Federigo Enriques e la didattica della matematica
Parte 2 di 2

Paolo Bussotti

4. ***La didattica della geometria: gli* Elementi di geometria *di Enriques-Amaldi***

4.1. *Il quadro generale*

La seconda metà dell'Ottocento vide in Europa un intenso dibattito sulla didattica della geometria: i matematici italiani furono tutt'altro che insensibili al problema, ed ebbero anzi un ruolo importante nel complesso quadro concettuale che si delineò all'epoca. Convergevano infatti nella didattica della geometria non solo questioni educative, ma anche problemi fondazionali interni alla geometria stessa; in estrema sintesi: dopo un periodo iniziale che va dall'opera di Desargues alla fine del Settecento, il pieno sviluppo della geometria proiettiva, prima con Monge e poi con Poncelet, poneva in termini nuovi il problema del rapporto tra geometria dello spazio e geometria del piano; se tradizionalmente la geometria spaziale veniva presentata come un'estensione di quella piana, la geometria proiettiva sembrava rovesciare il rapporto tra le due: è la geometria piana che risulta una particolarizzazione di quella dello spazio ed è lo spazio a risultare l'ambiente fondante della geometria e non più il piano. Già la dimostrazione di teoremi fondamentali della geometria piana, come quello di Desargues, risulta molto semplice se si ricorre allo spazio e molto complessa se ci si limita al piano, ma soprattutto la legge di dualità nello spazio consente una particolarizzazione “naturale” al piano, così che l’ambiente-base della geometria proiettiva è lo spazio. Questi risultati furono conseguiti, oltre che grazie ai lavori di Monge e Poncelet, in virtù dei profondi studi dei geometri tedeschi Steiner, Moebius e, soprattutto von Staudt, il quale fondò la geometria proiettiva in forma puramente sintetica e in modo rigoroso. Tutto ciò portò a pensare che, anche per quanto riguarda la geometria elementare, la trattazione della geometria dello spazio potesse, per certi argomenti, esser condotta di pari passo con quella della geometria piana, e che fosse legittimo usare concetti e costruzioni spaziali per dimostrare teoremi di geometria piana e non solo il viceversa. Il movimenti didattico che sosteneva questa tesi fu chiamato *fusionismo* (fusione di geometria piana e spaziale) e in Italia furono pubblicati alcuni manuali fusionisti, il più importante dei quali è la grande opera *Elementi di geometria* di Riccardo De Paolis[34]. La fusione tra geometria del piano e dello spazio non fu certo l’unico tema didattico all’ordine del giorno: in Italia era stata influente la tradizione didattica che risale agli *Elementi di geometria* di Legendre, testo stimolante per molti versi, ma in cui è cospicuo il ricorso all’algebra, in cui, in pratica viene eliminata la teoria delle proporzioni – vero e proprio cuore degli *Elementi* di Euclide – e in cui, per scelta e ammissione dello stesso autore, il rigore viene spesso sacrificato alla semplicità argomentativa. Dopo l’unità d’Italia era stato fatto un serio tentativo di ritorno a Euclide, voluto da Luigi Cremona e il cui ri-

[34] Per i manuali di geometria in Italia tra unificazione e inizio secolo e per un esame del fusionismo, rimandiamo alla letteratura di nota 21.

sultato più importante furono l'edizione degli *Elementi* di Betti-Brioschi, testo che però era in pratica una riproposizione del capolavoro euclideo. Alcuni tra i maggiori matematici di fine Ottocento erano tuttavia insoddisfatti di una mera riproposta di Euclide: molti ritenevano che comunque alcune delle acquisizioni più moderne sui fondamenti della geometria, sul problema del continuo e su come presentare la teoria delle grandezze potessero essere sfruttati anche in chiave didattica, inoltre la similitudine e l'uso delle proporzioni rappresentavano spesso un grande problema per gli studenti e se ne cercava una riproposizione che potesse, in qualche modo, mitigare le difficoltà di una pura presentazione alla Euclide. Né va sottovalutata l'importanza di quei concetti dell'assiomatica astratta che da diversi anni erano in discussione nell'ambiente matematico e che trovarono una presentazione e, in buona parte, una collocazione definitiva nei *Fondamenti di geometria* di David Hilbert. In questo periodo in Italia furono pubblicati molti buoni manuali, ma il più originale fu, oltre al già citato testo di De Paolis, l'opera di Giuseppe Veronese *Elementi di geometria*, seguiti da un'Appendice, testo profondo in cui convergono molte delle ricerche condotte da Veronese sulla teoria delle grandezze e che avevano trovato esposizione sistematica nella monumentale opera del geometra italiano *Fondamenti di geometria*[35]. Inoltre, per definire l'ugua-

[35] I *Fondamenti di geometria* (Veronese, 1991) sono un testo estremamente complesso in cui le idee di Veronese sono esposte in modo completo. La trattazione geometrica è preceduta da una introduzione di circa 250 pagine inerente ai concetti di gruppo, serie, numero e grandezza. Veronese introduce un sistema numerico non archimedeo e, nel prosieguo, tratta la geometria non archimedea. Come lavori sui *Fondamenti*, segnalo Bussotti, 1997 e Cantù, 1999.

glianza, De Paolis basa il proprio testo sulla nozione di movimento e Veronese su quella di corrispondenza. Il movimento rigido senza deformazione è implicito nella geometria euclidea, ma Euclide lo usa solo in tre dimostrazioni (I, 4, il cosiddetto primo criterio di uguaglianza dei triangoli, I, 8, terzo criterio di uguaglianza – il secondo in realtà in Euclide – e III, 24: segmenti circolari simili posti su rette uguali sono uguali); tutte le altre sue dimostrazioni sono condotte in modo indipendente dal concetto di movimento, analogamente non è usato il concetto di corrispondenza per stabilire l'uguaglianza tra figure. Veronese poi, pur rifiutando complessivamente l'approccio fusionista, per molti argomenti tratta insieme geometria piana e spaziale. Quindi questi due manuali presentano la geometria euclidea in una forma parecchio diversa da quella di Euclide. Enriques conosce molto bene la situazione e nel 1903, con la collaborazione di Ugo Amaldi, pubblica i suoi celebri *Elementi di geometria* i quali, pur tenendo conto delle esperienze didattiche che abbiamo brevemente descritto, sono *sostanzialmente* di stile euclideo, *sostanzialmente*, perché in realtà Enriques si guarda bene dal riproporre in maniera pedissequa Euclide; ristruttura anzi gli argomenti in modo da creare un quadro unitario con un proprio stile ben preciso, ma si mantiene in sostanza fedele a Euclide. Nella seconda sezione di questo paragrafo analizzeremo la struttura del manuale di Enriques e faremo dei brevi confronti con le trattazioni di De Paolis e Veronese. L'Enriques-Amaldi, affiancato da una serie di scritti sulla didattica della geometria pubblicati nelle *Questioni riguardanti la geometria elementare*, ebbe un enorme successo e segnò l'impostazione di gran parte dei manuali che furono pubblicati in seguito, anche se questi ultimi furono ben lontani dal livello del capostipite.

Il matematico livornese aveva in precedenza dato un altro contributo fondamentale alla didattica della geometria: le *Lezioni di geometria proiettiva*. Il testo va molto al di là del normale intento dei manuali universitari e rappresenta un manifesto di un ben preciso modo di affrontare i problemi della geometria proiettiva: quello che risale a von Staudt. Corrado Segre, quando Enriques presentò le *Lezioni* in un concorso ebbe addirittura a dire che il volume doveva essere considerato un titolo scientifico e non didattico. Uno studio esauriente della didattica della geometria in Enriques imporrebbe quindi anche l'analisi delle *Lezioni*, tuttavia qui per motivi di spazio non possiamo affrontare l'argomento[36].

4.2. Gli *Elementi di geometria* di Enriques-Amaldi e le questioni connesse

I principi direttivi che informano l'Enriques-Amaldi sono chiari: 1) la geometria euclidea con le sue costruzioni, i suoi problemi specifici e le sue procedure dimostrative legate alle costruzioni fornisce "[…] il più efficace strumento educativo delle intelligenze, più conforme al senso della realtà geometrica, fino a che un esercizio opportuno abbia reso le menti capaci di scernere nei concetti astratti l'immagine di una realtà più generale"[37]. Del resto però: 2) l'insegnamento della geometria, pur restando conforme a Euclide può "[…] avvantaggiarsi dei progressi portati, anche nel campo degli elementi da una critica più matura e dagli sviluppi recenti delle alte

[36] Su ciò rimando a Bussotti, 2006, pp. 30-56.
[37] Enriques, 1900, p. I.

matematiche”[38]; 3) benché il rigore delle dimostrazioni sia necessario, la critica logica dei fondamenti non deve risultare eccessiva: è necessario che il giovane prima comprenda tramite problemi e teoremi quali siano le proprietà essenziali dell’universo geometrico e solo in un secondo tempo, per chi prosegue gli studi matematici all’università, si potranno porre questioni fondazionali. Così, in chiave didattica, non vi è inconveniente a moltiplicare il numero di assiomi. In altri termini: il problema dell’indipendenza assiomatica trascende l’insegnamento della geometria nelle scuole superiori, mentre è importante evitare il ricorso a ipotesi sottintese perché, oltre ad essere potenziali fonti di contraddizioni, impediscono al discente di lavorare solo con i dati a disposizione, il che è un aspetto fondamentale del lavoro del matematico. Scrive Enriques: “una difficoltà si presenterebbe solo quando di essi [gli assiomi] volessero ricercarsi, con critica minuta, i rapporti logici, in omaggio al criterio d’indipendenza, mentre un più ampio esercizio dell’osservazione intuitiva, tendente a rimuovere ogni ipotesi sottintesa, sembra altamente educativo”[39]; 4) a proposito del fondamentale concetto di uguaglianza o congruenza, De Paolis e altri geometri, seguendo l’indirizzo di Helmholtz hanno definito due figure uguali o congruenti se sono sovrapponibili col movimento[40]. Enriques, nel 1900[41], afferma che, se di per sé questa scelta può essere accettabile, nondimeno le proprietà del movimento, assunto come concetto fondamentale dovrebbero essere formulate in modo logicamente

[38] Ivi, p. II.
[39] Ivi, p. II
[40] Si veda, per esempio, De Paolis, 1884, p. 8.
[41] Enriques, 1900, p. V.

ineccepibile, il che non è stato fatto limitandosi ai concetti della geometria elementare, ma solo ricorrendo all'algebra astratta, grazie alla teoria dei gruppi di Sophus Lie[42]. D'altronde Veronese introduce in altro modo il concetto di uguaglianza: prima definisce la nozione di corrispondenza univoca e del medesimo ordine per un gruppo di oggetti (*Elementi*, p. 8), successivamente, con l'assioma relativo all'esistenza della retta (postulato II, pp. 10-11), caratterizza come primitiva la relazione di uguaglianza e congruenza tra segmenti, enucleandone come caratteristiche: a) se due segmenti sono uguali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine i segmenti stessi e le relative parti corrispondenti, b) un segmento non è uguale a una sua parte, c) un segmento AB è uguale a BA. Veronese definisce poi in questo modo l'uguaglianza generale tra figure riferendosi al concetto di corrispondenza univoca e del medesimo ordine e a quello di uguaglianza tra segmenti: "Due figure rettilinee *F* e *F'* si dicono *eguali* quando si può stabilire tra i loro punti una corrispondenza univoca e del medesimo ordine tale che ai segmenti dell'una corrispondono i segmenti dell'altra. E si dicono *eguali* due figure non rettilinee quando sono figure corrispondenti di figure rettilinee eguali. Questa corrispondenza tra due figure eguali chiamasi *corrispondenza di eguaglianza*"[43]. Quindi l'ugua-

[42] Scrive Enriques: "[…] si dovrebbero formulare logicamente le proprietà del movimento stesso, assunto come concetto fondamentale, il che non sembra siasi fatto fino ad ora negli elementi, in modo esente da critiche" (Ivi, p, V). La questione "[…] ha ricevuto oggi una risposta più precisa e soddisfacente nella trattazione gruppale di Sophus Lie" (Enriques, 1900, pp. 1-31. Citazione, p. 22). Una chiara e sintetica analisi di questo problema si ha in Guarducci, 1912, pp. 93-122, in particolare, pp. 99-100.
[43] Veronese, 1897, p. 23. Sugli *Elementi* di Veronese, si veda l'articolo Cauterio-Gerla, 1988, pp. 17-32.

glianza viene ricondotta al concetto più generale ed astratto di corrispondenza. Enriques fa una scelta diversa: non definisce in generale il concetto di uguaglianza. Quanto ai segmenti e agli angoli parla senz'altro di uguaglianza, limitandosi a considerare la sovrapponibilità come un criterio sperimentale per stabilire se due segmenti sono uguali, ma niente che abbia a che fare con la definizione[44]. Si legge infatti esplicitamente: "Noi adoperiamo il movimento per spiegare che cosa sia l'uguaglianza tra segmenti ed angoli, e verificarne le prime proprietà. Il movimento è per noi un'operazione fisica; e perciò l'uguaglianza non viene così definita logicamente, ma assunta come un concetto ricavato dall'osservazione (*concetto fondamentale*)"[45]. Definisce poi l'uguaglianza caso per caso, così, per esempio due triangoli sono definiti uguali se hanno uguali ordinatamente i lati e gli angoli (pp. 47-48). Questa scelta, che potremmo definire "minimalista", è del tutto coerente con l'idea di fondo che ha Enriques: in didattica, specialmente nelle scuole superiori, non serve un'analisi raffinata dei concetti fondamentali, come quello di uguaglianza; come si è detto, per Enriques è importante che si prenda confidenza e pratica con l'oggetto di studio, la critica dei principi e dei concetti verrà in un secondo tempo. La soluzione si rivela azzeccata perché, senza perdere in perspicuità, il testo enriquesiano è molto più fruibile e semplice dei manuali di De Paolis e Veronese. Le difficoltà che il discente deve affrontare riguarderanno gli esercizi e la "pratica geometrica", non ciò che Enriques ritiene raffinatezze logiche poco adatte ad esser presentate in una scuola supe-

[44] Enriques-Amaldi, 1903, pp. 9-11 per i segmenti, pp. 33 per gli angoli.
[45] Ivi, p. IV.

riore; 5) riguardo alla fusione tra geometria piana e geometria spaziale, l'Enriques-Amaldi non è un testo fusionista: nella prefazione viene sottolineata la fecondità della fusione "nelle regioni alte della scienza" (p. X. Evidentemente riferendosi alla geometria proiettiva) e si parla con grande stima dei lavori fusionisti di De Paolis e, più tardi di Lazzeri e Bassani, nonché di Veronese[46], però la facilità di rappresentare le figure piane in confronto a quelle spaziali, fa propendere gli autori per una scelta non fusionista (p. XI). In sostanza, per Enriques, fedele in questo a Euclide, a livello di geometria elementare metrica, l'ambiente in cui si sviluppano i concetti-base (parallelismo, perpendicolarità, relazioni di equivalenza e di similitudine) è il piano e non lo spazio. Tuttavia, in maniera assai originale e interessante, Enriques e Amaldi propongono nella prefazione (p. XI, nota 1) un possibile ordine dei capitoli del loro libro diverso da quello esposto nel testo e coerente con un approccio fusionista; 6) nell'Enriques-Amaldi la trattazione segue il modello deduttivo euclideo, tuttavia vi sono numerose osservazioni empiriche e sperimentali che tendono a mostrare anche l'euristica di certe acquisizioni, il che è sempre auspicabile sul piano didattico. Scrive infatti Enriques: "La nostra critica si riassume in questo giudizio: la trattazione euclidea presentando coordinati in un sistema deduttivo dei risultati lungamente analizzati nei loro rapporti, nasconde sotto forma dommatica il cammino della scoperta"[47]. A parte questo, la scelta didattica di Enriques è chiara e mi piace sintetizzarla così: "nessuno può

[46] Veronese non fu un fusionista nel senso comunemente dato a questa espressione. Si veda in proposito Veronese, 1897, p. XIV. Egli accoglie comunque per alcuni argomenti la concezione fusionista e la sviluppa nel proprio testo.
[47] Enriques, 1912, pp. 19-35. Citazione, p. 24.

fare Euclide meglio di Euclide", quindi con le opportune modifiche, necessarie a una presentazione più fruibile della geometria euclidea, l'Enriques-Amaldi si mantiene in sostanza fedele ai dettami e ai metodi del grande geometra greco. D'altronde Enriques aveva scritto nel 1900: "L'opera geometrica dei Greci, a noi tramandata col nome d'Euclide, è in sé così bella ed armoniosa che, dopo venti secoli, non sapremmo ad essa sostituire, nella scuola secondaria, qualche altro insegnamento di geometria meglio rispondente alle esigenze delle coltura e dell'educazione intellettuale"[48].
Riguardo al contenuto, il testo è suddiviso in 17 capitoli, i primi otto di geometria piana e gli altri di geometria dello spazio. I capitoli relativi alla geometria piana occupano ben 432 delle 650 pagine complessive. Alla fine di ogni capitolo vi è un buon numero di esercizi. Il capitolo I è dedicato agli enti fondamentali: punto, retta, angoli, piano; il II ai poligoni, con i criteri di uguaglianza per i triangoli e gli altri poligoni; il III è dedicato al cerchio; il IV alla teoria delle parallele e alle sue applicazioni; il V alla teoria dell'equivalenza, col teorema di Pitagora e il teorema dello gnomone; il VI riguarda la teoria delle proporzioni; il VII la lunghezza della circonferenza e la superficie del cerchio; l'VIII, l'ultimo di geometria piana è dedicato alla teoria della misura. La geometria spaziale inizia col IX capitolo concernente rette e piani nello spazio; il X è dedicato agli angoloidi e ai poliedri; l'XI alla sfera; il XII alle rette e piani paralleli e ai prismi; il XIII al cono e al cilindro; il XIV alle superficie e ai volumi dei poliedri; il XV alle proporzioni

---

[48] Enriques, 1900, p. I.

e similitudini; il XVI alle superficie e volumi del cono e della sfera e, infine, il XVII alla misura.

Rispetto alla trattazione di Euclide vi sono delle differenze di contenuto e di metodo: quanto al contenuto, il primo capitolo dell'Enriques-Amaldi è introduttivo; il secondo capitolo corrisponde in parte al primo libro di Euclide anche se vi sono una serie di proposizioni caratterizzanti i triangoli che sono frutto dell'indagine logica sui fondamenti della geometria e che non compaiono in Euclide: si tratta in particolare delle proprietà caratterizzanti i punti interni ed esterni ad un triangolo in proposizioni quali: "un punto comune a due angoli di un triangolo è comune al terzo" (Teorema 109, p. 44), "Il segmento che congiunge un punto interno ad un punto esterno di un triangolo sega il contorno in un punto e in uno solo" (T. 112, p. 45). Seguono i criteri di uguaglianza dei triangoli. Il primo criterio (Euclide I, 4) viene introdotto come postulato (117, p. 49). Sono poi dimostrati i fondamentali teoremi: uguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele, possibilità di bisecare un angolo, secondo criterio di uguaglianza dei triangoli, terzo criterio di uguaglianza (rispettivamente 119, p. 50; 121, p. 51; 130, p. 55; 137, p. 59). In Euclide queste proposizioni sono rispettivamente le I, 5; I, 9; I, 26; I, 8. Il testo continua con le disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo: teorema dell'angolo esterno (139, p. 61, Euclide I, 16); proprietà che a lato maggiore è opposto angolo maggiore e viceversa (143, 144, pp. 64, 65, Euclide I, 18, 19); in ogni triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due (145, p. 65, Euclide I, 20). Segue la trattazione della perpendicolarità in cui, tra l'altro si dimostra che la somma di due angoli di un triangolo è minore di due retti (155, p. 70, Euclide, I, 17). Seguono altri criteri di uguaglianza dei triangoli e un'interessante sezione sui luoghi geometrici (pp. 82) che è assente in Euclide. Sulla falsariga di quanto visto per i triangoli, l'Enriques-Amaldi estende la trattazione ai poligoni, sviluppando in particolare la teoria dell'eguaglianza per i quadrilateri (pp. 89-94). Si ha poi la trattazione dei poligoni concavi, convessi e intrecciati e delle poligonali (pp. 95-104). In Euclide tutta questa parte sui poligoni, che però è in sostanza riconducibile alle proprietà dei triangoli manca. Un aspetto estremamente interessante viene affrontato alla conclusione del primo libro, nel paragrafo sulle costruzioni (pp. 104-108): la geometria euclidea è la geometria della riga e del compasso; quest'ultimo come strumento costruttore è, come ben noto, introdotto fin dalla prima proposizione degli *Elementi* (costruire un triangolo equilatero di lato assegnato). Enriques fa una scelta diversa: dal momento che il cerchio come entità geometrica non è ancora stata introdotta, egli preferisce non ricorrere al compasso e, nel primo libro usa come strumenti costruttori la riga, la riga graduata e la squadra e insegna a risolvere una serie di problemi con questi strumenti, ad esempio bisecare un angolo o un segmento dati (217, 218, pp.107-108). Strumenti come la squadra portano al di là di ciò che è eseguibile con riga e compasso perché consentono di inserire due medie proporzionali tra due segmenti dati, quindi in senso proprio l'uso della squadra non rientra nella geometria di Euclide ma Enriques si attiene a sole costruzioni eseguibili anche con riga e compasso e usa questi strumenti perché probabilmente ritiene utile a livello didattico introdurre il compasso come strumento costruttore solo dopo aver esplicitato le proprietà del cerchio. Nel primo capitolo dell'Enriques-Amaldi non è affrontato il problema del parallelismo, e la trattazione del problema è rimandata al quarto capitolo, dopo aver parlato del cerchio, mentre in Euclide a partire dal cosiddetto "teorema inverso delle parallele" (I, 29), il parallelismo è affrontato nel primo libro. Questa scelta dipende probabilmente dal fatto che Enriques giudica la teoria del parallelismo un argomento particolarmente delicato sul piano logico, che introduce la parte più avanzata della teoria euclidea e ritiene più opportuno enucleare prima le proprietà del cerchio che si possono dimostrare senza ricorrere al parallelismo.

Il secondo capitolo dell'Enriques-Amaldi fa già comprendere in che cosa il testo sia fedele agli *Elementi* euclidei e in che cosa se ne distacchi: buona parte del secondo capitolo presenta i teoremi esposti nel primo libro di Euclide con dimostrazioni simili o identiche a quelle del geometra greco. Tuttavia le proposizioni iniziali sui triangoli, da me riportate, mostrano proprio cosa intendeva dire Enriques affermando che occorre tener conto "dei progressi portati, anche nel campo degli elementi da una critica più matura e dagli sviluppi recenti delle alte matematiche". Oltre alla diversa collocazione della teoria del parallelismo e del problema della costruibilità, vi è poi la questione dei postulati: Euclide espone all'inizio della propria opera i famosi cinque assiomi, mentre nell'Enriques-Amaldi, i postulati sono introdotti nel corso della trattazione, quando le esigenze didattiche sembrano richiederlo, senza preoccuparsi della loro indipendenza o

del loro numero. Enriques voleva presentare un testo rigoroso, ma maneggevole e fruibile dallo studente e la scelta di introdurre i postulati, per così dire nel corso della narrazione, era funzionale a questa esigenza.
Per motivi di spazio, non sarà possibile analizzare gli altri capitoli dell'Enriques-Amaldi così dettagliatamente come abbiamo fatto col secondo, ci concentreremo quindi su due argomenti particolarmente significativi: il parallelismo e la teoria delle proporzioni, accennando poi ad alcune questioni di geometria dello spazio e concludendo con un breve confronto con le impostazioni di De Paolis e Veronese.
Il postulato delle parallele viene introdotto da Enriques nella forma che sembra più intuitiva e cioè che, data una retta, per un punto esterno ad essa passa una e una sola parallela (331, p. 175); data questa proposizione come postulato, viene dimostrato quello che è il quinto postulato di Euclide come teorema (334, p. 176), segue poi il teorema dell'angolo esterno di un triangolo, secondo cui un angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti e la somma degli angoli interni di un triangolo equivale e due retti (337, p. 177, Euclide, I, 32). Viene quindi trattata la somma degli angoli interni di un poligono; si passa poi alle proprietà dei parallelogrammi (pp. 180-187), senza però toccare il problema dell'equivalenza. Segue un paragrafo di estremo interesse concettuale e che non ha un corrispettivo nella trattazione di Euclide, quello della distanza tra due parallele (pp. 187-193): nella proposizione 363 (p. 187) viene dimostrato che se una retta è parallela ad un'altra, tutti i punti dell'una hanno uguale distanza dall'altra e nella 366 (p. 188) che il luogo

dei punti che distano di un segmento assegnato da una retta data e giacciono rispetto ad essa da una banda prefissata è la parallela alla retta data avente da essa distanza uguale al segmento assegnato. Ora, sostiene Enriques, i teoremi sulla distanza di due parallele possono essere basati empiricamente sull'osservazione relativa allo strisciamento di un piano su se stesso senza ricorrere al postulato delle parallele. Questa osservazione è di carattere finitario nel senso che il campo ristretto della nostra esperienza ci consente di far strisciare un piano di un certo segmento finito dato, mentre il postulato delle parallele ha carattere infinitario perché, come sostengono Enriques e Amaldi "Per la sua stessa natura non è possibile di porgerne una verifica sperimentale (sia pure approssimata) nel campo ristretto accessibile ai nostri mezzi di osservazione" (p. 189). Ciò suggerisce allora l'idea di poter sfruttare come postulato delle parallele la proposizione "I punti di un piano che sono da una parte di una retta e hanno da essa una distanza data, appartengono ad una retta" (p. 190). Questa annotazione di Enriques è una piccola finestra aperta allo studente per problemi che poi sarebbero stati affrontati nei corsi universitari, quali le formulazioni equivalenti del postulato delle parallele e l'assiomatica delle geometrie non euclidee. Segue la trattazione dei punti notevoli di un triangolo (notoriamente assente in Euclide) e quella relativa agli angoli del cerchio e all'inscrittibilità dei poligoni regolari, così che i risultati conseguiti da Euclide nel terzo e nel quarto libro sono riportati nel terzo e alla fine del quarto capitolo del testo enriquesiano.

La teoria delle parallele proposta da Enriques si presenta come un corpo compatto e ben strutturato. Come già visto per il secondo capitolo, anche questa trattazione è vicina a Euclide, ma è tangibile l'influenza di alcuni risultati ottocenteschi sulla teoria delle parallele e notevole lo sforzo di trovare un riferimento all'esperienza per dar conto di un concetto così complesso come quello di parallelismo. Anche in questo caso quindi lo sforzo è notevole: 1) far comprendere la materia trattata secondo lo spirito euclideo; 2) fornire un'euristica che renda più semplice la comprensione; 3) estendere alcuni argomenti con osservazioni critiche derivate da studi più recenti. Nel complesso un affresco mirabile.

Di grande interesse è anche il capitolo quinto sulla teoria dell'equivalenza, dove, tra l'altro, viene dimostrato il teorema di Pitagora e riferiti alcuni risultati conseguiti da Euclide già alla fine del primo libro. Quindi anche qui si ha una modificazione, senza sconvolgimento, della trattazione euclidea.

Passiamo quindi alla teoria delle proporzioni (capitolo VI), cuore della geometria euclidea, perché da essa deriva il fondamentale concetto di similitudine. Qui, per motivi di spazi, analizzeremo solo i fondamenti della teoria perché saranno utili per un confronto con Veronese. Le dimostrazioni dei teoremi concernenti la similitudine sono poi, in Enriques, molto vicine a quelle euclidee.

Dopo l'introduzione del concetto di grandezze omogenee (475, p. 280) e le relazioni fondamentali di uguaglianza e disuguaglianza tra grandezze, con la legge commutativa ed associativa della somma (476, pp. 281, 282). Al punto 482 (pp. 283, 284) viene data la definizione di grandezze proporzionali: date quattro grandezze *A, B, C, D* di cui la prima e la terza omogenee rispettivamente alla seconda e alla quarta e due numeri interi positivi *m* ed *n*, si dice che esse sono in proporzione o hanno lo stesso rapporto qualora si abbia:

1) $mC>nD$ se $mA>nB$; oppure 2) $mC=nD$ se $mA=nB$; oppure 3) $mC<nD$ se $mA<nB$.

La definizione euclidea di proporzione, riproposta da Enriques, può sembrare complicata perché data per astrazione; si definisce infatti il rapporto di grandezze definendo l'uguaglianza di rapporti. Tuttavia questa definizione è la più adatta a trattare anche il caso delle grandezze incommensurabili e la definizione euclidea di eguaglianza tra rapporti è, in sostanza, analoga alla definizione di identità di due numeri reali data tramite sezioni di Dedekind[49]. Seguono i classici teoremi sulle proporzioni a cominciare dal teorema di Talete (488, pp. 287-288), dal teorema della bisettrice (495, 496, pp. 290-292, Euclide VI, 3) e dalla proposizione secondo cui se due triangoli hanno gli angoli uguali, i lati che comprendono angoli uguali sono in proporzioni (498, pp. 292-293, Euclide VI, 4). Enriques pone poi il confronto tra due proporzioni arrivando ai classici teoremi relativi al rapporto tra antecedenti e conseguenti di una proporzione, il più importante dei quali è quello relativo all'unicità del quarto proporzionale (511, p. 302). Riguardo al fondamentale teorema della permutazione dei medi, dimostrato da Euclide in V, 16, ma la cui complessa prova, data in forma astratta, senza cioè ricorrere a figure geometriche, bensì solo tramite

[49] La letteratura sulla definizione di proporzione è molto estesa. Qui segnaliamo Vailati, *Sulla teoria delle proporzioni*, consultato in Enriques, 1924-27, 1983, parte prima, tomo primo, pp. 143-191 e la nota 3 di Attilio Frajese alla definizione euclidea in Euclide, 1970, pp. 299-302.

proprietà delle proporzioni, richiede ben tre proposizioni introduttive (VI, 12-15), Enriques fa una scelta diversa: dimostra che se due parallelogrammi sono equivalenti ed hanno un angolo uguale a un angolo, i lati che comprendono gli angoli uguali formano una proporzione in cui sono estremi e medi due lati di uno stesso parallelogramma e che vale anche il viceversa (532, pp. 318). Applicando questo teorema ai rettangoli ne consegue che se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo degli estremi è equivalente a quello dei medi e viceversa (534, p. 319). Da qui seguono facilmente i teoremi sulla permutazione dei medi e degli estremi (540, p. 322). Sono poi dimostrati tutti i classici teoremi euclidei relativi al comporre, scomporre, alle proprietà ex aequo e alla proporzione perturbata. C'è un problema: quanto ha dimostrato Enriques a partire dalla permutazione dei medi non vale per le grandezze in generale, ma solo per i segmenti perché si basa su una dimostrazione relativa ai lati dei rettangoli. Ma il matematico livornese afferma esplicitamente: "Esse [le proprietà delle proporzioni relative ai segmenti] valgono pure per le grandezze in generale; ma le dimostrazioni astratte e piuttosto laboriose, che a tale scopo si richiedono, saranno da noi rimandate in una nota in fine al capitolo (pag. 341)"[50]. La nota di tre pagine, pur precisa, è comunque piuttosto concisa rispetto alle dimostrazioni date da Euclide.

Enriques espone poi i teoremi sulla similitudine, ma qui non abbiamo spazio per analizzarli.

[50] Enriques-Amaldi, p. 322.

La teoria delle proporzione esposta da Enriques, conferma la sua scelta didattica: seguire Euclide nella misura in cui è possibile coniugare perspicuità e semplicità, quando la teoria euclidea diviene eccessivamente astratta e le dimostrazioni risultano pesanti, Enriques preferisce una semplificazione che, senza perdere di vista il quadro generale, consenta una maggior fruibilità da parte del discente e del docente. Ecco allora la scelta di non trattare, per certe proprietà, le grandezze in generale, ma di riferirsi ai segmenti, in modo da rendere più semplice la trattazione. Anche la teoria delle grandezze incommensurabili è esposta in modo chiaro e semplice (pp. 383-398), senza addentrarsi nei meandri del decimo libro degli *Elementi* euclidei e senza riferirsi alle questioni fondazionali sorte alla fine del XIX secolo e concernenti i numeri reali.

Riguardo alla geometria dello spazio, la trattazione enriquesiana comincia con le rette perpendicolari, prosegue con i diedri e le loro sezioni normali e i criteri di uguaglianza dei diedri (parte assente in Euclide), il capitolo si chiude con le proprietà dei piani perpendicolari e delle sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali. Segue, nel capitolo decimo la trattazione dei triedri con l'introduzione del fondamentale concetto di triedro polare di un triedro dato (def. 79, p. 467): dato un triedro, dal vertice si innalzi la semiretta perpendicolare a ciascuna faccia nella parte di semispazio delimitato dalla faccia in cui cade il terzo spigolo del triedro. Il triedro così ottenuto è *polare* del dato. Il concetto di triedro polare è sfruttato nello studio dell'uguaglianza dei triedri (tutta questa parte manca in Euclide). Segue la trattazione degli angoloidi e dei poliedri. L'XI capitolo riguarda la sfera e, coerentemente con quanto fatto per la geometria piana, il parallelismo tra rette e piani nello spazio è affrontato solo nel XII capitolo, mentre Euclide lo affronta già nell'XI libro, il primo dedicato alla geometria dello spazio. Dopo aver affrontato, nel capitolo tredici gli argomenti legati al cilindro e al cono, viene trattato nel capitolo XIV la teoria dell'equivalenza: è un capitolo estremamente interessante. Enriques ripropone in maniera chiara e con diverse applicazioni il metodo di esaustione: notevole il modo in cui è proposta la dimostrazione del teorema secondo cui tetraedri di base ed altezze uguali hanno lo stesso volume. Enriques propone due applicazioni del metodo di esaustione: la prima utilizzando i concetti di scaloide iscritto e circoscritto alla piramide e la seconda riproponendo la dimostrazione di Euclide (XII, 5, ove Euclide dimostra che piramidi a base triangolare e uguale altezza hanno il volume proporzionale alle basi). Il matematico livornese propone due dimostrazioni perché la prima, quella in cui è usato lo scaloide, non ricorre alla teoria delle proporzione, mentre la seconda sì. Altre interessanti applicazioni del metodo di esaustione si trovano nel capitolo XIV in cui sono tra l'altro fornite la dimostrazioni per esaustione relative all'area e al volume della sfera che, come è noto, non si trovano in Euclide, ma in Archimede. Nel complesso quindi la geometria dello spazio è notevolmente sviluppata nell'Enriques-Amaldi, è presente un quadro esauriente dei problemi e dei metodi tipici di questa parte della disciplina, sempre seguendo un approccio che sia il più semplice e preciso possibile per docente e discente.

Passiamo ora ad un succinto confronto tra l'impostazione che Enriques dette al proprio manuale e a quelle date da De Paolis e Veronese ai rispettivi testi. Cominciamo con quest'ultimo.

Veronese, nella prefazione dedicata agli insegnanti caratterizza così le maggiori novità della propria impostazione: Cominciamo con quest'ultimo.

Veronese[51], nella prefazione dedicata agli insegnanti, caratterizza così le maggiori novità della propria impostazione: 1) introduzione di un principio di dualità generale che non riguarda solo le relazioni grafiche (come il principio di dualità della geometria proiettiva) ma anche certe relazioni metriche e corrispondenze. Così si esprime Veronese: "[…] data una figura *A* mediante alcuni postulati e un'altra *B*, in tale corrispondenza con *A* che collo scambio di alcune parole valgono per *B* le proposizioni contenute nei postulati di *A*; per *B* si deduce che collo scambio di quelle parole, valgono anche colle stesse dimostrazioni tutte le proposizioni dedotte per *A*" (*Elementi*, pp. XI-XII). Così per esempio, afferma Veronese (p. XIII) non è necessario ridimostrare per le figure simili molti teoremi dimostrati per le figure uguali, basta sostituire alla corrispondenza di uguaglianza quella di proporzionalità; 2) introduzione di punto, retta e piano all'infinito per rendere più semplici e generali le dimostrazioni di alcuni teoremi (p. XIII); 3) non è possibile una fusione della geometria piana e solida finché non siano stati costruiti il piano e lo spazio. Nell'insegnamento è bene procedere dal particolare al generale, quindi prima geometri piana e poi geo-

[51] In seguito, se non specificato diversamente con *Elementi* mi riferirò a Veronese, 1897.

metria dello spazio; 4) tuttavia, una volta introdotte le proposizioni fondamentali del piano e dello spazio è utile una trattazione simultanea di teorie particolari quali la teoria della congruenza e simmetria, della equivalenza, delle proporzioni e similitudini e della misura (p. XV).

L'impostazione di Veronese è davvero innovativa: è molto interessante il principio di dualità esteso, che giustamente è stato visto in chiave strutturalista[52]. Ci sono però alcuni problemi: 1) il principio di dualità in geometria proiettiva vale in generale, mentre in geometria metrica, l'applicazione di tale principio non è affatto garantita a priori e, per ogni argomento, occorre specificare se il principio valga o meno; 2) sul piano didattico questa scelta, insieme a quella già vista relativa alla definizione di uguaglianza sembra porre la trattazione a un livello molto astratto per un libro di testo dedicato alle scuole superiori.

Dal punto di vista dei contenuti, il testo è diviso in nove libri. Tuttavia prima dell'inizio della trattazione vera e propria vi è un capitolo introduttivo, dal titolo "Nozioni generali" in cui Veronese introduce i concetti di gruppo (niente a che vedere col concetto di gruppo dell'algebra) e di serie per giungere poi a quello di corrispondenza tra gruppi. Egli fornisce qui le nozioni base che aveva sviluppato in maniera ben più dettagliata nei *Fondamenti di geometria*. Il primo libro è dedicato alle proprietà della retta con l'introduzione del concetto di uguaglianza tra segmenti, tra figure rettilinee e tra coppie di raggi. Segue la definizione di rette parallele e sono enucleate le principali proprietà del parallelismo. Si tratta di un libro

[52] Cautiero-Gerla, 1988, paragrafo 3: fusionismo e strutturalismo.

complesso: prima viene introdotto il concetto di sistema lineare, come gruppo di punti dotato di due ordini l'uno inverso dell'altro (p. 8) e viene postulata (pp. 10-11) l'esistenza di un sistema lineare che si chiama retta e che ha certe caratteristiche. Nel primo teorema Veronese dimostra che la retta non ha nodi (pp. 12-13). Riguardo alle rette parallele, la definizione è la seguente: "le rette di una coppia diconsi parallele, se sono opposte rispetto a un punto fuori di esse" (p. 29) e l'assioma delle parallele è dato in questa forma: "due rette parallele sono opposte rispetto al punto di mezzo di ogni loro segmento trasversale". Questa definizione di parallelismo va incontro all'esigenza avvertita da Veronese di mantenere i postulati nell'ambito dell'esperienza possibile, mentre la classica definizione di rette parallele come rette che, comunque prolungate non si incontrano, è chiaramente infinitaria. Inoltre la definizione è coerente coll'idea di riportare i concetti geometrici a relazioni, in questo caso relazione di simmetria. Il postulato è conseguenza della definizione.

Nel secondo libro sono enucleate le prime proprietà del piano con teoremi in realtà di geometria spaziale come quello secondo cui un piano è determinato da una retta e un punto fuori di essa o da tre punti non allineati (pp. 37-38). Vengono poi forniti in forma piuttosto astratta alcuni elementari teoremi sugli angoli (per esempio: a partire da una retta data esiste un solo angolo uguale a un angolo dato in ciascuno dei due versi di un fascio, p. 42) riconducendosi al concetto di sistema lineare omogeneo. Un teorema, la cui dimostrazione è assai significative della impostazione di Veronese è: "un angolo qualunque può essere diviso in un solo modo in due parti uguali”. Non è possibile scendere nei dettagli, ma la prova è condotta ricorrendo alla corrispondenza di uguaglianza dell’angolo con se stesso, ma visto come formato prima dalla semiretta *a* e poi dalla semiretta *b* e successivamente prima da *b* e poi da *a*. Dimostrazione certo coerente con l’idea di fondo di Veronese di ricondurre molti teoremi a un unico impianto metodologico-dimostrativo, ma che ha davvero poco a che vedere con le procedure di Euclide. Seguono teoremi relativi alle mutue posizioni di rette e triangoli, quindi le proprietà di parallele e trasversali, seguite dallo studio delle distanze, ove tra l’altro viene dimostrato che rette parallele sono equidistanti (pp. 60-61). Seguono i criteri di uguaglianza dei triangoli, provati ricorrendo al concetto di corrispondenza di eguaglianza. Si hanno poi le relazioni di disuguaglianza tra gli elementi dei triangoli e i teoremi sulle somme degli angoli e sui punti notevoli dei triangoli. Segue la trattazione dei poligoni. Veronese tratta poi della circonferenza e del cerchio e osserva che i teoremi ottenuti per i segmenti della retta e gli angoli in base al postulato di esistenza della retta e a quello secondo cui ogni segmento rettilineo è divisibile in due parti uguali, possono essere applicati alla circonferenza sostituendo alla locuzione segmento di retta o angolo del fascio, quella di arco di circonferenza. Questo è un esempio della dualità “generalizzata” di cui si è parlato (p. 81).

Il terzo libro è dedicato alla geometria dello spazio e Veronese introduce subito concetti quali punto all’infinito, retta all’infinito e stella di raggi (p. 108). Oltre agli ordinari teoremi, ne sono dimostrati altri le cui conse-

guenze sono di grande interesse per la struttura dello spazio geometrico, ma che sembrano davvero trascendere l'insegnamento secondario; uno di questi teoremi è: “Le stelle di raggi sono uguali tra loro” che ha come conseguenza “lo spazio è uguale intorno ad ogni suo punto” (pp. 115-116), cioè una proprietà “in piccolo” dello spazio. Veronese tratta poi dei piani paralleli, dei diedri, dei triedri e degli angoloidi. A proposito dei triedri fa vedere come scambiando le parole triangolo-triedro, lato-faccia, vertice-spigolo, angolo-diedro, si ottengono molte proprietà dei triedri immediatamente dalle omologhe proprietà dei triangoli (pp. 141-142). In conclusione del libro sono enucleate le proprietà dei poliedri, del cilindro e della sfera. Col terzo libro ha termine la trattazione delle proprietà fondamentali (II libro, piano, III libro, spazio).
Nel quarto libro comincia la trattazione di argomenti più specifici ed essa è condotta insieme per il piano e per lo spazio. In particolare sono esposte altre proprietà delle figura uguale con teoremi di tipo decisamente proiettivo come “La corrispondenza di eguaglianza di due punteggiate eguali è determinata da due coppie distinte di punti corrispondenti” (p. 182). Viene introdotto il concetto di punto unito (p. 182). Un capitolo importante, il secondo, concerne i versi delle figure e sono definite congruenti due figure piane uguali se hanno due angoli dello stesso verso e due figure spaziali se hanno due triedri dello stesso verso (p. 194). La relazione tra geometria piana e geometria dello spazio è resa così ancor più stretta. Il concetto di movimento viene poi ricondotto alle relazioni geo-

metriche fondamentali, in particolare a quella di congruenza (pp. 197-201).

Il libro quinto è dedicato alla teoria dell'equivalenza per le figure piane e spaziali.

Il libro sesto tratta della teoria delle grandezze e qui l'apparato teorico è ancor più denso e complesso che nei libri precedenti: Veronese introduce il concetto di grandezza variabile che diventa indefinitamente piccola (pp. 245-246), cioè il concetto di limite, ma con un linguaggio suo proprio, ripreso dai *Fondamenti*, che rende la trattazione piuttosto particolare. Segue la trattazione delle grandezze commensurabili e incommensurabili, anche se in questo libro non sono usate esplicitamente queste parole (la teoria delle grandezze commensurabili e incommensurabili è rimandata al nono libro), ma i concetti-base sono introdotti qui. In particolare per i segmenti se si ha $AC \equiv AB\left(\frac{m_1}{n^1}+\frac{m_2}{n^2}+\ldots\frac{m_p}{n^p}\right)$, essendo *p* un intero, *AC* è commensurabile ad *AB* e *p* è un numero, se invece *p* tende all'infinito *AC* è incommensurabile con *AB*. Viene poi provata l'unicità del limite (p. 245) e altre proprietà delle grandezze. In base alla teoria delle grandezze viene poi esposta quella delle proporzioni nel piano e nello spazio, con la similitudine per i poligoni e i poliedri.

Il libro settimo presenta, in una forma decisamente più classica rispetto ai libri precedenti, la teoria dei poligoni e poliedri regolari.

L'ottavo libro concerne la lunghezza della circonferenza, l'area del cerchio, la superficie e il volume del cilindro e del cono e la superficie e il volume della sfera. Qui il concetto di limite è usato in modo del tutto esplicito in una pluralità di teoremi. Solo per dare un esempio: “La superficie di una zona sferica è il limite delle superficie generate dalle spezzate regolari inscritte nell’arco di cerchio massimo generatore della zona quando esso compie una rotazione completa intorno al diametro della sfera perpendicolare alla base della zona” (pp. 330-331).

Il nono libro riguarda le grandezze commensurabili e incommensurabili e le applicazione dell’algebra alla geometria.

In un confronto tra l’Enriques-Amaldi e gli *Elementi* di Veronese risulta evidente che la disposizione della materia è molto diversa: Enriques ha cercato di attenersi il più possibile alla partizione degli argomenti fornita da Euclide, pur intervenendo con notevoli aggiunte (come nello studio dei poligoni o dei diedri, dei triedri e dei poliedri) rispetto al testo euclideo e con una suddivisione della materia più netta di quanto avvenga in Euclide: ecco la diversa collocazione del parallelismo, la scelta di introdurre l’uso del compasso solo quando viene trattata la circonferenza e il cerchio e così via. Ciò è dovuto a esigenze didattiche: rendere più chiara e fruibile la materia. La sua scelta sembra tutt’altro che casuale, ma deriva da tre esigenze ben precise: 1) cercare di mitigare le difficoltà che presenta una riproposizione pura e semplice di Euclide; 2) rimanere nell’alveo di un approccio sintetico ed evitare le notevoli imprecisioni di una certa tradizione manualistica che, ispirandosi al testo di Legendre, aveva finito per svilupparne gli aspetti peggiori[53]; 3) evitare le notevoli difficoltà di approccio

[53] Si veda, per esempio, Bolondi, 2005.

presenti in testi, pur di grande livello, come gli *Elementi* di De Paolis o quelli di Veronese. Quanto a Veronese, egli nel proprio testo, propone non solo un volume didattico, ma espone anche una visione ben precisa della geometria che, indubbiamente, è più complessa di quella che si riscontra nell'Enriques-Amaldi e che è basata su: 1) ricondurre i concetti geometrici a quelli più generali di gruppo, serie, sistema omogeneo, sviluppati nel *Fondamenti*; 2) ricondurre la relazione di uguaglianza e congruenza a quella più astratta di corrispondenza di uguaglianza; 3) ricondurre la teoria delle grandezze ai concetti e al linguaggio espresso nei *Fondamenti*, in modo da introdurre il giovane a un modo di ragionare che consenta poi un approccio più semplice a tutta la teoria dei numeri e delle grandezze infinite e infinitesime non archimedee esposte in quell'opera; 4) quanto alla partizione della materia: tener separate le proprietà fondamentali del piano e dello spazio, ma condurre una trattazione congiunta di teorie specifiche, con un approccio di tipo strutturalista più che fusionista. Il quadro presentato da Veronese è molto affascinante, tuttavia presenta delle difficoltà sul piano didattico: le dimostrazioni, specialmente quelle in cui è coinvolto il concetto di uguaglianza o congruenza, sono molto astratte e sembrano davvero poco adatte ad essere proposte in una scuola superiore. Inoltre, a prescindere da questo, sono problematici alcuni aspetti logici: ad esempio nozioni quali gruppo, serie, sistema lineare non sempre sembrano ben definite, l'uso e il ruolo del principio di dualità generalizzato non è chiarito fino in fondo; la teoria delle grandezze esposta nei *Fondamenti* ha molti difetti logici[54], anche se invero questi non sembrano riguardare la sottosezione presente negli *Elementi*. Quadro quindi affascinante, ma molto complesso: si comprende che sul piano didattico l'Enriques-Amaldi abbia avuto successo in confronto agli *Elementi* di Veronese.

Istituiamo ora un sintetico confronto con gli *Elementi di geometria* di De Paolis. Il confronto sarà in questo caso più breve in parte perché valgono, a proposito della maggior fruibilità didattica del testo enriquesiano, le stesse considerazioni fatte per Veronese e in parte perché la letteratura sul fusionismo è più abbondante di quanto sia quella su Veronese.

La trattazione del De Paolis, tipicamente fusionista, è ripartita in sei libri. Oltre alla fusione di geometria piana e spaziale, l'altra caratteristica generale del testo di De Paolis è l'uso del movimento per le nozioni di uguaglianza e congruenza: sono uguali figure sovrapponibili col movimento.

Il primo libro è intitolato "Le verità fondamentali della geometria". In precedenza vi è una interessante osservazione che può essere interpretata come una giustificazione euristica della definizione della uguaglianza tramite movimento e del fatto che l'ambiente in cui, a livello percettivo, nasce la geometria è lo spazio e non il piano. Da qui la scelta fusionista. Per cui fusionismo e definizione della eguaglianza come movimento sono correlate. Scrive De Paolis: lo spazio può essere ritenuto "[…] omogeneo, ossia ugualmente accessibile in ogni sua parte. Così, mentre guidati dall'esperienza riconosciamo che certi corpi (solidi) non vengono defor-

[54] Si veda Bussotti, 1997.

mati, quando si muovono, ossia ci producono le stesse impressioni, qualunque posto occupino nello spazio, generalizziamo dicendo: in tutto lo spazio è possibile il movimento di certi corpi (solidi), senza deformazione"[55]. Nel primo libro sono trattate le figure geometriche fondamentali: segmenti, angoli, diedri. Viene introdotto anche il tema del parallelismo. L'assioma della parallele è nella forma per cui per un punto esterno a una retta data passa una e una sola parallela (p. 29). Segue la trattazione delle rette e piani perpendicolari, delle figure simmetriche, del cerchio e della sfera. In molti teoremi si dimostra prima il caso spaziale di cui quello piano risulta poi una applicazione particolare. Esempio, teorema 1, pp. 33-34: "Gli angoli formati da due rette che s'incontrano, sono uguali agli angoli formati da due rette ad esse parallele, e che pure s'incontrano". Praticamente in ogni teorema si fa uso del movimento rigido.

Il secondo libro riguarda le figure geometriche fondamentali: triangoli, poligoni, triedri, angoloidi, poliedri, con tutte le relazioni di uguaglianza e disuguaglianza tra lati, angoli, spigoli, vertici, facce. Ci sarebbero molte annotazioni interessanti, qui ci possiamo limitare solo a notare un particolarità: definendo la congruenza tramite le sovrapponibilità col movimento, alcune figure opposte al vertice non risultano uguali. Ciò, a differenza che per gli angoli, accade per i triedri: infatti due triedri sono definiti uguali se, trasportati convenientemente nello spazio possono coincidere (p. 132). De Paolis prosegue asserendo che due triedri uguali hanno uguali le facce e i diedri corrispondenti, ma non è vero l'inverso perché due trie-

[55] De Paolis, 1894, p. 5.

dri possono avere uguali facce e diedri ma non essere uguali perché non sovrapponibili. Ciò avviene con due diedri opposti al vertice. Quindi, la definizione della uguaglianza tramite movimento sembra molto intuitiva, ma ha conseguenze per niente intuitive, come questa.

Il terzo libro riguarda i cerchi, le superfici cilindriche e coniche e le sfere. Per dare anche qui un esempio di come De Paolis tratti i problemi considerando tutto lo spazio, consideriamo il paragrafo "Circoli che soddisfano date condizioni" (pp. 193-197): viene qui dimostrato (pp. 193-194) che per due punti dati passano infiniti cerchi ed il luogo dei loro centri è il piano perpendicolare, nel suo punto medio, al segmento che ha per estremi i due punti dati. Classica è la restrizione di questa asserto al piano ove il luogo dei centri degli infiniti cerchi che passano per due punti A e B è l'asse del segmento AB. Di nuovo tutti i teoremi concernenti l'uguaglianza di figure sono dimostrati ricorrendo al movimento. A differenza che nei manuali che nell'Enriques-Amaldi e nel manuale di Veronese, molto dettagliata è la parte sugli angoli sferici e i poligoni sferici, soprattutto i triangoli (pp. 244-258).

Il quarto libro concerne la teoria dell'equivalenza con risultati e metodologie dimostrative classiche per quanto riguarda i poligoni e poliedri rettilinei. Molto interessante anche qui le parti sui poligoni sferici e, in particolare, le dimostrazioni che un parallelogramma sferico e un triangolo sferico sono equivalenti alla metà del loro eccesso (pp. 320-324). Nella teoria delle grandezze è esplicitamente introdotto il concetto di limite (p. 330), in maniera molto intuitiva.

Infine i libri quinto e sesto sono dedicati rispettivamente alla teoria delle proporzioni e della misura. La trattazione è condotta in maniera più formale che nell'Enriques-Amaldi.

In conclusione: il manuale di De Paolis è un eccellente e coerente testo fusionista, a differenza di Enriques e Veronese è usato estensivamente il concetto di movimento e la fusione tra geometria piana e geometria spaziale è completa. Il testo è meno astratto di quello di Veronese e introduce argomenti potenzialmente stimolanti anche per i ragazzi delle superiori, come, ad esempio, quello dell'eccesso angolare nei poligoni sferici. Anche qui si ha una scelta didattica che si allontana da Euclide molto di più dell'Enriques-Amaldi. Infine la scelta di Enriques, condivisa da Amaldi, risultò quella vincente: vicini a Euclide, cercando di ridurre gli aspetti più spigolosi della teoria delle proporzioni e di introdurre una partizione della materia scandita in maniera più netta che negli *Elementi* del geometra greco, sensibili ad alcune innovazioni e problemi derivanti dalla moderna critica dei fondamenti. Rigorosi senza entrare in dettagli logici che potrebbero risultare ostici e superflui per menti che ancora devono apprendere a lavorare con gli strumenti della geometria.

Bibliografia

Vedasi parte 1 di 2 su n. 6 di *Euclide.Giornale di matematica per i giovani*