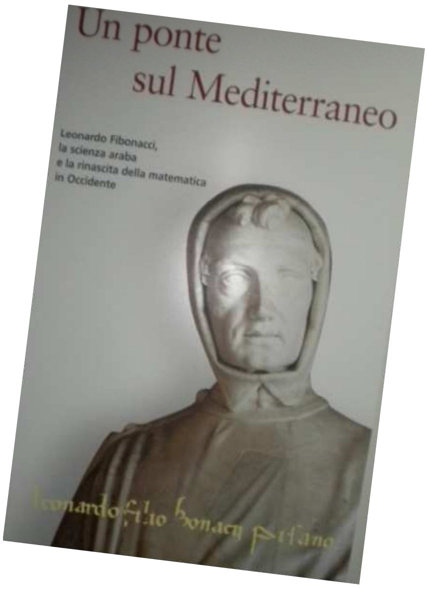
ISTITUTO ITALIANO STORICO
PER IL MEDIOEVO

Concorso
La Matematica nel Medioevo
Premio Bruno Rizzi
IV edizione (2011 – 2012)

Alle radici del calcolo automatico

Alunni: Studenti delle classi IV – V B del corso ITC Programmatori Mercurio - IIS “A. Guarasci” sez. ITC di Rogliano (Cs)

Referente: prof.ssa Rosa Marincola



Le classi partecipano dall’anno scolastico 2010/11 al Piano Lauree Scientifiche in collaborazione con l’UNICAL di Cosenza (Dip. di Matematica) dove hanno visitato la Mostra: UN PONTE SUL MEDITERRANEO: LEONARDO PISANO, LA SCIENZA ARABA E LA RINASCITA DELLA MATEMATICA IN OCCIDENTE proveniente da “Il Giardino di Archimede – un museo per la matematica” (Firenze), nel febbraio 2011. Le foto sono state scattate dagli studenti.

In questa occasione essi hanno avuto modo di acquisire delle preziose conoscenze di storia della matematica su tematiche già trattate in ambito curricolare e sono stati stimolati ad ampliare e approfondire la loro cultura in ambito matematico-informatico e storico-filosofico. Dal “riordino e sviluppo” dei vari contenuti ne è scaturito un percorso didattico che di seguito proponiamo.

Il lavoro è stato realizzato attingendo principalmente a risorse online.

<u>Prerequisiti:</u>

- Elementi di logica (calcolo proposizionale).
- Sistemi di numerazione posizionali e non (passaggio da un sistema di numerazione ad un altro).
- Problemi, algoritmi e programmi.
- La programmazione in Visual Basic
- La metodologia top down

<u>Con questo lavoro si sono perseguiti i seguenti obiettivi didattici:</u>

- Conoscere i primi strumenti del calculus: dall'abaco alle macchine con ruote dentate di Lullo
- Conoscere l'evoluzione storica dei sistemi di numerazione, degli algoritmi e della metodologia top-down
- Studiare la successione di Fibonacci e la sezione aurea
- Utilizzare in modo più consapevole gli strumenti di calcolo
- Conoscere a grandi linee la storia della logica: da quella aristotelica a quella medioevale
- Riprodurre una disputa logica sul modello delle *"obligationes"*


1 L'ESPANSIONE ARABA


3 LA FIORITURA MATEMATICA ARABA

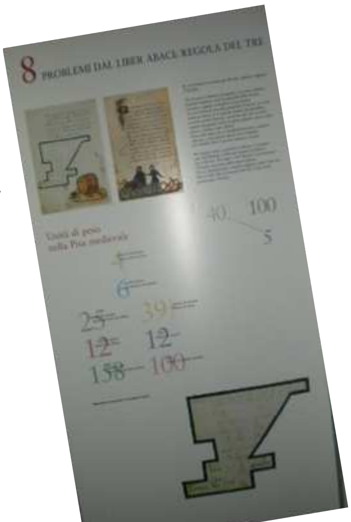

4 FONTI DEL LIBER ABACI:
AL-KHWĀRIZMĪ E ABŪ KĀMIL


LEONARDO FIBONACCI, PISANO


2 LA TRASMISSIONE DEL SAPERE SCIENTIFICO


14 UNA SCUOLA D'ABACO A PISA

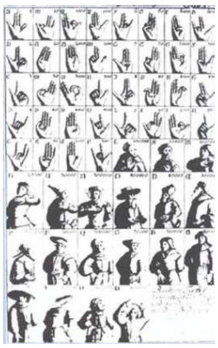

LA NOTAZIONE POSIZIONALE
σγ
CCIII
203


8 PROBLEMI DAL LIBER ABACI: REGOLA DEL TRE
Unità di peso nella Pisa medievale
40
100
5


10 CONCHIGLIE ED ALTRE CURIOSITÀ

<u>Una breve sintesi degli argomenti trattati:</u>

Il primo ausilio artificiale al calcolo è il calculus, in latino `pietruzza', `ciottolo'. Le pietruzze erano collocate sulla sabbia o su supporti trasportabili come una tavoletta, su linee successive rappresentanti i diversi ordini. `Digitale' deriva da dito. Le dita delle mani possono indicare i numeri in maniera anche molto sofisticata. Dal Summa de Arithmetica di Luca Pacioli, 1494:



La parola `abaco' deriva dal greco abaks, a sua volta preso dal semitico abaq, `sabbia' o `polvere'.

- abaco babilonese (2000 a.C.)
- abaco greco (VI sec. a.C., menzionato da Demostene)
- tavoli di Salamina (300 a.C.)
- scacchiera cinese (200)
- apices (gettoni di corno romani, 500)
- Quipu inca (1000)
- Swan pan (abaco cinese, 1200)
- Soroban (abaco giapponese, 1500)
- Schoty (abaco russo, 1600)

Dopo la caduta dell'Impero Romano d'Occidente la tradizione del sapere matematico greco fu conservata dagli arabi, a cui dobbiamo le cifre che usiamo oggi e il concetto di zero. Il matematico arabo Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (Mohamed figlio di Moses nativo di Khowarizm, oggi Khiva,Uzbekistan) scrive attorno all'825 un libro di compendio sul calcolo mediante costruzione e riduzione, intitolato `al-Kitàb al-mukhtasar hisab al-jabr wa'l-muqàbala'. L'opera di Al-Khwaritzmi descrive in modo formale e generale le regole per eseguire le operazioni sulle rappresentazioni decimali dei numeri interi, coniugando l'approccio babilonese (algebrico), di tipo pratico, e l'approccio euclideo (geometrico), di tipo formale.

I primi esempi di algoritmi . . . risalgono ai primordi della matematica. Sia la formula algebrica babilonese per la risoluzione dell'equazione di secondo grado, sia le costruzioni geometriche greche con riga e compasso, posseggono infatti quelle proprietà di calcolabilità e costruibilità presenti nel titolo del libro di Al Khwarizmi, e caratteristiche della nozione di algoritmo (Odifreddi 2003:239).

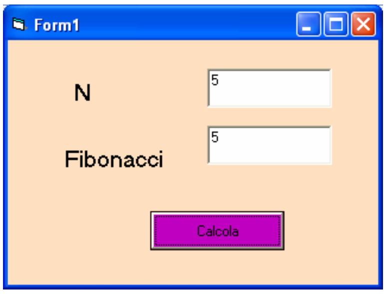
L'opera di Al-Khwaritzmi fu divulgata in occidente da Leonardo da Pisa, Filius Bonacci, figlio di Bonaccio, da cui `Fibonacci', nel Liber Abaci (1202), in cui introduce in Europa le cifre arabe, l'abaco, la partita doppia, e naturalmente i numeri di Fibonacci. Il nome Al-Khwaritzmi fu latinizzato in algorismus da cui la parola `algoritmo'. Dalla parola `al-jabr' del titolo del libro arabo deriva il nostro termine algebra. Entrambi i termini li dobbiamo a Fibonacci.

Abbiamo svolto delle ricerche su Fibonacci e la sua opera e ci siamo soffermati sul noto problema dei "conigli" (cfr.a [1] e [2]) ed è stato scritto il seguente programma ricorsivo in Visual Basic per il calcolo di un termine n-esimo di tale successione:

```
Public n As Long
Public Function Fibonacci(Num As Long) As Long
Dim fib As Long
If Num < 2 Then
fib = Num
Else
fib = Fibonacci(Num - 1) + Fibonacci(Num - 2)
End If
Fibonacci = fib
End Function

Private Sub Command1_Click()
n = Val(Text1.Text)
```

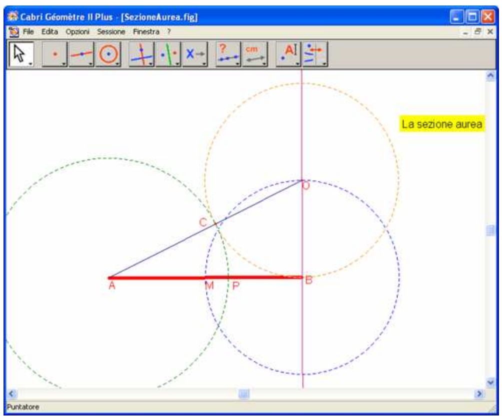
```
If n <= 0 Then
MsgBox "Inserisci un numero positivo", 64, "errore"
Else
Text2.Text = Fibonacci(n)
End If
End Sub
```



Abbiamo trattato anche l’espressione algebrica della successione di Fibonacci, attribuita al matematico francese Binet (1843), ma già nota ad Eulero, Bernoulli e De Moivre:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

per poi studiare la sezione aurea di un segmento che è stata costruita con un software di geometria dinamica.

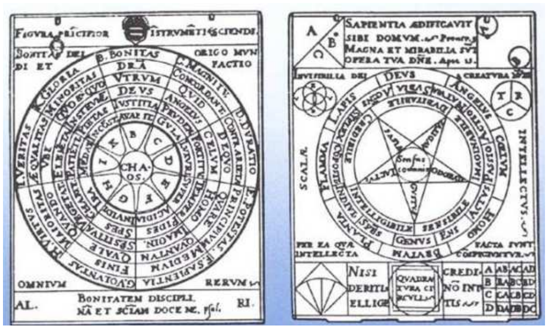


Tra le numerose risorse online che evidenziano la presenza della successione di fibonacci e della sezione aurea in natura, segnaliamo un video molto suggestivo e coinvolgente: Nature by Numbers (cfr.a [3]).

Parallelamente al bisogno di avere strumenti di calcolo come l'abaco, l'uomo ha sentito l'esigenza di rendere rigoroso il ragionamento umano, per eliminare possibili errori del ragionamento nei passaggi dalle premesse alle conclusioni. La logica nasce come ricerca di formalizzazione del linguaggio verbale umano per trovare il modo di rendere il procedimento alla base del ragionamento indipendente dagli esseri umani. La storia della logica s'intreccia con la matematica, la filosofia, l'informatica e la linguistica.

Aristotele (384-322 a.C.) trova come base il ragionamento per sillogismi. In termini moderni, i sillogismi sono predicati unari (monadici) che rappresentano il mondo, analogamente a una mappa con il territorio.

Il primo a credere che tutto il pensiero potesse essere ridotto a un algoritmo fu il frate catalano Ramon Lull (1235-1316), latinizzato in Lullus. Egli diede per primo un'alternativa al metodo del sillogismo aristotelico. Nel 1274 pubblica l'Ars Magna (Ars generalis sive Magna) in cui descrive un insieme di termini semplici, mediante la cui combinazione tutte le verità attingibili dall'intelletto umano erano derivabili. Scopo dell'opera era la conversione degli ebrei alle verità cristiane. I termini semplici valgono come primitive concettuali: girando le ruote si ottengono combinatoriamente tutte le proposizioni vere del sistema. Probabilmente Lullo attinse dal sapere cabalistico ebraico, accessibile nella Catalogna del tempo. Le ruote combinatorie di Lullo:



Abbiamo utilizzato molte fonti (tra cui cfr.a [4]). L'Ars lulliana è la prima grammatica del pensiero in cui la procedura è completamente meccanica. In altri termini il calcolatore (lo strumento di calcolo) è visto come macchina del pensiero.

I dettagli del progetto erano ovviamente insensati: ad esempio, i termini semplici risultavano essere nove predicati assoluti, nove predicati relativi, nove questioni, nove soggetti, nove virtù e nove vizi (Odifreddi 2003:240).

Nei secoli successivi l'Ars lulliana influenzerà diversi autori impegnati nella costruzione dei linguaggi artificiali, fra i quali lo stesso Leibniz (1646-1716).

Un problema strettamente legato alle discussioni sulla natura della proposizione e sui criteri per determinarne la verità o la falsità è quello dei paradossi semantici. Il più noto è il paradosso del mentitore, cioè una proposizione del tipo “Socrate dice il falso” pronunciata dallo stesso Socrate. Questo e altri paradossi analoghi basati su forme di auto-riferimento furono ampiamente discussi dai logici medievali in particolare dall’inizio del sec. XIII agli autori del Cinquecento e del Seicento che chiamarono queste proposizioni *“insolubilia”.*

Il nostro percorso si è terminato con una breve trattazione delle dispute logiche tardo-medievali: le *“obligationes”* (cfr.a [5]) in cui i due partecipanti assumevano l’uno il ruolo di *“opponens”* e l’altro di *“respondens”* (cfr.a [6]). Abbiamo anche tentato di riprodurre in classe il “gioco logico” delle obligationes per comprenderne le regole e mettere alla prova le capacità logiche degli studenti. L’enunciato “Ogni uomo corre” ha avuto il ruolo di positum durante la disputa (cfr.a [7]), ma seppur divertente, vi sono state delle difficoltà.

Sitografia essenziale

[1] http://www2.dm.unito.it/matematica/fibonacci.pdf

[2] http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/probegio/Mathemagica/FibonacciNim/FibonacciNim.htm

[3] http://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA&feature=related

[4] http://andreamartines.com/scritti/la-letteratura-combinatoria/macrocombinatoria/lars-magna-di-raimondo-lullo

[5] http://www3.unisi.it/ricerca/prog/fil-med-online/autori/htm/guglielmo_shyreswood.htm

[6] http://www3.unisi.it/ricerca/prog/fil-med-online/temi/htm/logica_modernorum.htm

[7] http://riviste.unimi.it/index.php/DoctorVirtualis/article/viewFile/145/256