti» si rendono conto che la matematica non è poi così rigidamente impostata come può sembrare a prima vista, bensì aperta anche ad altri ambiti: alla letteratura, all' arte oltre che alla scienza m generale. Nasce per costoro un rapporto nuovo con la disciplina che imparano ad apprezzare, accantonando quel senso di freddezza e di indifferenza che potevano prima avere.