

Federigo Enriques e la didattica della matematica

Parte 1 di 2

Paolo Bussotti

1. Inquadramento del problema

Federigo Enriques (1871-1946) fu uno dei più grandi matematici italiani; i suoi contributi alla geometria algebrica, soprattutto nel periodo 1890-1920, furono fondamentali e la sua figura divenne una delle più rispettate ed ammirate dai matematici europei. Egli fu un illustre rappresentante di quel clima cosmopolitico tipico di molti ambienti colti in Europa tra la fine dell'Ottocento e la prima guerra mondiale, insieme a matematici e fisici quali – solo per menzionarne alcuni molto noti - Mach, Poincaré, Hilbert, Painlevé¹. Quanto ai matematici italiani, Giuseppe Veronese, Vito Volterra, Tullio Levi-Civita, Giuseppe Peano, Guido Castelnuovo, Corrado Segre, Cesare Burali Forti, Beppo Levi, e altri ne potrebbero essere menzionati, fecero parte, insieme ad Enriques, di questo clima. Tutti questi personaggi, pur con vedute molto diverse della loro disciplina, tanto che non mancarono polemiche anche molto aspre tra di loro, avevano comunque l'idea che fosse loro dovere contribuire a rendere l'Italia un paese all'avanguardia sul piano scientifico e parte di un contesto europeo in cui la cultura scientifica potesse e dovesse svolgere un ruolo progressivo. Invero già i matematici della generazione precedente erano stati impegnati,

¹ A Enriques come figura europea è specificamente dedicato il volume collettaneo Bussotti, 2008.

in seguito all'unificazione dell'Italia, nell'organizzazione delle istituzioni culturali e scientifiche italiane. Si pensi a un personaggio quale Luigi Cremona, che dette contributi molto importanti alla geometria proiettiva, ma fu anche senatore, ministro e impegnato in studi di didattica della geometria². Questa quindi è la situazione socio-culturale che la generazione di Enriques ereditò ed il clima in cui lavorò il matematico livornese. Oltre a ciò, è necessario ricordare che Enriques fu appassionato di problemi scientifici ed epistemologici fin dagli anni della sua formazione universitaria e che le sue conoscenze nell'ambito della filosofia scientifica e della gnoseologia erano quelle di un esperto ricercatore³; le sue idee furono innovative e, anche in questo caso, si inserirono in un dibattito europeo a fianco di nomi come quelli di Ernst Mach ed Henry Poincaré. Enriques scrisse un testo fondamentale su quest'ordine di questioni, *Problemi della scienza* (1906). Siamo quindi in presenza di un intellettuale la cui formazione e i cui interessi vanno al di là dell'attività di ricerca matematica e convergono a creare un quadro complesso ed articolato. Ed è all'interno di questo quadro che può esser compresa la concezione che Enriques aveva della didattica della matematica e, di conseguenza, la sua attività in questo senso. Benché certe schematizzazioni siano in qualche modo sempre arbitrarie, l'impegno didattico di Enriques può essere ricondotto a quattro tipi di attività:

² Sull'attività didattica di Luigi Cremona, si veda Di Sieno, 2006; Brigaglia, 2006. I due lavori presentano anche una cospicua bibliografia sull'argomento.

³ Al rapporto che in Enriques sussiste tra matematica e filosofia è dedicata gran parte di Bussotti, 2006 e Nastasi, 2010. Per ulteriori indicazioni bibliografiche, rimandiamo ai due lavori citati.

- 1) impegni di tipo politico-istituzionale, cioè ruolo svolto da Enriques nell'università, nelle associazioni di insegnanti e nei rapporti col mondo politico per promuovere: a) estensione delle ore dedicate alle materie scientifiche nelle scuole superiori italiane; b) formazione degli insegnanti; c) strutturazione dei corsi scientifici nelle scuole e nelle università;
- 2) teoria della didattica: il contributo fondamentale di Enriques in questo settore fu l'articolo del 1921 *Insegnamento dinamico*⁴, un vero classico nel suo genere;
- 3) composizione di manuali scolastici ed universitari. Enriques scrisse due manuali che sono pietre miliari rispettivamente per l'insegnamento della geometria euclidea nelle scuole superiori e della geometria proiettiva all'università: si tratta degli *Elementi di geometria*, scritti nel 1903 con Ugo Amaldi e di *Lezioni di geometria proiettiva* (1898, seconda edizione con importanti aggiunte, 1903). Questi però non furono certo gli unici manuali scritti dal matematico livornese: in genere insieme ad Amaldi, compose molti libri per le scuole superiori, differenziando la materia trattata a seconda della scuola a cui il manuale era rivolto. Redasse inoltre il testo *Lezioni di geometria descrittiva* per l'università⁵;
- 4) cura di testi utilizzabili come supporti didattici. In questa categoria rientra un vero capolavoro che è *Questioni riguardanti le matematiche e-*

⁴ L'articolo fu pubblicato sul "Periodico di Matematiche", s. IV, I, 1921, pp. 6-16. Oggi è consultabile anche in Enriques, 2003, pp. 1-14 e in "Euclide. Giornale di matematica per i giovani", Documenti di Storia della Didattica.

⁵ L'elenco di tutte le opere di Enriques è presente (col materiale già ripartito secondo il piano editoriale) sul sito dell'Edizione Nazionale delle Opere di Federigo Enriques: enriques.mat.uniroma2.it/. Il sito riporta anche un buon elenco dei lavori scritti su Enriques.

lementari, in varie edizioni⁶. Enriques è il curatore dell'ingente opera ove compaiono, con la firma di diversi autori, articoli che affrontano problemi classici quali l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di quinto grado, le questioni legate alla costruibilità con riga e compasso, il problema dei massimi e dei minimi, i problemi isoperimetrici, ecc. Tutto questo materiale storico viene riproposto in una forma spendibile sul piano didattico, mostrando così la valenza educativa della storia della matematica e la sua importanza per apprendere i concetti fondanti della disciplina. Pur con un'accentuazione in parte diversa, nella stessa direzione delle *Questioni*, va *l'Euclide*, edizione commentata degli *Elementi*, curata da Enriques insieme ad altri collaboratori.

Anche altre opere hanno un grande valore didattico, quali per esempio il fondamentale Enriques-Chisini⁷, usabile come testo di geometria algebrica per gli studenti dei corsi più avanzati di matematica. Tuttavia in opere come questa gli aspetti di ricerca si affiancano a quelli didattici e, in qualche caso, sono preponderanti. Quindi la quadripartizione proposta sembra esauriente quanto all'impegno di Enriques nel settore didattico. Il suo lavoro, in questo come in altri campi, fu enorme.

Nel presente articolo, daremo alcune notizie relative all'attività istituzionale di Enriques, accenneremo ai fondamenti teorici del suo pensiero didattico e concentreremo l'attenzione su un aspetto specifico del punto 3): gli *Elementi di geometria* di Enriques-Amaldi.

⁶ Si veda in bibliografia Enriques, 1900; Enriques, 1912, Enriques, 1924-27.

⁷ Enriques-Chisini, 1915, 1918, 1924, 1934.

2. Gli impegni istituzionali di Enriques per la didattica

Enriques cominciò la propria attività didattica il 20 gennaio 1894 quando tenne la prima lezione per il corso di geometria proiettiva e descrittiva all'università di Bologna, quale professore incaricato, ruolo che ricoprì per due anni, dopo i quali, vinto il concorso con scadenza 25 settembre 1896, conseguì il posto di professore straordinario per tali materie. Entrò in ruolo il primo gennaio 1897⁸. A partire dagli anni iniziali del '900, Enriques cominciò a interagire attivamente col mondo della scuola: nel 1902 era stata fondata da Giuseppe Kirner e Gaetano Salvemini la Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media, FNISM, all'interno della quale il matematico livornese fu attivo fin dall'inizio: in occasione del primo congresso nazionale (Firenze, 1902) intervenne su problemi giuridici ed organizzativi e nel quinto congresso, quello di Bologna del 1906, presentò la relazione *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze*. Come ricorda Moretti, in attesa di una auspicabile riforma generale dell'università (come vedremo tra breve) "Enriques prospettava un'articolazione in due bienni del corso universitario della facoltà di Scienze, la distinzione tra laurea 'scientifica' e laurea 'pedagogica', il rafforzamento dei corsi di magistero [...] con apposito tirocinio didattico"⁹. Solo in questo modo sarebbe stato possibile

⁸ Per seguire le vicende che portarono Enriques a vincere il concorso per la cattedra di geometria proiettiva e descrittiva a Bologna, è possibile consultare Nastasi, 2010, pp. 72-84.

⁹ Moretti, 2003, pp. 15-91. Citazione p. 29. Per i rapporti tra Enriques e la FNISM, si veda anche Tomasi, 1982, pp. 223-245, in particolare pp. 236-239. Quanto al contributo dato dai geometri algebrici italiani alla formazione degli insegnanti, si può consultare il sintetico e chiaro contributo Giacardi, 2010.

formare un corpo docente degno di un paese all'avanguardia sul piano culturale-scientifico. Enriques ebbe incarichi ufficiali in seno alla FNISM. Furono anni intensi in cui il dibattito sulla scuola e sull'educazione fu assai vivace, gli anni della Commissione reale per la riforma della scuola secondaria, nominata nel 1905 dal ministro Leonida Bianchi, presieduta da Paolo Boselli. Responsabile per la riforma dei programmi di matematica fu Giovanni Vailati, personalità molto vicina ad Enriques. Il lavoro della Commissione, pur con discussioni e divergenze di opinioni sulle idee di Vailati relative all'insegnamento della matematica, portò negli anni 1909-1910 (dopo la prematura scomparsa di Vailati) a una proposta di riforma, che però non fu mai attuata¹⁰. Il dibattito sull'insegnamento della matematica era uno dei temi "all'ordine del giorno" nella comunità matematica internazionale, tanto che, in seguito a un'idea di Davide Eugene Smith, al congresso internazionale dei matematici svoltosi a Roma dal 6 all'11 aprile 1908, fu creata la CIEM, Commissione internazionale per l'insegnamento della matematica. Presidente fu Felix Klein, delegati per l'Italia furono Castelnuovo, Enriques e Vailati (Scorza, dopo la morte di Vailati nel maggio 1909). Severi ricorda che il cospicuo lavoro della Commissione dal 1908 al 1914 fu messo per iscritto in vari volumi, di contenuto molto analitico, non si fu però in grado di curare una visione sintetica d'insieme a causa della guerra. Soprattutto grazie all'opera di Castelnuovo, alcune delle idee elaborate dalla Commissione, furono comunque alla base

¹⁰ Il lettore in proposito può consultare, Giacardi, 2006, pp. 1-63, in particolare, pp. 26-38.

dell'insegnamento della matematica del Liceo Moderno, istituito nel 1911 dal Ministro Luigi Credaro¹¹.

In quegli anni, gli interessi di Enriques per la didattica universitaria non furono inferiori rispetto a quelli che egli ebbe per le scuole superiori: nel 1906 fu fondata la Società Filosofica Italiana, di cui Enriques fu presidente dal 1907 al 1912¹². Nel 1907 il matematico livornese fondò una delle più importanti riviste pubblicate in Italia "Rivista di scienza", dal 1910 "Scientia". Egli ne fu direttore dalla fondazione al 1915 e poi di nuovo dal 1930 al 1938. La rivista fu per eccellenza interdisciplinare, su di essa scrissero articoli scientifici ed epistemologici i massimi scienziati mondiali e può davvero essere vista come una delle massime espressioni della concezione enriquesiana: 1) connessione tra i vari rami del sapere; 2) importanza della storia della scienza in chiave educativa; 3) artificiosità della separazione tra storia della scienza e scienza; 4) rilevanza della filosofia scientifica. Sempre nel 1906 fu fondata l'Associazione nazionale fra i professori universitari. La partecipazione del matematico livornese alla vita della Associazione fu estremamente attiva, tanto che dal 1913 al 1915 ne fu presidente. Al 1907 e 1908 risalgono quattro importanti contributi di Enriques alla riforma della università italiana, due scritti nel 1907 e due nel 1908¹³. In estrema sintesi si trattava di questo, per le facoltà scientifiche e

¹¹ In proposito si veda Giacardi, 2006, pp. 38-47.

¹² Un testo pionieristico sui rapporti tra Enriques e i filosofi italiani, in particolare su quelli con Benedetto Croce, è Pompeo Faracovi, 1984. Per le questioni specifiche degli anni in cui Enriques fu presidente della Società Filosofica Italiana, si veda anche Nastasi, 2010, pp. 139-150, che riporta anche una buona bibliografia sull'argomento.

¹³ Si veda Enriques, 1907 (1), Enriques, 1907 (2), Enriques, 1908 (1) e Enriques 1908 (2).

letterarie: Enriques riteneva negativa la totale mancanza di libertà di scelta da parte dello studente, messo di fronte a programmi di studio obbligatori, negativa era anche l'eccessiva frammentazione disciplinare che impediva di cogliere i nessi comuni tra le varie discipline della matematica. Pericoloso l'eccesso di tecnicismo e di astrattismo che minacciava di oscurare l'autentico nucleo concettuale dei vari rami delle scienze. A tutto ciò aveva contribuito anche il metodo dei concorsi universitari, basati sulla artificiosa e, al contempo, rigida suddivisione nella varie cattedre e classi di concorso. Enriques vedeva come soluzione auspicabile la creazione di una facoltà filosofica, che non fosse certo la mera giustapposizione delle vecchie facoltà letterarie e scientifiche, ma che formasse le giovani generazioni, stabilendo un numero minimo obbligatorio di corsi e poi dando libertà allo studente di scegliere il proprio percorso. Il coesistere di libertà di scelta, di serio impegno e di una preparazione incentrata sulla comprensione dei concetti piuttosto che su tecniche specifiche sarebbe stata la necessaria propedeutica per un buon letterato, per un buon fisico e per un buon matematico. Scrive Enriques:

Stabilita un'unica laurea filosofica, che sancisce con un esame complessivo il coronamento di studii diversi, si può permettere allo studente di accedervi per una via qualsiasi, scegliendo egli stesso i corsi da frequentare. Sia fissato soltanto in generale un numero minimo di corsi, e consentito ad ogni singola Facoltà filosofica di giudicare la serietà del programma che lo studente si propone, ed in certi casi di prescrivere l'ordine in cui gli studii scelti dallo studente debbano essere percorsi.¹⁴

¹⁴ Moretti, 2003, p. 50. Gran parte dell'articolo di Moretti è una precisa disamina delle posizioni di Enriques sulla didattica e la struttura dell'università (in particolare pp. 30-63). Enriques entrò anche nel problema relativo al modo migliore di reclutare i docenti universitari, per questo argomento rimandiamo al più volte citato articolo di Moretti.

A fianco della facoltà filosofica avrebbero dovuto esistere lauree tecniche per le professioni: politecnici per ingegneri, per medici e le scuole normali di magistero per insegnanti. Anche in seguito alla legge del 1909 che stabiliva un aumento degli stipendi dei professori universitari, regolamentava le ore minime di lezione e l'età pensionabile (rispettivamente 50 lezioni annue e 75 anni), sanciva in maniera definitiva la differenza tra materie fondamentali e complementari e stabiliva una quota parte di professori scelti per nomina parlamentare, le discussioni sull'assetto dell'università furono accese nell'ambito della Associazione nazionale tra professori universitari¹⁵. L'intervento di Enriques in occasione della assemblea generale della Associazione tenuta a Roma nel gennaio 1911 fu estremamente critico: sul sistema dei concorsi che favoriva il particolarismo, sulla crisi della libera docenza, sulla struttura delle facoltà e sulla mancanza di autonomia delle università. La posizione di Enriques risultò però minoritaria e tra l'altro fu del tutto accantonata l'idea di istituire la facoltà filosofica¹⁶.

Gli impegni didattico-istituzionali di Enriques dopo la prima guerra mondiale furono legati in modo essenziale alla Mathesis, Società italiana di scienze matematiche e fisiche, fondata nel 1895, grazie all'iniziativa di Rodolfo Bettazzi (che ne fu il primo presidente dal 1896 al 1900), di Aurelio Lugli e di Antonio de Zolt. La Mathesis è stata la più importante associazione che riunisce insegnanti di scuola superiore. La Società aveva già avuto un ruolo significativo nel dibattito sull'insegnamento della matematica svoltosi subito prima della grande guerra; Enriques ne divenne presi-

¹⁵ Moretti, 2003, p. 38.

¹⁶ Moretti, 2003, pp. 57-59.

dente nel 1919 e rimase in carica per ben 13 anni, fino al 1932. Inoltre per 17 anni, dal 1921 al 1938 fu direttore del “Periodico di Matematiche”, organo della Mathesis. Come era già accaduto con “Scientia”, le concezioni di Enriques segnarono in maniera fondamentale l’orientamento del “Periodico” in quegli anni. Subito dopo la guerra, vi fu il problema di uniformare i programmi di matematica delle province redente, Trento e Trieste, programmi che erano in gran parte diversi da quelli delle scuole italiane. Il congresso Mathesis nel 1919 si tenne a Trieste e fu specificamente dedicato al suddetto problema: tramite un intenso lavoro, il neopresidente Enriques riuscì ad aumentare notevolmente in numero degli iscritti alla Mathesis che, in quel periodo, triplicarono e, al discorso inaugurale del congresso, sottolineò il problema dei programmi di matematica delle province redente, ma soprattutto insistette sulla valenza formativa ed educativa della matematica e sulla necessità di accrescere il numero di ore dedicate alle materia scientifiche nella scuola italiana¹⁷. Fu un periodo di grande impegno e speranze, di lì a due anni Enriques pubblicò *Insegnamento dinamico*. Come si è accennato, il primo decennio del ‘900 aveva visto un ampio movimento, in cui possono essere annoverati molti scienziati, matematici e docenti, tendente a rendere l’Italia un paese scientificamente evoluto. In sostanza però la maggior parte delle speranze erano andate deluse. Il periodo post-bellico rinvigorì queste speranze che subirono però un duro ed emblematico colpo d’arresto con la riforma Gentile. Il tema è molto studiato, rimandiamo quindi alla letteratura spe-

¹⁷ Come riferimento al problema dei programmi di matematica per le province redente, rimando a Giacardi, 2006, pp. 47-54.

cialistica¹⁸. Ci limitiamo a ricordare che la cosiddetta riforma Gentile è costituita da cinque decreti, il primo emanato il 31.12.1922 e l'ultimo l' 1.10.1923, vi sono inoltre decreti integrativi. Come ricorda Livia Giacardi¹⁹, la Mathesis, per bocca del presidente Enriques reagì a una riforma che penalizzava in maniera pesante e definitiva la formazione scientifica nella scuola italiana. In particolare:

1) l'abbinamento dell'insegnamento della matematica e della fisica nelle scuole superiori non doveva implicare una riduzione del monte-ore complessivo dedicato alle due materie; 2) nel liceo classico il programma di matematica era stato eccessivamente ridotto, così gli studenti che dal liceo classico si fossero iscritti alle facoltà scientifiche, avrebbero avuto notevoli difficoltà, almeno iniziali; 3) il programma di matematica del neonato liceo scientifico era stato ridotto rispetto a quello del soppresso liceo moderno e della sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico; 4) nel liceo femminile non si insegnavano né matematica, né fisica, né scienze naturali. Come noto, nessuna delle richieste della Mathesis, che si era riunita in congresso a Livorno nel settembre del 1923, fu accolta. Enriques, che dal 1922 si trasferì all'università di Roma, prima come docente di matematiche superiori, poi, dal 1923, di geometria superiore, ebbe relazioni piuttosto articolate con Gentile: ovviamente non condivideva il

¹⁸ In appendice a Giacardi 2006, pp. 325-370 sono riportati gli estratti inerenti, all'istruzione scientifica, dei provvedimenti legislativi emanati in Italia a partire da Decreto Coppino (10.10.1867) per giungere alla riforma Gentile (estratto R. D. 14.10.1923). Segue un confronto tra le ore dedicate all'istruzione scientifica nelle scuole di vari stati e tavole sull'organizzazione scolastica italiana. Il testo presenta anche un'abbondante elenco di pubblicazioni sull'argomento.

¹⁹ Giacardi, 2006, pp. 54-63.

ruolo assegnato da Gentile alla istruzione scientifica, ma ne condivideva la venerazione per il mondo antico (in particolare greco) e per una educazione classica delle future classi dirigenti; quindi le sue prese di posizione nei confronti di Gentile, pur spesso critiche, non furono mai intransigenti. D'altronde Enriques, nel 1926, fu scelto da Gentile per redigere le voci matematiche dell'*Enciclopedia Italiana*.

Negli anni '20 Enriques lavorò alacremente per diffondere in Italia la storia della scienza, materia la cui valenza didattica era, per il matematico livornese, rilevante. Sul piano istituzionale, egli fu in grado di creare a Roma l'Istituto nazionale per la storia delle scienze fisiche e matematiche, che divenne attivo dal 1923 (prima riunione 30 maggio) e che all'inizio ebbe finanziamenti notevoli. Anche la Mathesis partecipò attivamente all'aspetto finanziario. Compiti dell'istituto erano, tra gli altri: 1) raccolta di documenti; 2) divulgazione di idee e ricerche scientifiche; 3) istituzione di una biblioteca; 4) pubblicazione di testi rilevanti per la storia della scienza. Enriques fu il presidente del Comitato scientifico dell'Istituto. Nel 1925-26 nasce, per iniziativa di Enriques la Scuola di perfezionamento nella storia delle scienze presso l'Università di Roma, con corsi tenuti da vari docenti sulla storia della matematica, fisica, medicina, chimica, geografia, teoria cellulare e concetti scientifici. Nel 1926 venne fondato l'Istituto nazionale di Storia della Scienza, con l'attiva partecipazione di Enriques. Nell'Istituto nazionale si fondevano l'Istituto di Enriques e la Federazione Nazionale tra le Società, gli Enti, gli Insegnanti e i Cultori di Storia delle Scienze di Mieli. A causa dei forti disaccordi tra Enriques e Mieli, disaccor-

di che erano già di vecchia data e che si auspicava superati, e i finanziamenti sempre più ridotti, il lavoro dell'Istituto non decollò²⁰. Con le leggi razziali Enriques fu allontanato dall'insegnamento. Fu reintegrato in ruolo solo nel 1944, due anni prima della morte.

3. Insegnamento dinamico e idee correlate

A partire dalla seconda metà dell'Ottocento il problema della didattica della matematica fu avvertito in tutta la sua importanza: si pensi a movimenti quali il fusionismo (di cui parleremo nel prossimo paragrafo) e all'impegno profuso sulla questione da grandi matematici, anche in Italia²¹. Enriques non fu quindi un'eccezione in questo senso. Egli non fornì solo specifici contributi alla didattica della matematica, ma espose un'idea educativa generale che mirava alla formazione della persona, prima ancora che all'apprendimento della matematica. L'articolo *Insegnamento dinamico* è lo scritto in cui Enriques espose la propria concezione. Come sottolinea egli stesso all'inizio del contributo, non sono nuove le singole idee esposte, ma piuttosto il quadro generale prospettato. L'assunto iniziale da cui muove Enriques è che l'insegnamento deve essere di tipo maieutico, non deve cioè consistere di una serie di nozioni che il

²⁰ Per i rapporti tra Enriques e Mieli, si veda Abbri, 2008. Specificamente per i problemi legati ai rapporti Enriques-Mieli e all'Istituto di Enriques, si rimanda a Nastasi, 2010, pp. 150-173.

²¹ A proposito del fusionismo, si veda; Bolondi, 2005, pp. 145-176, in particolare pp. 160-166; Borgato, 2006, pp. 125-157. Sui manuali di geometria in Italia tra unificazione e inizio del '900, segnaliamo, oltre ai due succitati contributi: Giacardi, 2003, pp. XCVII-CXXIII; per il periodo precedente, Pepe, 2006, pp. 1-63. Sull'impegno didattico di Guido Castelnuovo, si veda: Gario, 2006, in Giacardi, pp. 239-262. Tutti questi articoli presentano anche un'abbondante bibliografia.

docente impartisce all'allievo, ma il discente deve partecipare in modo attivo e l'insegnante deve aiutarlo a conquistare il sapere, non imporgli passivamente l'apprendimento di concetti e tecniche presentate come già complete e imm modificabili. Il tema su cui poi ruota tutto il ragionamento di Enriques è quello del rapporto tra intuizione e logica nell'insegnamento della matematica, ma la sua argomentazione, con poche modifiche, può essere estesa anche ad altre materia: il matematico livornese sostiene che è un errore separare intuizione e logica come facoltà distinte dell'intelletto, si tratta piuttosto "[...] di due aspetti inscindibili di un medesimo processo attivo, che si richiamano l'un l'altro"²². Criticando quegli insegnanti e teorici che ritengono la mente dei giovani più intuitiva che logica, e, quindi, bisognosa di ricevere un insegnamento rigoroso sui fondamenti dell'aritmetica e della geometria, Enriques risponde, in sostanza, che chi la pensa in questo modo cade in un grave errore: credere che l'intuizione che serve in matematica si identifichi con una sorta di confusa fantasia. Tutto il contrario: l'intuizione o intuito matematico è intuizione logica. Enriques porta in proposito due esempi molto chiari: 1) la costruzione di una figura geometrica che risolva un problema – per esempio, la comprensione che per risolvere un dato problema di geometria sintetica piana, occorre tracciare certe linee – richiede un'intuizione guidata dalla logica perché anzitutto occorre comprendere come riportare i dati del problema su una figura iniziale, poi bisogna sapere quali metodi e procedure si possono usare, e anche questa è una questione legata alla logica del ragio-

²² Enriques, 1921, 2003, p. 3.

namento e alla comprensione della logica interna dell'universo in cui ci stiamo muovendo - in questo caso "il mondo piano euclideo" determinato dai cinque assiomi -, occorre poi senz'altro una intuizione che porta a comprendere quali figure tracciare, oltre a quelle fornite dai dati, al fine di risolvere il problema. Si tratta però di una intuizione che è incanalata nell'alveo di una determinata logica. Poi certo non si può pretendere che si giunga alla soluzione tramite operazioni già meccanizzate in partenza, né questo sarebbe auspicabile per educare la mente del giovane al ragionamento; 2) nel passaggio dalla geometria sintetica a quella analitica, molti studenti hanno difficoltà a comprendere cosa significhi tradurre i dati di un problema in equazioni. Poi sanno ripetere la spiegazione e risolvere l'equazione, ma il nucleo concettuale del procedimento spesso rimane oscuro e messi davanti a problemi simili, non sanno come affrontarli, infatti "[...] comprendere significa divenir atti ad applicare"²³. Ora, continua Enriques, da un certo punto di vista sembra di avere a che fare con un mera questione logica: trascrivere certi dati in equazioni; tuttavia se manca una comprensione del senso generale della trascrizione, diviene difficile eseguire un'operazione che sembrerebbe puramente logica. Ecco quindi che anche qui entra insieme all'aspetto logico quello intuitivo: dinamicamente. Enriques ha così mostrato che per risolvere problemi, come quelli di geometria presentati in forma sintetica, per i quali si pensa comunemente che serva solo l'intuizione, è invece indispensabile anche un grande lavoro logico, e, viceversa, l'aspetto intuitivo (legato alla com-

²³ Ivi, p. 4.

prensione) è importante anche in geometria analitica, ove invece sembra prevalere un mero meccanismo di tipo logico. Questo non significa che logica ed intuizione siano la stessa cosa, ma che sono due facoltà dell'intelletto interrelate e che non si può pensare di educare l'una a scapito dell'altra. Correlato alla malintesa separazione tra logica ed intuizione, vi è una analisi non abbastanza raffinata di cosa si intenda per logica: in genere, sostiene Enriques, non viene fatta una distinzione che invece è fondamentale: esiste una "logica in piccolo" e una "logica in grande"²⁴: la logica in piccolo è: 1) l'analisi del processo del pensiero che ha portato ad enucleare gli elementi-base di una certa disciplina; 2) l'analisi di questi elementi-base. Mentre la logica in grande è lo studio delle connessioni tra le varie proposizioni, primitive e derivate, del sistema e lo studio dei rapporti di un dato sistema con altri sistemi. Così, per esempio, è solo la logica in grande che fa comprendere quali siano le proposizioni realmente basilari della geometria euclidea (somma degli angoli di un triangolo, teorema di Pitagora ecc.), mentre la presentazione di una mera catena deduttiva che da un teorema fa passare all'altro, cosa che è tipica della logica in piccolo, non fa comprendere la vera natura dell'intero perché mette tutte le proposizioni su un piano di parità, e rischia quindi di oscurare quelle proposizioni che forniscono le proprietà essenziali. Enriques continua asserendo che egli è ben lontano dal criticare la logica in piccolo (tanto che ha dedicato studi ai fondamenti della matematica ed a questioni logiche), ma in corsi preuniversitari, è indispensabile anzitutto fornire un

²⁴Ivi, p. 5.

corretto quadro d'insieme della struttura che si sta trattando. Ora Enriques si pone un altro problema: quale è il modo corretto di insegnare la logica in piccolo: come sempre, facendo vedere come essa viene applicata e il modo migliore per conseguire questo scopo è l'applicazione nella pratica matematica. Vi è un metodo dimostrativo in cui l'aspetto intuitivo è davvero ridotto al minimo: si tratta della dimostrazione per assurdo. Allora l'allievo potrà comprendere l'importanza e l'uso della logica in piccolo analizzando dimostrazioni per assurdo e il modo migliore per introdurre l'argomento è quello di capire come e perché nel corso della storia si è ricorsi alle dimostrazioni per assurdo. In questo modo si comprende il contesto in cui si inserisce la logica in piccolo, come strumento della logica in grande del sistema studiato (geometria euclidea, o algebra o geometria proiettiva, ecc.). Si giunge qui ad un altro dei *topoi* del pensiero enriquesiano: l'importanza della storia della scienza (della matematica, in questo caso). La storia (intesa come storia dei concetti e delle tecniche matematiche) è fondamentale perché pone lo studente di fronte a come erano i problemi quando nacquero e come li affrontarono uomini di genio in epoche in cui le tecniche divenute standard per un dato settore della matematica non erano ancora nate. Quindi la storia della matematica è un mezzo importante, non il solo ovviamente, che pone il giovane di fronte alle proprie capacità di affrontare un problema ed indicarne possibili vie di soluzione. Tanto più che problemi fondamentali affrontati in passato dai grandi matematici non sono mai "lettera morta". Scrive anzi Enriques: "infatti non è possibile che ripensiamo una difficoltà che una volta abbia-

mo vinto, senza scoprire nello stesso problema qualche altra difficoltà, che si risolve in una comprensione nuova e più alta”²⁵. Quindi l’approccio storico aiuta a contestualizzare e comprendere molti concetti e procedure matematiche e la piena comprensione dei fondamenti concettuali della disciplina è il passo fondamentale e, probabilmente, il più difficile. Scrive infatti Enriques: “[...] perché è falso che le cose elementari su cui torniamo per insegnarle, sieno facili al confronto della scienza superiore il cui possesso ci rende oggi orgogliosi davanti ai nostri scolari [...]. Non vi è iato o scissura tra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell’albero dalla tenera pianticina”²⁶.

Infine: il maggior ostacolo che molti vedono all’insegnamento dinamico (in cui non viene insegnata alcuna tecnica senza che ne siano comprese le basi concettuali) concerne la memoria ed il suo uso. Molte tecniche, le cui basi concettuali sono complesse, devono essere insegnate in tenera età in modo che, intanto, siano apprese meccanicamente, e poi, quando l’alunno sarà più grande siano richiamate e ne siano capiti i concetti-base. Enriques, riferendosi ad alcuni studi fisiologici (pp. 9-10), afferma anzitutto che la memoria non è immagazzinamento e ricezione passiva di dati, ma implica un coordinamento attivo per essere usata. Quindi l’insegnamento dinamico è ben lungi dal negare l’importanza della memoria. La soluzione viene prospettata in questi termini: una tecnica matematica complessa non può esser pienamente compresa in tenera età, quindi – ri-

²⁵ Ivi, p. 13.

²⁶ Ivi, p. 13.

conosce Enriques – è fisiologico che vengano insegnate tecniche non del tutto comprese. I concetti fondamentali devono però esserne spiegati e chiariti. L'autore di *Insegnamento dinamico* fa l'esempio del calcolo algebrico (p.10): egli riconosce utile insegnare tale calcolo prima che l'allievo possa comprendere i vasti usi dell'algebra; tuttavia il significato delle lettere messe al posto dei numeri e le regole di combinazione dei segni devono essere fatti comprendere. Occorre cioè "far lavorare" il ragazzo, anche in questo caso, attivamente e non imporgli una tecnica in modo passivo.

Questi i fondamenti del pensiero didattico enriquesiano. Benché sia qui impossibile ripercorrere l'intero itinerario del pensiero di Enriques, è interessante fare un cenno alle profonde connessioni che vi sono tra le concezioni didattiche di Enriques e le sue idee in altri settori: il matematico livornese si occupò – oltre che, ovviamente, di geometria algebrica e proiettiva – di fondamenti della geometria, del ruolo della logica entro la matematica, di gnoseologia ed epistemologia, del ruolo della storia della scienza nel pensiero, del rapporto tra struttura della mente e partizione delle discipline matematiche. Quali sono le connessioni tra questo nucleo concettuale e le idee enriquesiane nel settore della didattica? Il problema relativo al ruolo da attribuire alla logica entro la matematica ed al rapporto tra logica ed intuizione è stato uno dei temi cui Enriques ha dedicato maggiore attenzione. È opportuno sgombrare il campo da eventuali equivoci: Enriques è stato sostanzialmente estraneo alla logica matematica ed è stato del tutto estraneo allo sviluppo che questa disciplina ha avuto da

quando la ricerca si è orientata al tentativo di dimostrare la coerenza dell'aritmetica²⁷. Sarebbe però un grave errore credere che la logica della matematica si esaurisca nella logica matematica: vi sono una pluralità di aspetti che riguardano la struttura della matematica e il modo in cui sono ideati ed insegnati i concetti matematici. È a questi temi che si è dedicato Enriques. In *Problemi della scienza*, vi è un lungo capitolo, il terzo, interamente dedicato alla logica, ove Enriques tratta in modo diffuso il tema della definizione in matematica, il ruolo degli assiomi e il problema della reciproca compatibilità ed indipendenza degli assiomi. Estende poi il discorso alla logica filosofica affrontando questioni quali la valenza del principio di causa, il ruolo e la validità del principio di continuità e il rapporto tra logica ed esperienza, fino a toccare, sia pur per sommi capi, nella sezione conclusiva del capitolo, la fisiologia della logica, cioè il modo in cui la mente umana forma i concetti ed esegue le operazioni logiche. Del resto i rapporti relativi alla genesi psicologica dei postulati della geometria erano già stati affrontati da Enriques nel 1901 in quello che è uno dei suoi primi articoli di carattere gnoseologico, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati in geometria*. E il legame tra intuizione e logica nei fondamenti della matematica è chiarito nel modo migliore da questo passo che leggiamo nella prima pagina di *Lezioni di geometria proiettiva*: “La scelta degli elementi fondamentali della geometria non è *a priori* determinata; si scelgono come tali gli elementi più semplici rispetto alla *intuizione psicologica*, cioè quelli di cui la nozione si trova formata nella nostra mente

²⁷ Sui rapporti tra Enriques e gli sviluppi della logica matematica più legati ad Hilbert, il lettore può consultare Bussotti, 2008, pp. 69-100.

come contenuto del concetto di spazio: tali sono p. e. il punto, la retta e il piano”²⁸. Quindi l’intuizione psicologica fornisce gli assiomi, dà cioè forma e contenuto all’aspetto logico della geometria. Pertanto logica ed intuizione psicologica sono legate fin dall’inizio del processo conoscitivo. In seguito il ragionamento continuerà in modo logico, ma l’intuizione, si direbbe in questo caso costruttiva più che psicologica, serve comunque “[...] a lumeggiare concetti e ragionamenti più astrusi[...]”²⁹, così che l’intuizione diviene un supporto della logica. Del resto, per Enriques, vi sono diversi tipi di intuizione legati alle nostre facoltà sensorie, in particolare ai muscoli è legata l’intuizione che porta agli assiomi della geometria metrica e alla vista quella che porta agli assiomi della geometria proiettiva³⁰. Quindi l’apparato assiomatico (cioè la base logica) delle diverse geometrie dipende dalle nostre facoltà cognitive. Data questa concezione generale a cui si è accennato, si comprende come, per Enriques, sul piano didattico sia assurda una separazione netta tra logica ed intuizione: se le nostre facoltà psicologico-intuitive forniscono i principi logici base della matematica e la nostra capacità intuitivo-costruttiva diviene poi supporto fondamentale per la comprensione della logica interna del discorso matematico, ne consegue che una distinzione draconiana tra aspetti logici ed intuitivi è deleteria sul piano didattico. Ciò non implica affatto che non debba essere insegnato il concetto perspicuo di dimostrazione, anzi su questo Enriques è decisamente rigorista, ma che sul piano didattico gli aspetti in-

²⁸ Enriques, 1904 (prima edizione 1898), 1996, p. 1.

²⁹ Ivi, pp. V-VI.

³⁰ Sulla questione, si può consultare Bussotti, 2006, pp. 63-69.

tuitivi e contenutistici sono fondamentali per la corretta comprensione dei concetti, proprio in virtù della psicogenesi dei concetti matematici. Quindi la concezione del ruolo didattico della intuizione e della logica è comprensibile nell'alveo della concezione generale enriquesiana, è cioè un tassello di un intero modo di pensare di cui la didattica è un aspetto. Quanto si è visto mette in correlazione il pensiero educativo di Enriques con le sue idee sulla logica, i fondamenti della matematica, la gnoseologia e la fisiologia. L'altro elemento essenziale della didattica enriquesiana è il ruolo della storia della scienza. Anche in questo caso si tratta di un tassello di una concezione più generale relativa al valore attribuito dal matematico livornese alla storia della matematica e della scienza. Enriques ha sempre avuto interesse per la storia della matematica e della scienza, ma, nel corso degli anni questo si è andato ampliando ed approfondendo. Già nella seconda edizione delle *Lezioni di geometria proiettiva*, una breve ma interessante appendice storica era stata posposta alla trattazione, gran parte degli articoli pubblicato da Enriques sulle *Questioni riguardanti le matematiche elementari* sono, come vedremo, di tipo storico-didattico. Significativamente nella "prefazione alla ristampa della seconda edizione" di *Problemi della scienza*, egli scrive, riferendosi alle proprie concezioni: "Infatti, se le idee non sono sostanzialmente mutate, pure la naturale evoluzione di esse ha generato in me una nuova coscienza filosofica, che tende soprattutto ad approfondire l'aspetto storico dei problemi: al lume della quale molti sviluppi dovrebbero qui essere illuminati con nuovo stu-

dio”³¹. In seguito Enriques scriverà con Santillana la *Storia del pensiero scientifico* (1932, il mondo antico) e il *Compendio di storia del pensiero scientifico* (1937) ed approfondirà le concezioni filosofiche di Parmenide, interpretandole come basate su concetti geometrici. È noto che egli sostenne sempre una storia concettuale della scienza piuttosto che una di tipo filologico. Per cui ben si comprende il valore dell’elemento storico per la didattica quale tassello di una concezione più generale entro cui esso si inserisce: Enriques introdusse cioè l’elemento storico in una concezione fondamentalmente trascendentale fino a giungere a concepire la storicità della nozione di verità che una teoria scientifica può esprimere³². Risulta a questo punto chiaro come la didattica rientri in quella che potremmo chiamare filosofia enriquesiana, come ne sia una parte e una parte importante. Mi sembra quindi che, giustamente, Tina Tomasi sottolinei come, quanto alla didattica, non si possa parlare di una dottrina sistematica di Enriques, ma di un indirizzo educativo che privilegia l’uso della ragione³³. Ciò dipende appunto dal fatto che l’indirizzo educativo rientra all’interno di una concezione complessiva e che non era interesse di Enriques creare una specifica e dettagliata dottrina didattica, ma indicare uno sfondo educativo. Tutto ciò è coerente con gli inviti di Enriques agli insegnanti a “rendere più filosofica la vostra scienza” e sulla sua insistenza sulla necessità di istituire la facoltà filosofica di cui si è parlato nel paragrafo precedente.

³¹ Enriques, 1925, seconda edizione (prima edizione 1906), p. XI.

³² In proposito si veda le “Conclusioni” in Bussotti, 2006, pp. 103-116.

³³ Tomasi, 1982, pp. 244-245.

Dopo la pubblicazione di *Insegnamento dinamico* e dopo l'avvento del fascismo, vi sono almeno altri due scritti di Enriques concernenti la didattica che devono essere ricordati: 1) *Il significato umanistico della scienza nella cultura nazionale*, 1924 e 2) *La riforma Gentile e l'insegnamento della matematica e della fisica nella scuola media*, 1927. Il quadro di fondo non cambia rispetto a quello descritto, ma alcune considerazioni devono essere fatte: nel lavoro del 1924 Enriques sostiene che il vero valore delle teorie scientifiche non deve essere ricercato nelle tecniche a cui poi queste si applicano, ma la scienza deve essere coltivata per se stessa, come l'arte. In questo è il suo vero valore. L'esperienza poi in parte conferma e in parte corregge la teoria. Invero Enriques ha sempre sostenuto il valore umanistico della matematica e della scienza e della loro didattica – lo si è visto nel paragrafo precedente ed in questo - , tuttavia il tono usato in questo contributo sembra in qualche modo un adeguamento all'imperante idealismo, forse per evitar polemiche in funzione di quanto poi scrive Enriques nella seconda parte dell'articolo e cioè che l'insegnamento delle discipline fisiche e matematiche è una necessità della cultura umanistica e non deve essere trascurato nella scuola italiana, come insegna proprio l'esempio del naturalismo e del Rinascimento italiano. Più profondo e sofferto l'articolo del 1927, epoca in cui era ormai chiaro che la riforma Gentile sarebbe stata immutabile o modificabile in tempi molto lunghi: Enriques premette che la scuola non è informativa, ma formativa e che egli, coerentemente con lo spirito che anima la riforma Gentile, si è sempre mantenuto fedele a questa idea anche nelle proprie lezioni universitarie. Tuttavia, se è di-

scutibile l'accorpamento delle cattedre di matematica e fisica nei licei, senz'altro sbagliata è la riduzione di ore subita dagli insegnamenti scientifici: proprio perché la scienza ha una valenza umanistica fondamentale, tale ruolo non può esser né insegnato né compreso con poche ore a disposizione; è proprio l'educazione umanistica in senso complessivo che esige una seria educazione scientifica. Come sostiene Gentile stesso, il giovane deve essere abituato a lavorare per conto proprio, ma questo risultato può esser conseguito solo con un numero sufficiente di ore a disposizione. Enriques conclude che lo spirito della riforma Gentile è buono, ma che occorrono piccole modifiche affinché la scuola esprima al meglio questo spirito. Tali modifiche dovrebbero anzitutto consistere in un incremento delle ore dedicate alle materie scientifiche. Sappiamo come è andata a finire.

Passiamo, nella seconda parte, ad analizzare in concreto come Enriques applicava le sue idee educative nella redazione dei manuali scolastici.

Bibliografia

Abbri, F., 2008, *Mieli, Enriques e la storia della scienza*, in Bussotti, P. (a cura di), pp. 101-119, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Bolondi, G., 2005, *Geometria proiettiva, geometria descrittiva e geometria dello spazio nella scuola italiana*, in Franciosi, M., (a cura di), *Prospettiva e geometria dello spazio*, pp. 145-176, Sarzana, Agorà, 2005.

Borgato, M. T., 2006, *Il fusionismo e i fondamenti della geometria*, in Giacardi (a cura di), pp. 125-157, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Brigaglia, A., 2006, *Da Cremona a Castelnuovo. Continuità e discontinuità nella visione della scuola*, in Giacardi (a cura di), pp. 159-179, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Bussotti, P., 1997, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della matematica*, Pisa, ETS.

Bussotti, P., 2006, *Un mediocre lettore. Le letture e le idee di Federigo Enriques*, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Bussotti, P. (a cura di), 2008, *Federigo Enriques e la cultura europea*, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Bussotti, P., 2008, *Enriques e Hilbert: fondamenti della matematica e questioni conoscitive*, in Bussotti, P. (a cura di), 2008, pp. 69-100, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Cantù, P., 1999, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Milano, Unicopli.

Cauterio, M.-Gerla, G., 1988, *Un testo scolastico del 1897, gli "Elementi di geometria" di Giuseppe Veronese*, in "Periodico di matematiche", 1-2, 1988, pp. 17-32.

De Paolis, R., 1884, *Elementi di geometria*, Torino, Loescher.

Di Sieno, S., 2006, *Luigi Cremona e la formazione tecnica pre-universitaria nella seconda metà dell'Ottocento* in Giacardi (a cura di), pp. 99-124, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Enriques, F., 1898, seconda edizione 1904, *Lezioni di geometria proiettiva*, Bologna, Zanichelli, ristampa anastatica della seconda edizione, Bologna, Zanichelli, 1996.

Enriques, F. (a cura di), 1900, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna, Zanichelli

Enriques, F., 1900, *Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principi della geometria*, in Enriques, F. (a cura di), 1900, pp. 1-31, Bologna, Zanichelli.

Enriques, F., 1906, seconda edizione 1925, *Problemi della scienza*, Bologna, Zanichelli.

Enriques, F., 1907 (1), *L'ordinamento delle università in rapporto alla filosofia*, in *Atti del I Convegno della Società Filosofica Italiana (Milano, 20-21 settembre 1906)*, Bologna, Cuppini.

Enriques, F., 1907 (2), *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze*, in *Atti del V Congresso della FNISM (Bologna, 25-28 settembre 1906)*, Pistoia, Sinibuldiana.

Enriques, F., 1908 (1), *L'Università italiana. Critica degli ordinamenti in vigore*, in "Rivista di Scienza", a. II, vol. III, pp. 133-147.

Enriques, F., 1908 (2), *L'Università italiana. La riforma dell'Università italiana*, in "Rivista di Scienza", a. II, vol. III, pp. 362-372.

Enriques, F. (a cura di), 1912, seconda edizione 1924-27, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Bologna, Zanichelli. Ristampa anastatica della seconda edizione, Bologna, Zanichelli, 1983.

Enriques, F., 1912, *Sull'insegnamento della geometria razionale*, in Enriques, F. (a cura di), 1912, pp. 19-35, Bologna, Zanichelli.

Enriques, F.-Chisini, O., 1915, 1918, 1924, 1934, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna, Zanichelli. Ristampa anastatica, Bologna, Zanichelli, 1985.

Enriques, F., 1921, *Insegnamento dinamico*, consultato in Enriques, *Insegnamento dinamico*, pp. 1-14, 2003, La Spezia, Agorà.

Enriques, F., 1924, *Il significato umanistico della scienza nella cultura nazionale*, in "Periodico di matematiche", s. IV, vol. IV, pp. 1-6.

Enriques, F., 1927, *La riforma Gentile e l'insegnamento della matematica e della fisica nella scuola media*, in "Cultura fascista", a.II, n.8, s. II, pp.3-5.

Enriques, F.-Amaldi, U., 1903, *Elementi di geometria*, Bologna, Zanichelli.

Gario, P., 2006, *I corsi di Guido Castelnuovo per la formazione degli insegnanti*, in Giacardi (a cura di), pp. 239-268, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Euclide, 1970, *Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino, UTET.

Giacardi, L., 2003, *I manuali per l'insegnamento della geometria elementare in Italia tra Otto e Novecento*, in Chiosso, G (diretto da), *TESEO. Tipografi e editori scolastico-educativi dell'Ottocento*, pp. XCVII-CXXIII, Milano, Editrice Bibliografica.

Giacardi, L. (a cura di), 2006, *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Giacardi, L., 2006, *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità all'avvento del Fascismo*, in Giacardi, 2006, pp. 1-63, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Giacardi, L., 2010, *Il contributo della Scuola italiana di geometria algebrica alla formazione degli insegnanti nella prima metà del Novecento*, consultabile al sito <http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/gasca/LGiacardiFormazioneIns.pdf>.

Guarducci, A., 1912, *Della congruenza e del movimento*, in Enriques, F. (a cura di), 1912, pp. 93-122, Bologna, Zanichelli.

Moretti, M., 2003, *"Insegnamento dinamico". Appunti sull'opera scolastica di Federico Enriques (1900-1923)*, in Enriques, 2003, pp. 15-91, La Spezia, Agorà.

Nastasi, T., 2010, *Federigo Enriques e la civetta di Atena*, Pisa, PLUS.

Pepe, L., 2006, *Insegnamenti matematici e libri elementari nella prima metà dell'Ottocento. Modelli francesi ed esperienze italiane*, in Giacardi, 2006, pp. 65-98, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

Pompeo Faracovi, O. (a cura di), 1982, *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, Livorno, Belforte.

Pompeo Faracovi, O., 1984, *Il caso Enriques*, Livorno, Belforte.

Salmeri, A., 2009, *Abbinamento della matematica e della fisica. I commenti nel tempo*, Periodico di matematiche, n. 3, pp. 15-21.

Tomasi, T., 1982, *La questione educativa nell'opera di Enriques*, in Pompeo Faracovi (a cura di), *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*, pp. 223-250, Livorno, Belforte.

Veronese G., 1891, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padova, Tipografia del Seminario.

Veronese, G., 1897, *Elementi di geometria a uso dei licei e istituti tecnici (I biennio)*, Padova, Drucker.

Sito dell'Edizione Nazionale delle opere di Federigo Enriques:
<http://enriques.mat.uniroma2.it/>