La versiera ai tempi dell'Agnesi.

Lorenzo Meneghini

Maria Gaetana Agnesi è una figura di spicco nella storia della matematica del XVIII secolo. Della sua vita abbiamo già parlato in un articolo precedente (vd. [2]); in queste brevi note vogliamo presentare la *versiera*, la curva che l'ha resa famosa, così come lei l'ha descritta nelle *"Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana"*.

LE ISTITUZIONI ANALITICHE E LA PRIMA COMPARSA DELLA VERSIERA

Dopo aver dato sfoggio per anni della propria erudizione nel salotto culturale di famiglia, che il padre organizzava, secondo il costume dell'epoca, Maria Gaetana si dedica allo studio della matematica, sotto la guida di padre Ramiro Rampinelli e Jacopo Riccati. Nel 1748, pubblica le *Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù italiana*: l'opera, divisa in due tomi, è scritta in lingua italiana con lo scopo di renderla chiara a chiunque decida di intraprenderne lo studio.
Nonostante vi si trovino, *in nuce*, il calcolo differenziale ed integrale, oltre ad un'ampia panoramica di luoghi geometrici, Maria Gaetana Agnesi è più spesso ricordata per la descrizione di una curva algebrica[1], nota come la *versiera*.
La curva vi compare descritta per la prima volta nel problema III del Tomo I, capitolo V.

PROBLEMA III.

238. *Dato il ſemicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC ; *ſi ricerca fuori di eſſo il punto* M *tale , che condotta* MB *normale al diametro* AC , *che taglierà il circolo in* D , *ſia* AB , BD :: AC *alla* BM , *e perchè infiniti ſono i punti* M , *che ſoddisfanno al problema , ſe ne dimanda il luogo .*

Sia *M* uno di queſti punti , e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, ſarà , per la proprietà del circolo , $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema, ſarà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax - xx} :: a, y$; e però $y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x}$, o ſia $y = \frac{a\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da deſcriverſi , che diceſi la *Verſiera* .

Fig. 1 – Problema III, pag. 380/381, Tomo I

Come si può notare, il modo di scrivere la matematica all'epoca era molto diverso da quello usato oggi; trascriviamo, quindi, il testo del problema in termini moderni:

[1] La versiera era già stata studiata sia da Pierre de Fermat, che si era occupato della sua quadratura circa un secolo prima, che da Guido Grandi, che l'aveva chiamata *curva con seno verso* nel 1703.

"Dato il semicircolo ADC (Fig. 135) del diametro AC, si ricerca fuori di esso un punto M tale che, condotta MB normale al diametro AC, che taglierà il circolo in D, sia $AB : BD = AC : BM$, e perché infiniti sono i punti M che soddisfano al problema, se ne dimanda il luogo.
Sia M uno di questi punti, e chiamata AC = a, AB = x, BM = y, sarà, per la proprietà del circolo, $BD = \sqrt{ax - x^2}$, e per la condizione del problema, sarà $AB : BD = AC : BM$, cioè $x : \sqrt{ax - x^2} = a : y$, e però $y = \dfrac{a\sqrt{ax - x^2}}{x}$, o sia $y = \dfrac{a\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da descriversi, che dicesi versiera".

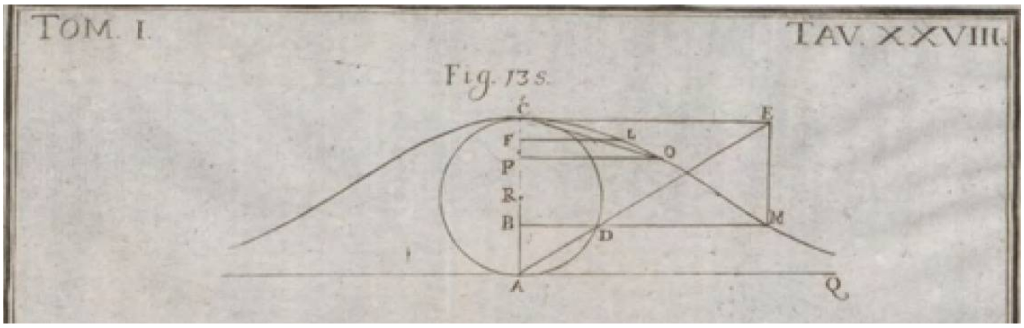


Fig. 2 – Figura 135, tavola XXVIII, Tomo I

Proviamo a chiarire il ragionamento dell'Agnesi.
Osserviamo innanzitutto che la proporzione $AB : BD = AC : BM$ di cui si richiede la validità può essere dedotta dalla similitudine esistente tra i triangoli rettangoli ABD e ACE in fig. 2, osservando che BM = CE perché lati opposti di un rettangolo. Se, a questo punto, consideriamo anche il triangolo ACD (fig. 3), rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza, risulta chiaro che la *proprietà del circolo* richiamata nel testo del problema altro non è che un'applicazione del 2° Teorema di Euclide, dal momento che BD è altezza relativa all'ipotenusa del triangolo ACD.

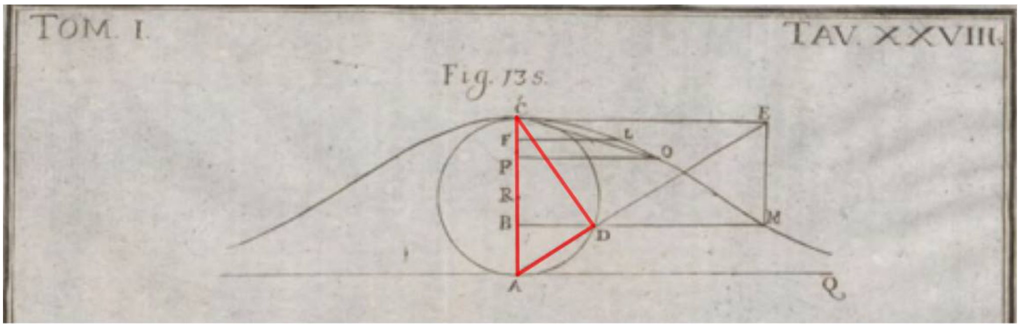


Fig. 3 – Figura 135, col triangolo rettangolo ACD in evidenza

Risulta, quindi, del tutto naturale calcolare la lunghezza del segmento BD partendo dal prodotto delle lunghezze dei segmenti AB e BC.
I passaggi successivi sono una logica conseguenza di quanto fin qui osservato, se si ricorda che entrambi i radicandi dell'ultima formula rappresentano lunghezze di segmenti e non possono, quindi, che essere positivi.
Pur lasciando ai più volenterosi il dettaglio, peraltro piuttosto semplice, dello studio della funzione

$$y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} \qquad (1)$$

ricavata nelle Istituzioni Analitiche, è interessante osservarne il grafico (fig. 4*a*, ricavato ponendo $a=3$) solo in apparenza diverso da quello cui siamo abituati[2] (fig. 4*b*).

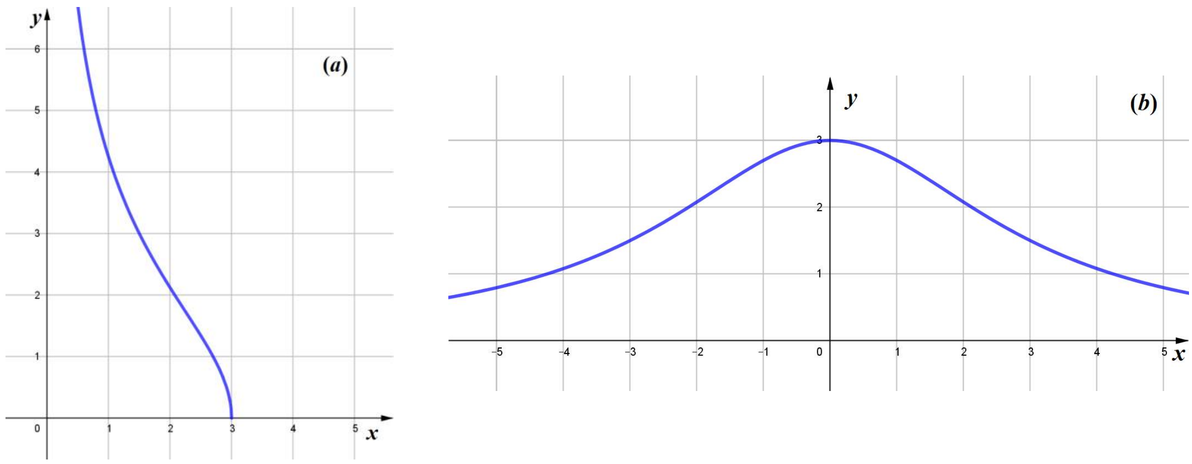


Fig. 4 – (*a*) Grafico della funzione (1), rappresentante un *arco di versiera*.
(*b*) Usuale rappresentazione della versiera di Agnesi, per lo stesso valore di *a*.

Chiaramente il Problema III, che stiamo esaminando, presenta una simmetria rispetto al diametro AC della semicirconferenza. È ragionevole, pertanto, attendersi che il grafico della funzione sia simmetrico rispetto ad uno degli assi cartesiani (vd. fig. 4*b*).

Quadrando la (1) otteniamo, infatti:

$$y^2 = a^2 \cdot \frac{a-x}{x},$$

cioè

$$xy^2 + a^2x = a^3, \qquad (2)$$

da cui, dopo semplici passaggi, ricaviamo la

[2] Vedere anche [4], testo del problema n. 2 assegnato agli Esami di Stato per il liceo scientifico di ordinamento, A.S. 2012/'13.

$$x = \frac{a^3}{a^2 + y^2} \qquad (3)$$

che rappresenta una curva algebrica del terzo ordine il cui grafico è disegnato in fig. 5 (ed è simmetrico di quello riportato in fig. 4*b* rispetto alla retta $y = x$).

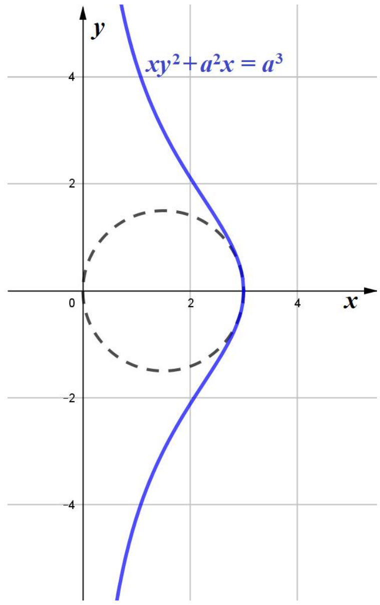
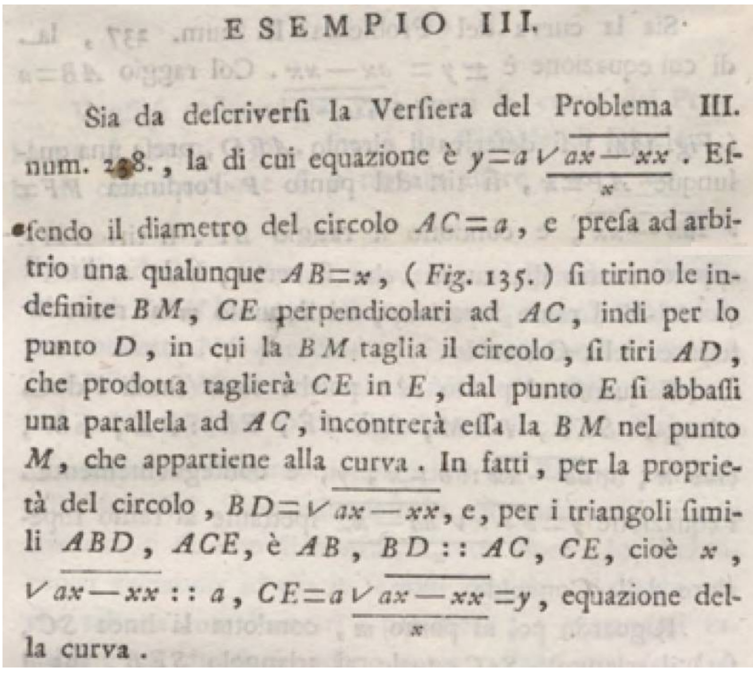


Fig. 5 – La versiera di Agnesi

LA SECONDA COMPARSA DELLA VERSIERA NELLE ISTITUZIONI ANALITICHE

La versiera compare una seconda volta nelle Istituzioni Analitiche, sempre nel capitolo V, più precisamente nell'Esempio III di pag. 392/393, in cui l'autrice descrive la procedura per disegnarla.



ESEMPIO III.

Sia da descriversi la Versiera del Problema III. num. 238. , la di cui equazione è $y=a\sqrt{\frac{ax-xx}{x}}$. Essendo il diametro del circolo $AC=a$, e presa ad arbitrio una qualunque $AB=x$, (*Fig.* 135.) si tirino le indefinite BM , CE perpendicolari ad AC , indi per lo punto D , in cui la BM taglia il circolo , si tiri AD , che prodotta taglierà CE in E , dal punto E si abbassi una parallela ad AC , incontrerà essa la BM nel punto M , che appartiene alla curva . In fatti , per la proprietà del circolo , $BD=\sqrt{ax-xx}$, e , per i triangoli simili ABD , ACE , è AB , BD : : AC , CE , cioè x , $\sqrt{ax-xx}$: : a , $CE=a\sqrt{\frac{ax-xx}{x}}=y$, equazione della curva .

Fig. 6 – La descrizione della costruzione della versiera di Agnesi

Ancora una volta, trascriviamo in termini moderni il testo dell'Esempio III, a beneficio del lettore.

> *"Sia da descriversi la Versiera del Problema* III. *num.* 238*, la cui equazione è* $y = \frac{a\sqrt{ax - x^2}}{x}$*. Essendo il diametro del circolo* $AC = a$*, e presa ad arbitrio una qualunque* $AB = x$*, (Fig. 135) si tirino le indefinite BM, CE perpendicolari ad AC, indi per lo punto D, in cui la BM taglia il circolo, si tiri AD, che prodotta taglierà CE in E, dal punto E si abbassi una parallela ad AC, incontrerà essa la BM nel punto M che appartiene alla curva. In fatti, per la proprietà del circolo,* $BD = \sqrt{ax - x^2}$*, e, per i triangoli simili ABD, ACE, è* $AB : BD = AC : CE$*, cioè* $x : \sqrt{ax - x^2} = a : CE = a\frac{\sqrt{ax - x^2}}{x} = y$*, equazione della curva."*

Come si può notare, la versiera viene costruita "per passi", a partire dalla circonferenza di diametro AC (fig. 7):

1. si fissa arbitrariamente un punto B sul diametro AB;
2. si tracciano le rette BM e CE, perpendicolari al diametro;
3. si traccia la semiretta di origine A passante per il punto comune D tra la retta BM e la circonferenza;
4. si traccia la retta perpendicolare a CE, passante per il punto di intersezione E tra AD e la retta CE;
5. si costruisce il luogo del punto M, intersezione tra la retta CM e la retta BD, al variare di BD sul diametro.

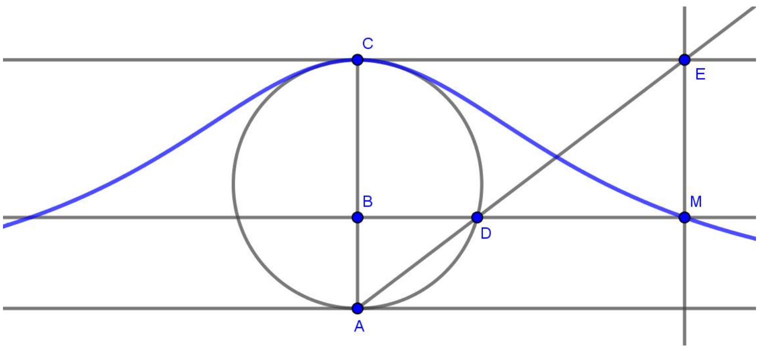


Fig. 7 – La costruzione della versiera di Agnesi

Come affermato dall'Agnesi, i triangoli rettangoli ABD ed ACE sono simili; hanno, infatti, in comune l'angolo acuto $\widehat{A}$. La proporzione citata nell'Esempio III deriva direttamente dalla similitudine dei triangoli.

Conclusioni

In queste note abbiamo presentato gli unici riferimenti alla versiera presenti nelle Istituzioni Analitiche. Se pensiamo al fatto che l'opera è edita in due tomi, nei quali si traccia un'ampia panoramica delle conoscenze di geometria analitica oltre che di calcolo integro-differenziale dell'epoca, sembra curioso che l'Agnesi sia ricordata dai più solo per lo studio di questa curva, peraltro già affrontata da Fermat prima di lei.

Non va dimenticato, però, che l'opera ebbe una grande eco internazionale, al punto che Carlo Goldoni fa dire alla cameriera di Madama Marianna, ne "Il medico olandese":

> *«Voi vi meravigliate, che la padrona mia*
> *Inclini al dolce studio della Geometria?*
> *Stupitevi piuttosto, che con saper profondo*
> *Prodotto abbia una donna un sì gran libro al mondo.*
> *È italiana l'autrice, signor, non è olandese,*
> *Donna illustre, sapiente, che onora il suo paese;*
> *Ma se trovansi altrove scarsi i seguaci suoi,*
> *Ammirasi il gran libro, e studiasi da noi»*

Ringraziamenti: L'autore ringrazia sentitamente la professoressa Norando Tullia, del Politecnico di Milano, per avergli fornito le indicazioni utili a proseguire il suo studio sull'opera dell'Agnesi.

Bibliografia

[1] L. Meneghini. *La scienza e le donne*, in "L'altra metà del cielo. Il femminile nella storia del pensiero.", a cura di Y. D'Autilia, M. Di Cintio, M. Lucivero, pp. 95 – 122, Aracne Ed., febbraio 2016.
[2] L. Meneghini, "Maria Gaetana Agnesi", in «Euclide. Giornale di matematica per i giovani», n. 37S (2017) – http://www.euclide-scuola.org/
[3] https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/2345439
[4] http://www.matematica.it/tomasi/matls/2013/ord/ord2013.pdf