

# FEDERIGO ENRIQUES E LA MATEMATICA ELEMENTARE

*Modesto Dedò*

Ho incominciato a frequentare Federigo Enriques nel gennaio del 1940; le leggi razziali gli vietavano l'accesso agli istituti universitari e lo incontravo a casa sua, in via Sardegna; di lì ci si portava spesso a passeggiare per i viali di villa Borghese.

Mi aveva indirizzato a lui il mio Maestro, Oscar Chisini, che dell'Enriques era stato l'allievo prediletto: ebbi una accoglienza particolarmente affettuosa e ho sempre pensato di paragonare i nostri rapporti a quelli tra nonno e nipotino — Chisini «figlio» di Enriques, io «figlio» di Chisini. Aggiungo che il nipotino era piuttosto petulante e faceva continue domande su svariati argomenti. Mi sono sempre rammaricato di non aver tenuto un diario di quegli incontri; forse avrei potuto dare un contributo anche alle discussioni che qui si sono tenute nei giorni precedenti. Voglio solo citare un ricordo che potrebbe essere significativo per giudicare l'evoluzione del suo pensiero. Gli avevo manifestato il mio desiderio di rileggere i *Problemi della scienza* e ne sono stato sconsigliato.

Richiamato alle armi nel giugno del 1940, non dovevo più rivederlo. La sua morte mi rattristò profondamente, anche perché i giornali, troppo occupati nella commemorazione di certi calciatori periti in un incidente aereo, dedicarono ben poche righe al suo necrologio.

La mia relazione sarà ispirata a questi ricordi diretti, ma dovrà poggiarsi su qualche brano dei suoi scritti: mi scuso subito del fatto che la lettura delle citazioni risulterà un pò tediosa per gli ascoltatori.

Ritengo significativo incominciare con la lettura di ciò che egli aveva scritto per commemorare la morte di Ettore Baroni, nella terza edizione dei *Collectanea*, dove appunto il Baroni aveva curato la prima stesura dell'Articolo XIII:

“Egli consacrò il suo amore, la sua intelligenza, la sua vita a quell'opera di Maestro, che gli estranei stimano più o meno alta a seconda del grado dell'insegnamento e dell'età dei discepoli, ma che — vista di vicino — è sempre altissima: quando sia veramente creazione di spiriti e gioia che, colmando i sacrifici quotidiani, consuma ed attizza insieme la fiamma dello spirito creatore” (1).

Queste parole, la cui enfasi non è retorica, mettono già in chiara luce la personalità di Enriques, la sua figura di uomo e di maestro, Maestro incitatore di ricerche, anche elementari, ispiratore di entusiasmi nei suoi allievi e in coloro che lo avvicinavano; Maestro particolarmente impegnato e fiero in questa sua opera.

Ricordando la sua figura di maestro è doveroso enfatizzare l'ascendente, da personalità fascinatrice, che ha avuto sui suoi numerosi scolari, italiani e stranieri. Non sono certamente in grado di fornire un elenco completo di questi allievi: mi è capitato infatti più di una volta, parlando di Enriques, di sentirmi redarguire con la frase «ma anch'io sono stato assistente di Enriques!», frase affettuosa che testimoniava ammirazione e commosso ricordo. Ricorderò quindi soltanto: O. Chisini, L. Campedelli, F. Conforto, G. Pompilj, A. Franchetta, A. Frajese, E. Carruccio. Ma anche G. Ricci, S. Faedo, G. Dantoni. Tra gli stranieri ricordo O. Zariski, S. Lefschetz, P. Du Val, L. Godeaux, P. Burniat, P. Libois, J. Rey Pastor.

Ma voglio anche sottolineare qui il suo costante successo nell'impegnare la collaborazione alle sue attività anche degli scienziati più qualificati. Ricordo la compiacenza con cui

raccontava di essere riuscito ad ottenere la collaborazione di P. Painlevé, che — aggiungeva con una punta di civetteria — era vicepresidente della Repubblica Francese.

Il pensiero di Enriques sulle matematiche elementari e sul loro insegnamento è espresso e si sviluppa in tutti i suoi scritti, anche in quelli dedicati alla ricerca avanzata, anche in quelli dedicati alla filosofia o alla storia della scienza. Risulta magistralmente espresso nella prefazione alla prima edizione dei *Collectanea*, pubblicata con il titolo *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, Bologna, 1900.

Leggiamo infatti:

L'opera geometrica dei Greci, a noi tramandata col nome di Euclide, è in sè così bella ed armoniosa che, dopo venti secoli, non sapremmo ad essa sostituire, nella scuola secondaria, qualche altro insegnamento di Geometria meglio rispondente alle esigenze della coltura e dell'educazione intellettuale. A noi infatti non sembra che sieno da accogliere, senza il conforto di un esperimento favorevole, le proposte tendenti a cambiare gli ordinamenti dei primi studii geometrici, informandoli a quei principii sintetici che dominano ormai gli sviluppi più elevati della nostra scienza.

Lo spirito analitico euclideo crediamo più efficace strumento educativo delle intelligenze, più conforme al senso della realtà geometrica, fino a che un esercizio opportuno abbia reso le menti capaci di scernere nei concetti astratti l'immagine di una realtà più generale. E quando pur volessimo pensare alla preparazione dei futuri matematici (mentre è ben diverso lo scopo della scuola secondaria), non potremmo dimenticare che le prime conoscenze geometriche debbono essere il comune fondamento di tutte le forme della coltura matematica, e schiudere l'intelletto non soltanto alla Geometria, ma all'Analisi e alla Fisica teorica, più legate alla concezione euclidea delle figure particolari.

Crediamo tuttavia che l'insegnamento geometrico pur restando, nei suoi caratteri essenziali, conforme all'opera di Euclide, possa avvantaggiarsi dei progressi portati, anche nel campo degli elementi, da una critica più matura e dagli sviluppi recenti delle alte Matematiche.

Crediamo soprattutto che di tali progressi debbano possedere una cognizione assai larga gli insegnanti cui la scuola secondaria è affidata, affinchè l'opera loro possa ispirarsi a più larghe vedute» (2).

Al momento di riportare queste affermazioni, ho voluto confrontarle con quelle espresse da J. Dieudonné al Congresso di Royaumont (1961) ed ho constatato, senza sorpresa, che collimano quasi letteralmente. Il torto di Dieudonné è stato quello di lanciare uno slogan (*Abbasso Euclide!*) sul quale, leggendo la sua relazione, non si può non essere d'accordo; ma di questo slogan si sono impossessati gli apprendisti stregoni danneggiando notevolmente l'insegnamento secondario. E questi danni sono stati riconosciuti — sia pure sedici anni dopo — dagli stessi bourbakisti (H. Cartan, J. Dieudonné, J. Leray, A. Lichnerowicz) <sup>(3)</sup>.

Alle convinzioni prima riportate l'Enriques tenne fede per tutta la sua vita: le ritroviamo infatti riaffermate più di quaranta anni dopo nell'ultimo suo articolo (1942) scritto per il *Periodico di Matematiche*: le sciagurate vicende razziali gli avevano impedito di firmarlo con il proprio nome, così che figura «Adriano Giovannini — *L'errore in Matematica*».

L'articolo inizia così:

“L'autore di questo articolo non si presenta con un nome che gli dia autorità di giudicare su cose matematiche; tuttavia l'amore che porta a questi studi nel loro aspetto storico, e le osservazioni che ha avuto luogo di fare sulla psicologia dei matematici, trovandosi con alcuni di essi in rapporti d'intima convivenza, gli consentiranno forse di esporre qualche riflessione, non del tutto oziosa, sul grande problema filosofico dell'errore, nella scienza e nella ricerca matematica”.

Dopo interessantissime osservazioni ed esempi

“che tendono a farci riconoscere in generale il significato dell'errore come tentativo e passo verso la scoperta della verità”, <sup>(4)</sup>

così conclude:

Sicché pare che, in generale, l'errore non infirmi tanto l'intuizione, come rappresentazione visiva del particolare, quanto l'estensione sua a concetti astratti. In qualche modo si può dire che esso non appartiene né alla facoltà logica né all'intuitiva, ma si introduce nel

momento delicato del loro raccordo. In concreto non ci sono una facoltà intuitiva e una facoltà logica distinte, ma l'una e l'altra si fondono nell'unità dialettica dello spirito umano, ad un tempo come solidali ed opposte. Invero l'astrarre (che rende possibile di estendere l'intuizione a classi più generali di oggetti) è insieme un atto intuitivo e logico ed ha perciò due significati o momenti strettamente connessi che non debbono confondersi in un processo mentale semi-oscuro.

Così dunque l'analisi del problema dell'errore viene a convalidare le norme che abbiamo tratto come ammaestramento dell'esperienza del lavoro dei matematici nella storia. Se e finché, la Matematica progredisca nel suo cammino millenario, senza isterilirsi nell'esercizio di pedanti senza fantasia, queste norme conserveranno il loro valore, e, di fronte (in opposizione solidale) alle esigenze di una logica sempre più raffinata, si affermeranno ancora i diritti dell'intuizione, che è l'attività creativa della scienza" (5).

Ecco ora una rapida rassegna delle più importanti attività dell'Enriques più strettamente collegate al nostro tema.

I *Collectanea (Questioni riguardanti le Matematiche elementari)*, raccolte e coordinate da Federigo Enriques).

Questo libro, apparso nel 1900, ebbe presto un grosso successo: nel 1907, fu pubblicata la edizione tedesca; rispettivamente nel 1912 e nel 1924 furono pubblicate la seconda e la terza edizione italiana.

Come si nota, Enriques si è dedicato a questa opera per più di trenta anni, apportandovi ampliamenti e rielaborazioni che hanno anche fatto oggetto di altre sue qualificate pubblicazioni scientifiche. Tra queste vanno almeno ricordati gli articoli *Prinzipien der Geometrie* e *Principes de la Géométrie*, scritti rispettivamente nel 1907 e nel 1911, per la grande enciclopedia tedesca e per la sua traduzione francese. L'ultima edizione si compone di ventisette articoli e consta di quattro grossi volumi.

A questa opera hanno collaborato scienziati di chiara fama internazionale: U. Amaldi, E. Bompiani, G. Castelnuovo, O. Chisini, A. Padoa, L. Tonelli, G. Vailati, G. Vitali. Però anche molti valenti professori dell'ordine secondario hanno aderito alle sollecitazioni di Enriques.

Gli articoli firmati da Enriques sono sei (però il suo pensiero — e spesso addirittura il suo stile — sono presenti in quasi tutti gli altri articoli):

- I *Sulla evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco: punto, linea, superficie.*
- VI *I numeri reali.*
- XII *Spazio e tempo davanti alla critica moderna.*
- XVII *Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari.*
- XXIII *Alcune osservazioni generali sui problemi geometrici.*
- XXVII *Massimi e Minimi nell'Analisi moderna (con la collaborazione di L. Tonelli.)*

Bastano questi titoli ad indicare la versatilità dell'autore: solo però una attenta lettura metterà in luce

- la limpidezza della trattazione,
- il fascino delle frequenti sintesi,
- l'approfondimento dei fondamenti,
- le geniali semplificazioni dei procedimenti.

Questa opera magistrale ha avuto una importanza fondamentale nella preparazione professionale di molti insegnanti italiani e stranieri. Ha anche avuto un riconoscimento ufficiale con la istituzione, nelle nostre università, di un apposito corso — detto di *Matematiche Complementari* — dedicato ai futuri insegnanti; l'Enriques fu appunto chiamato ad iniziarlo, all'Università di Roma, nel 1922.

E qui voglio dire che questa promessa non è stata mantenuta: prima il fascismo, poi le Facoltà, poi le commissioni giudicatrici dei concorsi a cattedra (e, da quanto oggi si comincia a sapere, anche i recenti giudizi di idoneità a professore associato e a ricercatore) hanno consentito che le cattedre di *Matematiche Complementari* fossero occupate da persone che mai si erano interessate di questioni riguardanti le

Matematiche elementari e, talvolta, per esplicita dichiarazione, non avevano alcuna intenzione di interessarsene. La venerazione che io porto al Maestro mi fa aggiungere che ciò disonora la memoria di Federigo Enriques.

### *I libri di testo per la scuola secondaria*

Dal 1903, con la collaborazione di U. Amaldi, Enriques si dedica direttamente agli alunni delle varie scuole, pubblicando una serie di libri di testo che per cinquant'anni rimarranno esemplari. Siamo ancora in molti a collegare Enriques all'*Enriques-Amaldi*. Io stesso, da studente, pur avendo in adozione un altro libro, consultavo spesso l'*Enriques-Amaldi*: ricordo, in particolare, l'entusiasmo suscitato in me dagli esercizi destinati «agli allievi più provetti».

Questi libri — tradotti anche in varie lingue — hanno anche rappresentato un grosso successo editoriale ed è sorta una grande quantità di imitatori, in Italia e all'estero, per i quali sono ampiamente giustificate le invettive di Dieudonné prima ricordate.

E va anche detto che tra queste «brutte copie» dei testi di Enriques io colloco anche le edizioni dell'*Enriques-Amaldi* uscite in tempi recenti.

Una analisi dei libri di testo dell'Enriques ci porterebbe troppo lontano e, forse, non sarebbe di grande attualità; voglio solo insistere nell'elogio degli esercizi, e concludere riportando un giudizio di L. Campedelli, che non può non essere condiviso:

Sono «frutto di una rielaborazione profonda ed originale, che perviene a contemperare in perfetta misura le preoccupazioni scientifiche con le esigenze didattiche riuscendo ad un grado di chiarezza e di semplicità non facilmente superabile» (6).

### *La presidenza della Mathesis.*

Nel 1919 Enriques fu eletto presidente della *Mathesis*, sodalizio che era stato fondato nel 1895 da R. Bettazzi (con A. Lugli e F. Giudice) come *Associazione di studi fra gli insegnanti di Matematica delle scuole medie*.

La presidenza di Enriques rilancia la *Mathesis* a nuova vita: il prestigio e l'impegno di Enriques attirarono quasi tutti i matematici ad interessarsi ai problemi dell'insegnamento secondario; la massiccia partecipazione degli insegnanti medi ebbe una notevolissima incidenza sulla nostra scuola. Vanno anche menzionati i congressi della *Mathesis* organizzati da Enriques: Trieste (1919), Napoli (1921), Livorno (1923), Milano (1925), Firenze (1929), Bolzano (1930). In seno alla *Mathesis* si dibattono molte questioni: dai programmi di matematica, all'abbinamento della matematica alla fisica, agli orari di insegnamento; è però sempre presente l'istanza didattica (in particolare il contributo della logica, della intuizione, della psicologia per l'apprendimento della Matematica).

Nel 1932 — per esplicito desiderio di Enriques — si volle che alla presidenza della *Mathesis* (che dal 1923 era diventata *Società italiana di Scienze fisiche e matematiche*) si avvicendasse un fisico e fu eletto L. Puccianti.

La influenza di Enriques si esercitò anche nel periodo successivo e la ritroviamo, indirettamente, nel 1947 quando la Società fu riorganizzata, soprattutto ad opera di O. Chisini e dei suoi collaboratori. Dopo un risveglio promettente, la Società è andata declinando rispetto alle sue genuine tradizioni: fa veramente tristezza, nel ricordo di Enriques, dovere constatare che siamo ridotti allo sfascio. Certamente l'ambiente in cui oggi opera è molto più complesso e pertanto più difficile di quello di altri tempi, ma va anche denunciato il disinteresse di molti matematici per questo benemerito sodalizio.



## *Il Periodico di Matematiche*

Nel 1921 Enriques assunse la direzione del *Periodico di Matematiche* (che prima si era chiamato *Periodico di Matematica*). Ha allora inizio la Serie IV di questa gloriosa rivista, completamente rinnovata rispetto alle serie precedenti, tanto da far considerare Enriques come il fondatore del *Periodico di Matematiche*. Con i suoi scritti e con quelli di valentissimi collaboratori ha dato rinomanza internazionale alla rivista, che oltre a meriti strettamente scientifici, ha avuto soprattutto il merito di contribuire in modo fondamentale all'approfondimento della matematica elementare e all'aggiornamento culturale e professionale degli insegnanti.

Ricordo qui la frase che, per cinquant'anni, è stata stampata sulla contropagina della copertina:

"Il *Periodico* pubblica soprattutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico..".

Pensando a questo cinquantennio, possiamo tranquillamente affermare che fu ampiamente mantenuta la promessa che appare, nel primo fascicolo, nella presentazione programmatica. Tra l'altro vi si legge:

"... questa ripresa vuole significare rivalutazione delle idee scientifiche e didattiche che dominano l'insegnamento e la cultura dei nostri docenti, acciocché la scuola possa rinnovarsi in guisa da rispondere alle più vaste domande cui viene chiamata — in quest'ora — dalla pressione degli interessi sociali...

... conservatori e novatori converranno su questo punto: che, per essere preparati a discutere le diseguate riforme, o domani metterle in atto, occorre agli insegnanti essere informati degli indirizzi programmatici e metodici, teoricamente propugnati o realmente praticati in diversi ambienti stranieri; e che lo svolgimento di programmi che, per la materia o per lo spirito, differiscono da quelli intorno a cui si è esercitata fin qui la riflessione e l'opera didattica degli Italiani, implica pure il bisogno di approfondire, in più sensi, la scienza stessa che s'insegna, così da poterla dominare da nuovi e più alti punti di vista".

E più oltre:

“È tutto il campo delle matematiche elementari, già chiuso nelle linee di una rigida tradizione, che si vede aprirsi in corrispondenza ad una veduta più plastica dei problemi, toccando alle regioni più elevate del sapere; imperocché ogni distinzione fra gli elementi e le sommità delle matematiche scompare per chi riguardi codesti problemi nel loro sviluppo, cercando di comprenderne storicamente il nesso, e di spiegare come il superiore nasca e si svolga dall'inferiore.

Pertanto noi possiamo enunciare lo scopo che proponiamo a questa Rivista, dicendo che essa vuole essere l'organo di una cultura scientifica contemplante le materie che formano oggetto dell'insegnamento scolastico largamente inteso, in quel modo più alto che si addice a maestri”.

E, dopo alcune significative esemplificazioni, aggiunge:

“Da tali cenni vi è ormai manifesto, Colleghi, quale voglia continuare ad essere e divenire questo Periodico, che è cosa vostra. Ma non basta che lo riceviate e lo studiate con amore, importa anzi che gli rechiare la vita della vostra attiva collaborazione. Nell'opera di progresso, segnata dall'accennato programma, vi è posto per tutti: per i matematici più illustri e pei giovani forniti di solida preparazione scientifica, alcuni dei quali abbiamo già espressamente sollecitato a scrivere articoli su temi predisposti; ma anche per gli insegnanti più umili che vogliano offrire il contributo di una coscienziosa esperienza”.

E vorrei anche fare una citazione dal primo articolo che scrisse Enriques per la rivista. Questo articolo — *Insegnamento dinamico* — è spesso citato come uno dei più significativi:

“Ma forse il senso delle cose ch'io dico riesce duro a qualcuno dei lettori. Ci sono dunque diverse maniere di comprendere, sicché non sia dato mai di riposarsi in una cognizione perfetta? E come mai la scienza superiore (le matematiche trascendenti e sublimi che abbiamo studiato negli anni dell'università) dovrebbe ritornare — in qualche modo — a rischiarare la nostra mente, proprio quando stiamo cercando di farci piccoli coi piccoli, sui banchi della scuola?”

Rispondo: non vi è iato o scissura fra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell'albero dalla tenera pianticina. E come, riguardando l'albero, potremo scoprire nella pianticina nuovi aspetti o comprendere caratteri di cui ci era sfuggito il significato, così anche lo sviluppo dei problemi matematici recherà luce sulle dottrine elementari in cui essi approfondano le loro radici. Ad una condizione però: che di ogni dottrina si studi le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico..." (7)

Ovviamente non è possibile riferire qui sui vari temi trattati durante i venti anni in cui Enriques tenne la direzione del *Periodico*: voglio limitarmi a segnalare la rubrica delle *questioni*, anche per ricordare che molte di esse sono state proposte da eminenti matematici e che eminenti matematici hanno anche sacrificato il loro tempo per rispondere a qualche interessante *questione*.

Pensando a ciò che è diventato il *Periodico di Matematiche*, devo qui ripetere quanto ho già detto della *Mathesis*, con una aggravante: il prestigio di Enriques aveva fatto diffondere la rivista in molte biblioteche universitarie straniere, che, forse solo per inerzia, continuano a riceverlo; ciò getta discredito alla matematica italiana.

### *Altre attività*

Ricordo schematicamente qualche altra attività dell'Enriques, legata alle matematiche elementari.

— Come è stato qui più volte ricordato da altri, nel 1907 fu uno dei fondatori di *Scientia*: i problemi della matematica e del suo insegnamento sono spesso presenti negli articoli e nelle numerose recensioni che ha scritto per questa rivista.

— Negli anni venti fondò e presiedette, a Roma, l'*Istituto nazionale per la storia delle scienze*. Legata a questo istituto è la collezione intitolata *Per la storia e la filosofia delle mate-*

*matiche*, nella quale troviamo i quattro volumi su *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna* — opera notevolissima curata da Enriques con vari collaboratori — e scritti di Archimede, Galileo, Newton, Clairaut, Dedekind, Bombelli, ecc. Tra i collaboratori notiamo Ett. Bortolotti, G. Castelnuovo, U. Forti, M. Lombardini, E. Rufini, T. Zappaloni, O. Zariski.

A questo istituto si collega anche il libro, scritto con A. Frajese, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, libro che va qui ricordato sia perché esso è più particolarmente dedicato alla matematica, sia perché, pubblicato nel 1938, fu subito «messo all'indice» dal fascismo. La sua diffusione avvenne quindi soltanto in tempi recenti, quando la Zanichelli ne pubblicò una edizione anastatica (peraltro presto esaurita).

— Dal 1926 fu direttore della sezione *Matematica* della *Enciclopedia Treccani*. Preparò una trentina di voci lui stesso e seppe ottenere la collaborazione dei matematici più qualificati.

— Da ultimo bisogna aggiungere che anche in tutti gli altri scritti di Federigo Enriques troviamo testimonianze del suo vivo interesse per le matematiche elementari. A questo riguardo è significativa la prefazione al suo monumentale trattato (scritto con O. Chisini) *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Ed è significativo il fatto che volle pubblicare questa prefazione anche su *Scientia* (vol. 18, 1915). Peraltro proprio in questo trattato sono quasi sconcertanti le divagazioni che hanno il solo scopo di interessare il lettore ai problemi della Matematica elementare.

Occorrerebbe ora concludere con qualche confronto con la situazione attuale; ma i commenti risulterebbero violentemente polemici e, forse, — dettati dal mio affetto per Enriques — non del tutto oggettivi e quindi tralascio di esplicitarli. Del resto non ho fatto nessun tentativo di nascondere le mie opinioni.

## NOTE

1. *Questioni matematiche*, parte II, p. 1.
2. *Questioni*, pp. 1-2.
3. Cfr. *Documento dell'Accademia delle Scienze francese*, in «Notiziario dell'Unione Matematica Italiana», marzo 1978, p. 23.
4. La sottolineatura è mia: questa «definizione» di errore era spesso citata a disculpa degli errori che Chisini mi rimproverava.
5. A. GIOVANNINI, *L'errore in Matematica*, in «Periodico di Matematiche», 1942.
6. L. CAMPEDELLI, *Federigo Enriques nella storia, la didattica e la filosofia delle matematiche*, in «Periodico di Matematiche», 1947.
7. F. Enriques, *Insegnamento dinamico*, in «Periodico di Matematiche», 1921, IV, n. 1.

*Questo articolo è tratto dal volume*

## *FEDERIGO ENRIQUES APPROSSIMAZIONE E VERITA'*

*Lombardo Radice, Manara, Fabri,  
Badaloni, Rossi, Polizzi, Ciliberto,  
Faracovi, Giorgi, Dedò, Tomasi,  
Fabietti, Castellana*

*Belforte Editore Libraio - Livorno  
1982*