ISTITUTO ITALIANO STORICO PER IL MEDIOEVO

Concorso
La Matematica nel Medioevo
Premio Bruno Rizzi
IV edizione (2011 – 2012)

ELABORATO CON MENZIONE

LA MATEMATICA TRA ARCHITETTURA E NATURA

Alunni: Enrico Bortoletto; Davide Dolcetti; Michael Mozzon; Zanetti Filippo (Studenti della 3°E dell'istituto "M. Grigoletti" di Pordenone)

Referente: Prof.ssa Nadia Del Savio

Cinesi

"Se si seguono i numeri se ne può conoscere il principio, se li si percorre a ritroso, si può sapere come giungono ad una fine. I numeri e le cose non sono due entità separate e il principio e la fine non sono due punti separati tra loro. Se si conoscono i numeri si conoscono le cose e se si conosce il principio allora si conosce la fine. I numeri e le cose proseguono senza fine: come si puo' dire qual è il principio e qual è la fine?" - Cài Chén (1167 – 1230)

Storia

Il più antico reperto di interesse per la storia della matematica consiste in un guscio di tartaruga su cui sono incisi dei numeri che usano una specie di notazione decimale (centinaia decine ed unità). I matematici cinesi svilupparono una particolare predilezione per i quadrati magici. Questo interesse portò i cinesi a studiare i sistemi di equazioni lineari e a scoprire la cosiddetta Regola di Horner, per trovare soluzioni reali di un polinomio con metodo iterativo (ripetitivo).

Nello studio dei sistemi furono anche i primi a sviluppare concetti analoghi a quelli di matrice, senza istituire però il concetto di determinante. Già nel secolo IV, in Cina si studiavano le equivalenti delle nostre congruenze lineari per la risoluzione delle quali fu fondamentale la scoperta del Teorema cinese del resto. Nei successivi secoli la matematica cinese si sviluppò velocemente, superando quella europea del tempo.

Indiani

Storia

I primi studi matematici in India risalgono al 1000 a.C. circa. Agli indiani sono attribuite molte scoperte matematiche, tra cui anche il sistema posizionale decimale. Lo zero comparve la prima volta nel 876 a.C., due secoli dopo la comparsa delle altre nove cifre. In questo modo i principi di base della matematica erano acquisiti. Avevano già scoperto diverse proprietà delle equazioni di secondo grado, ammettevano l'esistenza di numeri irrazionali e negativi e consideravano lo zero come un altro numero qualsiasi, dimostrando così una notevole elasticità di pensiero. Questo genere di numeri e numerazione era infatti ampiamente utilizzato sia dai più importanti matematici dell'epoca (Āryabhata, Bhaskara e Brahmagupta) che dalla gente comune per fare calcoli di qualsiasi natura. Gli indiani infatti avevano definito in modo chiaro le 4 operazioni, le radici negative e le proprietà dello zero (a+0=a, a-0=a, a*0=0). Il brillante lavoro di questo popolo permise prima agli arabi e ai cinesi, poi agli europei, di adottare un comodo e funzionale sistema di calcolo.

Lo zero

In una tavoletta di pietra dell'876 a.C. è scritto che a Gwalior erano state piantate 270 hastas in grado di produrre 50 ghirlande ogni giorno per il tempio locale. Qui si nota chiaramente la presenza dello zero, che ha trovato molte difficoltà ad affermarsi nella matematica per molte ragioni. Siccome rappresenta il nulla, non era benaccetto vista l'inutilità di esprimere il niente in una matematica che si limitava ancora a semplici problemi puramente pratici. Questo problema venne superato con l'introduzione del numero come entità astratta. Ma dopo questo piccolo scoglio ci si ritrova di fronte alla descrizione del comportamento dello zero con le operazioni. Va tutto bene finché si parla di somma, sottrazione e moltiplicazione, ma non è lo stesso per la divisione. Sono infatti passati 500 anni dalla prima comparsa dello zero quando Bhaskara scrisse che un numero diverso da zero diviso per zero è pari a infinito. Il primo limite della storia?

Personaggi importanti

Āryabhata: (Assaka 476 – Patna 550) è il primo matematico indiano, scrive l'Āryabhatyia la versione indiana degli elementi di Euclide, trattando di aritmetica, trigonometria, astronomia e successioni. Inoltre approssima pi greco a 3,1416, calcola la circonferenza terrestre sbagliando di 100 km scarsi e ritiene che il moto degli astri sia dovuto alla rotazione della Terra attorno a un asse.

Brahmagupta: (598 - 668) dà un notevole contributo all'algebra formulando metodi per risolvere equazioni di secondo e terzo grado. Inoltre è il primo a determinare correttamente ogni operazione con lo zero esclusa la divisione. Dimostra anche che l’area dei quadrilateri circoscrivibili è pari a:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Bhaskara: (Bijjada Bida 1114 – 1185) è un produttivo matematico che fa rinascere la matematica indiana. Dimostra il Teorema di Pitagora, studia equazioni determinate e indeterminate di secondo terzo e quarto grado, equazioni diofantee, primi concetti di analisi e calcolo infinitesimale, calcolo differenziale, derivate, trigonometria, geometria piana e solida, combinatoria e molto altro ancora.

Narayana Pandit: (1340 ca – 1400 ca) è uno dei primi matematici della scuola di Kerala. Lui si occupa principalmente di problemi geometrici pratici, di semplificazioni dei calcoli, serie numeriche e quadrati magici.

Madhava di Sangamagrama: (Sangamagrama, 1350 – 1425) è il fondatore del terrore di molti universitari: l’analisi. È stato lui infatti a fare il passo da finito a infinito, offrendo nuovi orizzonti alla matematica. Si dedica a numerose serie infinite, descrizione di funzioni trascendenti e funzioni goniometriche. La serie di potenze che fornisce pi greco attribuita a Liebniz è in realtà un suo lavoro.

Persiani e arabi

L'Impero islamico, arrivato a dominare Nord Africa, Penisola iberica e parte dell'India, entrò in contatto con la matematica ellenistica ed indiana. Thābit ibn Qurra fondò una scuola di traduttori che tradusse in arabo le opere di Archimede, Euclide, Apollonio e molti testi indiani.

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850 Ca), un matematico persiano, scrisse importanti volumi sul sistema di numerazione indiano e sui metodi per risolvere equazioni. La parola "algoritmo" deriva dal suo nome e "Algebra" dal titolo della sua opera più importante, l'*al-Jabr wa al-muqābala*. In questa opera Al-Khwarizmi, oltre a introdurre il sistema decimale nel mondo arabo, trova metodi grafici e analitici per la risoluzione delle equazioni di secondo grado con soluzioni positive. Per questi motivi egli è considerato da molti il fondatore dell'algebra moderna.

Omar Khayyam (1048-1131) fu poeta e matematico. Scrisse le *Discussioni sulle difficoltà in Euclide* nel quale tentava di dimostrare il quinto postulato di Euclide riguardante le rette parallele (data una retta e un punto fuori di essa esiste solo una parallela alla retta data passante per quel punto) partendo dagli altri quattro; impresa che sarebbe poi diventata un "chiodo fisso" per i matematici. Diede una soluzione geometrica all'equazione di terzo grado ma non riuscì a risolverla per radicali.

Matematica europea

Subito dopo la caduta dell'impero romano gran parte della matematica greca andò persa. Molte biblioteche, come quella di Alessandria, andarono distrutte. Gli studiosi cristiani non diedero importanza alla matematica nei loro lavori, ma anzi in alcuni casi parlarono anche contro di essa.

Verso l'XI secolo la cultura occidentale entrò in contatto con quella araba, scientificamente molto superiore e iniziarono a circolare in Europa traduzioni dall'arabo di classici matematici. Verso quel periodo si situa anche la rinascita economica dell'Occidente che portò i commercianti a fare sempre più uso della matematica. Nei secoli successivi lo sviluppo della matematica accelerò.

Nicola Oresme anticipò anche i concetti di potenza irrazionale e grafico di una funzione: fu infatti il primo a avere l'idea di rappresentare il movimento con un grafico alla maniera moderna. Fu uno dei primi ad occuparsi di serie infinite, scoprendo i risultati di molte di esse e dimostrando la divergenza della serie armonica. Le opere del tedesco Regiomontano apportarono un enorme sviluppo alla trigonometria. Luca Pacioli riassunse tutta le conoscenze matematiche del tempo nella sua *Summa*. Gli artisti Leon Battista Alberti, Piero della Francesca e Albrecht Durer si interessarono invece di prospettiva e di geometria descrittiva.

Fibonacci

Leonardo Pisano detto Leonardo Fibonacci, perché filius del Bonacci (Pisa, settembre 1170 – Pisa, 1240) fu un matematico italiano. Con altri matematici del tempo, contribuì alla rinascita delle scienze esatte. Stanziatosi a Pisa studiò i procedimenti aritmetici che studiosi musulmani stavano diffondendo nelle varie regioni del mondo islamico. Viaggiò molto apprese tecniche matematiche sconosciute in Occidente e introdotte dagli indiani, giungendo fino a Costantinopoli seguendo vie commerciali e alternando il commercio con gli studi matematici. Ritornato in Italia, giunse alla corte dell'imperatore Federico II dove gli fu assegnato un vitalizio che gli permise di dedicarsi completamente ai suoi studi. A partire dal 1228 non si hanno più notizie del matematico, gli fu conferito il titolo di "Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo" e qualche anno dopo morì.

Liber Abaci

Il Liber Abaci è un testo medievale in latino di argomento matematico. Scritto nel 1202 dal pisano Leonardo Fibonacci, che lo riscrisse nel 1228 è ritenuto uno dei più importanti libri di matematica del Medioevo.

Comprende 15 capitoli:

- La conoscenza delle nove figure indiane, e come con esse si scrivano tutti numeri; quali numeri si possano tenere in mano e come, e l'introduzione all'abaco.

- La moltiplicazione degli interi.

- L'addizione degli stessi.

- La sottrazione dei numeri minori dai maggiori.

- La divisione dei numeri interi per numeri interi.

- La moltiplicazione degli interi con le frazioni, e delle frazioni senza interi.

- La somma, la sottrazione e la divisione degli interi con le frazioni e la riduzione delle parti di numeri in parti singole.

- L'acquisto e la vendita delle merci e simili.

- I baratti delle merci, l'acquisto di monete e simili.

- Le società fatte tra consoci.

- La fusione delle monete e regole correlative.

- La soluzione di questioni diverse, dette miscellanee.

- La regola delle doppia falsa posizione, e come con essa si risolvano pressoché tutte le questioni miscellanee.

- Il calcolo delle radici quadrate e cubiche per moltiplicazione e divisione o da estrazione e il trattato dei binomi recisi e delle loro radici.

- Le regole delle proporzioni geometriche; e le questioni di algebra e almucabala.

L'opera è suddivisa in quattro parti, la prima (che comprende i primi sette capitoli) è un'introduzione all'algebra e ai nuovi numeri, non fa riferimenti alla vita reale ma presenta esempi sempre più complessi così da abituare il lettore ai nuovi numeri. Seguono poi quattro capitoli che presentano molti possibili problemi nella mercatura, qui il lettore mette alla prova le nuove conoscenze e capisce la superiorità dell'algoritmo indiano rispetto a quello romano. Il dodicesimo capitolo è il più ampio, comprende problemi di matematica "divertente", uomini che trovano borse, conigli che si moltiplicano, divisione di cavalli, ecc. La terza parte (tredicesimo capitolo) tratta il metodo della doppia falsa posizione, uno dei metodi più potenti della matematica araba e medioevale. L'ultima parte tratta questioni più astratte, estrazione di radici, binomi recisi e proporzioni con la geometria. Vengono presentate le novem figure degli indiani e il signum 0, operazioni su interi e le frazioni, criteri di divisibilità, ricerca del massimo comun divisore e il minimo comune multiplo, regole di acquisto e di vendita, cambi monetari, regole del tre semplice e tre composto, ecc. La parte algebrica è dedicata interamente allo studio delle equazioni algebriche quadratiche secondo i metodi di al-Khwarizm, Abu Kamil, Al-Karaji. Definisce solo tre termini primitivi dell'algebra, il termine noto (numerus), la radice quadrata (radix o cosa), il quadrato (census), che gli serviranno poi per studiare le equazioni dei primi due gradi tratte dall'algebra di al-Khwarizm.

Incipit

Novem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1 Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.

Ci sono nove figure degli indiani: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con queste nove figure, e con il simbolo 0, che gli arabi chiamano zephiro, qualsiasi numero può essere scritto, come dimostreremo.

Problemi presenti nel Liber Abaci

Problema delle 7 vecchie

Sette vecchie donne andarono a Roma, ciascuna donna aveva sette muli,ciascun mulo portava sette sacchi, ciascun sacco conteneva sette forme di pane e con ciascuna forma di pane v'erano sette coltelli, ciascun coltello era infilato in sette guaine. Ma il problema che ispirò i futuri matematici era il seguente: Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno a partire da un'unica coppia se ogni mese ciascuna coppia dà alla luce una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese? Questo famoso problema dà origine alla serie di Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21 dove f(n)=f(n-1)+f(n-2) e che f(n-1)/f(n) tende alla sezione aurea.

Problema delle due torri

Due torri, una alta 30 passi e l'altra 40, sono distanti 50 passi; fra esse si trova una fontana verso la quale due uccelli, scendendo dalla sommità delle due torri, si dirigono con velocità uguale e vi pervengono nello stesso momento; quali sono le distanze orizzontali delle due torri dal centro della fontana?

Soluzione algebrica

Fibonacci scrive: Supponiamo che la fontana abbia dalla torre maggiore distanza 10; 10 per se stesso è 100; che aggiunto al quadrato della torre maggiore, cioè 1600, dà 1700; il quadrato della distanza rimanente (della fonte dalla torre minore) è 1600; che aggiunto al quadrato della torre minore, che è 900, dà 2500. Questa somma e la precedente differiscono di 800. Bisogna allontanare la fonte dalla torre maggiore.

Per esempio di 5, cioè in tutto di 15, il cui quadrato è 225, che sommato al quadrato della torre maggiore è 1825. Ora si ha 35 per se stesso che è 1225, che aggiunto al quadrato della torre minore è 2125. Le due distanze differiscono ora di 300. Prima era di 800. Quindi avendo aggiunto 5 passi abbiamo diminuito la differenza di 500. Se moltiplichiamo 5 per 300 e dividiamo per 500, otteniamo 3, che aggiunto a 15 passi dà 18. E tanto dista la fonte della torre maggiore.

Soluzione geometrica:

Fibonacci scrive: 40 e 30 sono 70, la cui metà è 35, cioè la linea EF. Le linee DF e BF sono lunghe 25; la differenza tra 35 e la torre minore è 5 che moltiplicato per 35 dà 175, che diviso per la metà della lunghezza fra le due torri, cioè 25, dà 7 (per la linea FZ). Quindi DZ vale 32 e rimane 18 per la linea ZB.

<u>Problema del leone nel pozzo</u>

Un certo leone si trova in un certo pozzo, profondo 50 palmi; sale ogni giorno di 1/7 di palmo e scende di 1/9. Si chiede in quanti giorni uscirà dal pozzo.

<u>Problema del cane e della volpe</u>

Allo stesso modo ci si interroga sulla volpe che è davanti al cane 50 passi, e nove passi della volpe che fugge equivalgono a sei passi del case che la segue. Si chiede in quanto tempo la raggiunge.

<u>Problema dei due serpenti</u>

Un serpente si trova ai piedi di una torre che è alta 100 palmi e sale ogni giorno di 1/3 di un palmo e scende di 1/4. Ma sulla sommità della torre c'è un altro serpente che scende ogni giorno di 1/5 di palmo e sale di 1/6. Si domanda in quanti giorni si incontrano sulla torre.

Successione di Fibonacci

Cercando di descrivere l'aumento del numero di conigli Fibonacci si imbatte in una particolare successione. Essa è una successione di numeri naturali definibile assegnando i valori dei primi due termini, F_0:=0 ed F_1:=1, e ponendo che $F_n := F_{n-1}+F_{n-2}$ con n>1. Cioè è una successione di numeri in cui un numero è il risultato della somma dei due precedenti. Ma perché questa successione è così interessante? Di ragioni ce ne sono parecchie, ed esse vanno da pure curiosità matematiche, a importanti riscontri pratici.

Curiosità matematiche

Le più importanti proprietà di questa serie sono:

- Il quadrato di qualsiasi numero della serie è uguale al numero che lo precede, per il numero che lo segue, più o meno 1. Il più o meno si alterna lungo la sequenza
- Se dividiamo qualsiasi numero per il secondo che lo precede nella sequenza, otterremo sempre due come risultato, e come resto il numero immediatamente precedente il divisore
- Il quadrato di un numero di Fibonacci meno il quadrato del secondo numero precedente è sempre un numero della successione
- Il massimo comun divisore di due numeri di Fibonacci è ancora un numero di Fibonacci

Se consideriamo ora il triangolo di Tartaglia possiamo notare che considerando le diagonali che da sinistra salgono verso destra nel triangolo di Tartaglia e sommando i numeri su queste diagonali, otteniamo i numeri di Fibonacci. Ciò è trascrivibile con un coefficiente binomiale:

$$Fib(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$$

Ogni numero di Fibonacci è inoltre un fattore di un numero infinito di numeri di Fibonacci successivi. Ciò è come dire che se Fib(k)=m allora Fib(n*k)=t con m|t

Altre proprietà

Charles Raine scoprì che se si considerano 4 numeri di Fibonacci di seguito F_k,F_{k+1},F_{k+2},F_{k+3} e consideriamo un triangolo rettangolo con cateti a, b e ipotenusa c, allora è: a=F_k * F_{k+3}, b=2*F_{k+1} * F_{k+2}, $c^2 = a^2 + b^2$. Se esaminiamo ad esempio la sequenza di Fibonacci e prendiamo solo ...3,5,8,13,... allora è a=3*13=39, b=2(5*8)=80, c=89

- Dati quattro numeri di Fibonacci consecutivi, il prodotto del primo col quarto è sempre pari al prodotto del secondo col terzo aumentato o diminuito di 1.
- Data la sequenza dei numeri di Fibonacci di posto dispari, se si costruisce la sequenza ottenuta sottraendo a due a due i numeri adiacenti della prima sequenza, si ottiene la sequenza dei numeri di Fibonacci di posto pari.

- L'identità di Cassini, scoperta nel 1680 da Jean-Dominique Cassini, afferma che per ogni intero n:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Numeri Fibonacci e legami con altri settori

In matematica i numeri di Fibonacci sono legati in qualche modo alla sezione aurea, alla sequenza di Farey, alle frazioni continue, alla zeta di Fibonacci, alla zeta di Riemann, ai gruppi di Lie, ai frattali. In Fisica sussiste il legame con la teoria delle stringhe. Molti altri legami sono evidenti con la biologia, la cristallografia, la musica, l'economia, l'arte, l'elettrotecnica, l'informatica. Questa grande presenza dei numeri di Fibonacci in quasi tutti i campi dello scibile umano ha però inevitabilmente portato a forzature.

<u>In chimica</u>

È stata recentemente trovata la successione di Fibonacci in una simmetria del Niobato di Cobalto ad uno stato quantistico critico, ovvero l’equivalente fisico dei frattali matematici che sono strettamente correlati alla serie. Questo perché i numeri di Fibonacci sono molto simili ai numeri di Lie, ovvero la base geometrica della fisica quantistica, per quanto riguarda i rapporti.

<u>In botanica</u>

Quasi tutti i fiori hanno tre o cinque o otto o tredici o ventuno o trentaquattro o cinquantacinque o ottantanove petali: i gigli ne hanno tre, i ranuncoli cinque, il delphinium spesso ne ha otto, la calendula tredici, l'astro ventuno, e le margherite di solito ne hanno trentaquattro o cinquantacinque o ottantanove. I numeri di Fibonacci sono anche in altri fiori come il girasole; difatti le piccole infiorescenze al centro di girasole sono disposte lungo due insiemi di spirali che girano rispettivamente in senso orario e antiorario.

<u>Nell'economia</u>

I numeri di Fibonacci sono utilizzati anche in economia nell'Analisi tecnica per le previsioni dell'andamento dei titoli in borsa, secondo la teoria delle onde di Elliott. Studiando i grafici storici dei titoli, Ralph Nelson Elliott sviluppò un metodo basato su tredici conformazioni grafiche dette onde, simili per forma ma non necessariamente per dimensione.

Equazione di secondo grado nella storia

Il metodo risolutivo di un'equazione di secondo grado era noto già ai Babilonesi. In Mesopotamia spesso le equazioni erano introdotte da problemi di tipo geometrico: ad esempio si chiede di trovare il lato di un quadrato sapendo che l'area meno un lato è uguale a 870; problema che corrisponde alla nostra equazione $x^2-x=870$ (ridotta in forma normale come $x^2-x-870=0$). I Babilonesi non accettavano però le soluzioni negative e nulle delle equazioni e, non accettando il fatto che i coefficienti potessero assumere valori sia positivi che negativi, non veniva riconosciuta nemmeno una forma normale unica ma erano distinti tre casi con coefficienti positivi:

- $x^2+bx=c$
- $x^2+c=bx$
- $x^2=bx+c$

Espresse nella forma moderna la prima ha il termine noto negativo, la seconda il coefficiente di secondo grado negativo, e la terza entrambi i coefficienti minori di zero. L'equazione con tutti i termini positivi non era nemmeno presa in considerazione in quanto ammette solo soluzioni negative.

Da notare il fatto che nella forma normale babilonese il coefficiente di secondo grado è unitario ma non arrivavano a tale forma, come successivamente gli arabi dividendo tutti i membri per a. Data, per esempio, l'equazione $ax^2+bx=c$, entrambi i membri venivano infatti moltiplicati per a: $a^2x^2+bax=ac$ e poi veniva effettuata la sostituzione $y=ax$ in modo da ottenere un'equazione in forma normale nella variabile y; $y^2+by=ac$. Questo procedimento testimonia l'elevato grado di flessibilità raggiunto dall'algebra babilonese.

La soluzione era data tramite formule che ricordano molto quelle odierne. per esempio la formula risolutiva per il primo caso era, espressa in notazione moderna, la seguente:

$$x=\sqrt{\frac{b}{2}^{2}+c}-\frac{b}{2}$$

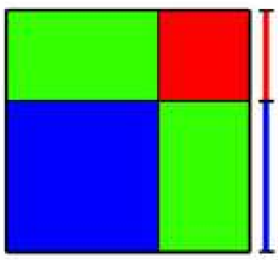
che può essere ridotta tramite semplici passaggi algebrici alla formula risolutiva moderna per questo caso

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4c}}{2}$$

Il primo in Grecia ad occuparsi della soluzione delle equazioni di secondo grado fu Diofanto. Tuttavia il suo lavoro non ebbe conseguenze significative poiché la matematica greca era in una fase di declino. Lo studio di queste equazioni venne continuato dagli arabi. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi nell'Al-Jabr si occupa della loro risoluzione. Distingue 5 tipi di equazione: i tre già noti ai babilonesi e in più l'equazione pura x^2=c e quella spuria x^2=bx. Anche qui si pone il coefficiente di secondo grado 1 ma ci si arriva tramite divisione. Le soluzioni negative non sono, nemmeno stavolta, accettate.

Il metodo usato da al-Khwarizmi è quello del completamento del quadrato. L'equazione $x^2+8x=33$, per esempio, sarebbe stata risolta aggiungendo 16 ad entrambi i termini in modo da "completare" il quadrato al primo membro: $x^2+8x+16=49$ ossia $(x+4)^2= 49$. Da questa si otteneva x+4=7 e si trovava così la soluzione positiva x=3.

Il matematico arabo proponeva anche una trasposizione grafica. Supponiamo di dover risolvere la stessa equazione $x^2+8x=33$. Il metodo usato dal persiano in questo caso avrebbe potuto essere simile al seguente: si tracci un quadrato che supponiamo avere lato x (quello blu in figura). Vi si affianchino due rettangoli di dimensioni x e 4 ossia b/2 (quelli verdi in figura). L'area della figura verde e blu è x^2+8x. Poniamo ora questa area 33. Aggiungiamo ora il quadratino rosso di lato 4, in modo da "completare" a il quadrato grande. L'area totale sarà quindi 33+16=49 e il lato del quadrato grande è dunque 7 poiché il alto grande è dato dal lato del quadrato blu (cioè x) sommato al lato del rettangolo verde (cioè 4); x= 7-4 =3.



Al-Khwaritzmi pone per la prima volta l'accento sul segno del discriminante, che deve essere positivo perché l'equazione sia risolubile.

Nell'epoca moderna, in Europa, si inizierà ad accettare le soluzioni negative e, successivamente, quelle complesse ed a porre l'equazione in un'unica forma normale.

Architettura

Andrea Palladio è stato un architetto, teorico dell'architettura e scenografo italiano del Rinascimento. Influenzato dall'architettura greco-romana, anzitutto da Vitruvio, è considerato una delle personalità più influenti nella storia dell'architettura occidentale. Fu l'architetto più importante della Repubblica di Venezia, nel cui territorio progettò numerose ville che lo resero famoso, oltre a chiese e palazzi, questi ultimi prevalentemente a Vicenza, dove si formò e visse. Il suo testo più importante si divide in quattro tomi:

- I libro: tratta la scelta dei materiali, le tecniche costruttive, le forme degli ordini architettonici in tutte le loro parti.

- II libro: riporta disegni di ville, palazzi e costruzioni realizzate da Palladio. Tali raffigurazione talvolta si discostano dall'edificio costruito in quanto risentono di un processo di idealizzazione e adeguamento al maturo linguaggio del maestro.

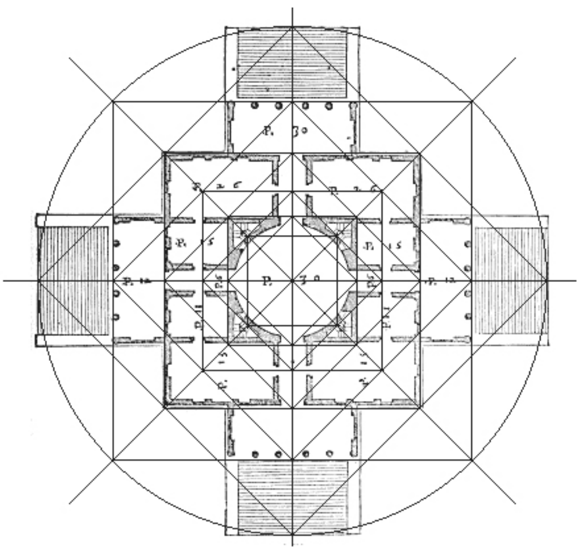
- III libro: descrive la maniera di costruire strade, ponti, piazze e basiliche.

- IV libro: contiene i rilievi di un gran numero di edifici antichi.

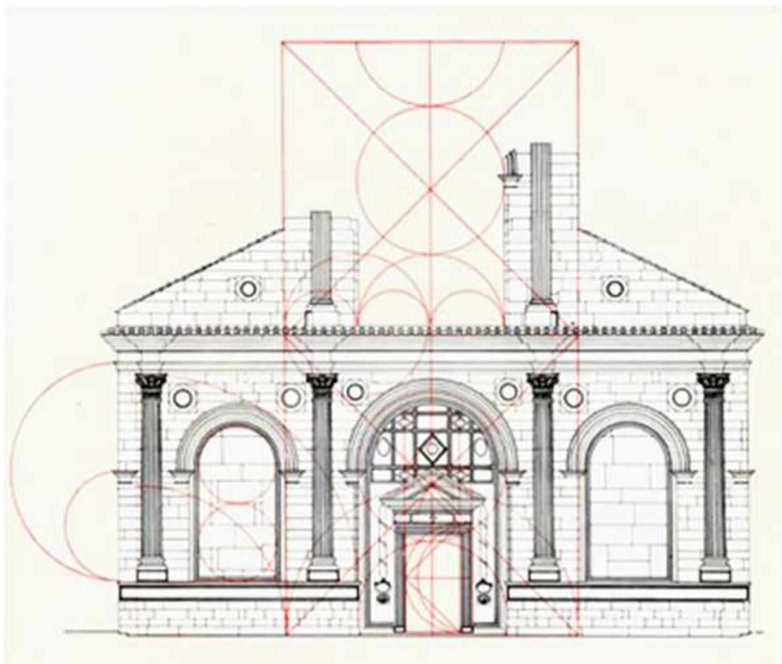
L'architettura del Palladio divenne presto famosa in tutta Europa, dando vita ad un fenomeno noto come palladianesimo.

Villa Almerico Capra

Villa progettata dall'architetto padovano Andrea Palladio per il prelato Almerico il quale desiderava una villa sofisticata, e fu esattamente questo che Palladio ideò per lui: una residenza suburbana con funzioni di rappresentanza, ma anche tranquillo rifugio di meditazione e studio. Una sorta di isolata "villa-tempio" a sulla cima del colle, questa sorta di originale "villa-tempio". L'architetto la incluse significativamente nell'elenco dei palazzi, e non tra le ville, nei suoi *Quattro libri dell'architettura* pubblicati a Venezia nel 1570.



La costruzione, iniziata nel 1566 circa, consisteva di un edificio quadrato, completamente simmetrico ed inscrivibile in un cerchio perfetto. Descrivere la villa come "rotonda" è tuttavia tecnicamente inesatto, dato che la pianta dell'edificio non è circolare ma rappresenta piuttosto l'intersezione di un quadrato con una croce greca. Ognuna delle quattro facciate era dotata di un avancorpo con una loggia che si poteva raggiungere salendo una gradinata; ciascuno dei quattro ingressi principali conduceva, attraverso un breve vestibolo o corridoio, alla sala centrale sormontata da una cupola. L'aula centrale e tutte le altre stanze erano proporzionate con precisione matematica in base alle regole proprie dell'architettura di Palladio, che egli elaborò nei suoi *Quattro libri*. Proprio la sala centrale rotonda è il centro nevralgico della composizione, alla quale Palladio impresse slancio centrifugo allargandola verso l'esterno, nei quattro pronai ionici e nelle scalinate. La villa risulta così un'architettura aperta, che guarda la città e la campagna.



Il progetto riflette gli ideali umanistici dell'architettura del Rinascimento. Per consentire ad ogni stanza un'analoga esposizione al sole, la pianta fu ruotata di 45 gradi rispetto ai punti cardinali. Ognuna delle quattro logge presentava un pronao con il frontone ornato di statue di divinità dell'antichità classica. Ciascuno dei frontoni era sorretto da sei colonne ioniche (*esastilo ionico*). Ogni loggia era fiancheggiata da una singola finestra. Tutte le stanze principali erano poste sul piano nobile.

Gli antichi architetti nei loro lavori cercavano di realizzare due concetti fondamentali:

- Simmetria (l'accordo delle misure) mediante il ripetersi di certi rapporti proporzionali privilegiati.
- Eurytmia (armonia) tra le lunghezze, le superfici e i volumi dell'edificio, sia nella sua interezza che nelle sue parti singole.

La tecnica utilizzata era quella dei tracciati regolatori, delle raffinate costruzioni geometriche. Si iniziava con una forma semplice, il quadrato, per individuare, con semplici proiezioni e ribaltamenti, tutte le linee prinicipali dell'edificio, nella pianta e negli alzati.

Gli architetti e gli artisti greci facevano grande uso dei rettangoli aurei. Molti, ad esempio, vedono questa applicazione nella struttura del Partenone di Atene. Artisti e matematici del rinascimento si interessarono molto alla matematica e specificatamente alla Sezione Aurea tra loro soprattutto:

Leon Battista Alberti (1404-1472)

Piero della Francesca (1416-1492)

Leonardo da Vinci (1452-1519)

Albrecht Durer (1471-1528)

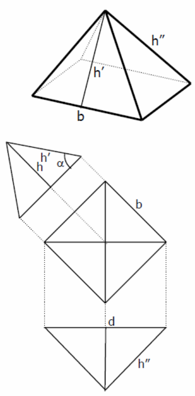
Andrea Palladio (1508-1580)

Leon Battista Alberti nei suoi trattati non cita mai il tipo di proporzione utilizzato, quasi volesse tenere il segreto dei suoi armoniosi equilibri. Indagini effettuate con diagrammi e rigorose riproduzioni hanno messo in evidenza che la sezione aurea è la regola che domina la connessione di tutte le parti di molte sue costruzioni.

La Grande Piramide di Cheope

-Era costituita in origine da quasi 2,5 milioni di blocchi di pietra.
-Il peso medio di ogni blocco è di circa 2,5 tonnellate.
-I suoi lati sono perfettamente allineati in direzione nord-sud e est ovest (l'errore ell'allineamento è di solo 3' e 6").
-Il piano di appoggio è perfettamente orizzontale: l'angolo sud-orientale è appena dodici millimetri più alto di quello nord-occidentale. Nella Grande Piramide le proporzioni tra le dimensioni non sono casuali

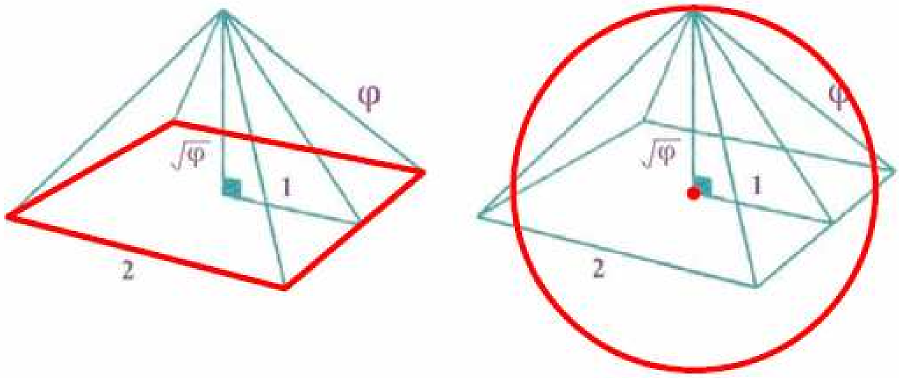
-Oltre che rispondere a canoni estetici, richiamano alcune tra le più importanti costanti della matematica



Partiamo dalle misure:
-il lato di base: b=232 m
-l’altezza della piramide: h=147 m
-l’altezza della faccia laterale: h’=187 m
-lo spigolo: h”=220 m.

Altra ipotesi:
La base b e l’altezza h sono tali che il perimetro di base è uguale alla circonferenza di raggio h. In questo modo l’altezza avrebbe valore:

$$4b = 2\pi h \Rightarrow h = 2\frac{b}{\pi} = \frac{4}{\pi}\frac{b}{2} = 1,273\ldots \cdot 116 = 147,7\ldots \text{ m}$$



$$\boxed{\frac{4}{\pi} \approx \sqrt{\varphi}}$$

Il Tempio della Concordia
La sua lunghezza è rigorosamente uguale a 4 volte il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio uguale alla larghezza della facciata.

La pianta
L’analisi mostra che il punto di partenza è il quadrato di lato pari al doppio della larghezza della facciata principale.
Si traccia una circonferenza inscritta nel quadrato.
La ▯ del suo raggio (e cioè la maggiore) è la distanza FA, uguale al lato del decagono inscritto nella circonferenza.
Il lato del decagono, portato quattro volte sul lato del quadrato, dà la lunghezza totale del tempio.

La facciata
La sua larghezza è compresa fra i lati paralleli di un esagono inscritto nel cerchio, a sua volta inscritto nel quadrato, il cui lato è A’C’, costruito sulla larghezza totale del tempio. Si costruisce un secondo quadrato, la cui distanza fra i lati sia compresa fra i lati dell’esagono. La metà della diagonale di questo secondo quadrato interno, sarà

uguale all’altezza del tempio. Tutte le suddivisioni relative al fregio, all’architrave e al timpano sono basate su ⍰.

L’altezza totale delle colonne, dalla linea di terra all’abaco (compreso il capitello), è determinata dalla metà del lato del secondo quadrato costruito fra i lati dell’esagono. Mentre la loro altezza dalla base, sopra i gradini, all’abaco (compreso il capitello) è data dalla sezione aurea minore del lato del secondo quadrato.

Il Partenone
Costruito tra il 447 e il 438 a.C. su progetto di Ictinio e Callicrate ed adornato dalle sculture di Fidia.
All’inizio del XX secolo il matematico americano Mark Barr ha introdotto, per indicare il rapporto aureo, l’uso della lettera greca ⍰, proprio dall’iniziale del grande scultore.
Le fronti, con otto colonne, misurano più di trenta metri; i lati, con diciassette, circa settanta; le colonne superano i dieci metri di altezza e ne hanno quasi due di diametro alla base.

La facciata
Dall’esame metrico-dimensionale si sono fatte interessanti scoperte in merito alle proporzioni: l’altezza complessiva è la sezione aurea della larghezza della parte frontale; quindi la facciata ha le
dimensioni di un rettangolo aureo.
Il rapporto aureo si ripete più volte tra diversi elementi del frontale, ad esempio, tra l’altezza complessiva e l’altezza cui si trova la trabeazione
I rettangoli aurei sull’architrave fra capitelli
Consecutivi

Il Pantheon
L’altezza del tempio è uguale al diametro, secondo la norma data da Vitruvio per gli ambienti delle terme simili; la volta è la più grande fra quelle dell’antichità.

La pianta
La distanza tra il cerchio inscritto e quello esterno è data dalla piccola ⍰ trovata sulla minore ⍰
dell’intero lato del quadrato
Tutto il resto è regolato secondo lo stesso rapporto

La Cattedrale di Notre Dame

In tutte le cattedrali gotiche sparse nel mondo le costruzioni sono sempre basate sul quadrato, sul cerchio e sul pentagono, coniugando la simmetria razionale con quella irrazionale.
E’ possibile dedurre che esiste una diretta connessione fra i sistemi greci e romani e quelli gotici; del resto, la presenza della Sectio Aurea ne è una indiscutibile prova.

La facciata
Segmenti aurei individuati sulla facciata di Notre Dame.
In pianta la cattedrale misura, nella sua larghezza interna, in m 36, mentre la sua lunghezza, anche interna, è di m 108, che corrisponde a tre quadrati di 36 m di lato.
La larghezza della facciata principale è di 42 metri. Se si prende come lato di un quadrato questa larghezza e si riporta sulla lunghezza del piano, abbiamo ancora tre quadrati e cioè 126 metri.
Un’analisi del taglio trasversale rivela che anch’esso si inscrive in un quadrato, e che le divisioni principali sono determinate dall’angolo di 63° e 26’ relativo al noto triangolo la cui base è uguale all’altezza, che si ritrova in tutta la costruzione.

Il Duomo di Milano
La pianta fu costruita su due quadrati e dalle loro suddivisioni; però, al momento di definire l’altezza dell’edificio, sopraggiunse il timore che l’altezza imposta dal quadrato e dal suo noto triangolo, la cui altezza è uguale alla base, fosse troppo grande.
La deliberazione del comitato fu per l’adozione di una altezza relativa al triangolo equilatero.