Cristiano Teodoro
cristianoteodoro@virgilio.it

GENERAZIONE DI TERNE PITAGORICHE PRIMITIVE PARTICOLARI
(Generation of particular Pythagorean Primitive Triples)

***Sommario**: nel presente articolo viene proposto ed illustrato un nuovo algoritmo per il calcolo e la generazione di terne pitagoriche primitive aventi cateti la cui differenza è pari ad un qualsiasi valore N scelto in un definito campo di valori numerici, ad esempio tra* 1 *e* 10^{12} **.** *Per avere dei risultati concreti con l'utilizzo di tale algoritmo, si sono realizzati due programmi scritti in linguaggio Qbasic. Il primo programma* (allegato1) *è dedicato per un dato N alla generazione, se esistono, delle relative terne primitive. Con questo programma viene calcolato e generato per il considerato valore di N un limitato numero di terne, precisamente quelle che si possono calcolare in modo esatto sino alla cifra delle unità. Poiché nelle operazioni aritmetiche viene utilizzata la sola doppia precisione le terne generate e presentate sono solo quelle che hanno i valori dei cateti a dell'ipotenusa composti ciascuno da non più di 15 cifre. Il secondo programma* (Allegato 2), *è dedicato alla generazione di terne con cateti e ipotenusa di valore elevato in quanto le operazioni aritmetiche vengono eseguite con una adeguata aritmetica a precisione multipla anche qui con l'introduzione di un N qualsiasi scelto entro il campo* $1 \div 10^{12}$ *di possibili suo valori. Eseguendo questo programma si scopre innanzitutto se per il valore scelto N esistono terne primitive o meno: se non esistono si termina il programma; se invece esistono si vanno a calcolare i valori anche molto grandi della ipotenusa e dei cateti relativi alla ennesima terna primitiva prescelta, ad esempio la* 10000^{a} *terna*, *prendendo in considerazione per l'ordine delle terne il valore crescente della ipotenusa. Un pregio dell'algoritmo è senz'altro quello della rapidità di tempo con cui si possono avere i risultati di terne aventi i valori numerici dei cateti e dell'ipotenusa costituiti anche da migliaia di cifre.*

***Abstract**: in this paper we propose and explain an new algorithm for the particular pythagorean primitive triples computation and generation. These triples have the N value as difference between the legs . This gap can have any value between* 1 *and* 10^{12} **.** *We obtain actual results by the implementation of two programs in Qbasic language. The former (Allegato 1) considers the generation of possible primitive triples pertinent to requested N and compute and produce only the restricted number of primitive triples, calculated exactly until the least significant digit. Indeed in this program we use only the double - precision arithmetic and we have exact results for triples with hypotenuse and leg, that have numerical values with a digit number* ≤ 15. *The second program(Allegato 2) is pertinent to computation and generation of triples with the legs and the hypotenuse having as well big values, because we employ a multiple- precision arithmetic. In this program, introducing any chosen N value in the range* $1 \div 10^{12}$ *we find if for this N there are primitive triples or not. If so we compute the big numerical values of hypotenuse and legs relative to the nth selected triple, for example the ten thousandth triple, considering for the triples serial number the increasing hypotenuse value. The merit of this algorithm is the time rapidity for the numerical values achievement.*

1 – Introduzione

In articoli comparsi anche recentemente sul web si è parlato di Terne Pitagoriche, del problema di trovare terne particolari e di calcolare con metodi efficienti i triangoli rettangoli aventi cateti la cui lunghezza è data da numeri interi consecutivi. Qui ci occuperemo di un problema analogo, ma più generale rivolto sempre a considerare terne particolari ed al calcolo dei loro valori numerici.Le Terne che prenderemo in considerazione saranno quelle che possiedono insieme le tre seguenti caratteristiche:

1) - terne con l'ipotenusa e cateti costituiti da numeri interi
2) - terne per le quali la differenza fra i valori numerici dei due cateti è un valore numerico prefissato N, da poter scegliere fra un qualsiasi valore nel campo $1 \leq N \leq Nm$ con **Nm ad esempio pari a** 10^{12}
3) - terne denominate primitive, cioè quelle con cateti ed ipotenusa non aventi fattori comuni, cioè primi fra loro .

Prima di passare a calcolare ed a trovare i valori numerici esatti, anche elevati, dei cateti e della ipotenusa, risulta necessario individuare per quali valori di N esistono Terne con i requisiti richiesti. In TABELLA 1 si riportano ad esempio nel campo esplorato da 1 a 100 i valori di N solo in corrispondenza dei quali esistono terne primitive; in essa sono anche mostrati per ciascun N i valori della ipotenusa e dei cateti riguardanti la **terna primitiva** avente i valori numerici più piccoli

TABELLA 1

| N |	**ipotenusa**	**cateto minore**	**cateto maggiore**
1	**5**	**3**	**4**
7	**13**	**5**	**12**
17	**25**	**7**	**24**
23	**37**	**12**	**35**
31	**41**	**9**	**40**
41	**85**	**36**	**77**
47	**65**	**16**	**63**
71	**85**	**13**	**84**
73	**125**	**44**	**117**
79	**101**	**20**	**99**
89	**149**	**51**	**140**
97	**113**	**15**	**112**

Con l'algoritmo che si vuole proporre, la ricerca della esistenza di tale tipo di **terna primitiva** può effettuarsi in un tempo molto contenuto per un qualsiasi N anche elevato entro il campo di esplorazione menzionato in 2).

In TABELLA 2 si riportano alcuni altri esempi di valori N scelti nel campo $1 \div 10^{12}$ per ciascuno dei quali esistono terne primitive; per ciascun N i valori riportati della ipotenusa e dei cateti sono relativi alla **prima terna primitiva**, quella cioè avente l'ipotenusa più piccola.

TABELLA 2

| N |	ipotenusa	cateto minore	cateto maggiore
829	901	60	899
6991	11105	3536	10527
49871	80609	26320	76191
123457	142705	18096	141553
1234567	1441765	66985061	161450580
42221143	48424157	5848532	48069675
94465519	174794989	66985061	161450580
889901311	1469863201	494487840	1384189151
1000000007	1292045917	264651108	1264651115
9098765431	10249593625	1092443376	10191208807
1000000000007	1309432666813	279299014788	1279299014795

Si può facilmente verificare che i valori numerici dell'ipotenusa e dei cateti posti sulla stessa riga non hanno fra loro fattori in comune, sono cioè coprimi, come infatti deve essere. Pertanto ogni terna riportata in tabella è di tipo primitivo.

2 - Illustrazione dell' algoritmo

2.1 formule di Euclide e equazioni diofantee

Illustriamo ora l'algoritmo partendo dalle seguenti formule relative all'ipotenusa ed ai cateti di un triangolo rettangolo, formule già note dall'antica Grecia (Euclide, Diofanto) [Be], [Da], [CR], [H.W.]:

cateto 1: C1 = $m^2 - n^2$; cateto 2: C2 = $2 \cdot m \cdot n$; ipotenusa: A = $m^2 + n^2$
dove m e n sono numeri interi positivi

Per le terne pitagoriche che vogliamo considerare, vale a dire per quelle terne che hanno i cateti che differiscono di un valore N cioè $N = |\mathrm{C1} - \mathrm{C2}|$ od anche C1 – C2 = ±N si ha :

$$m^2 - n^2 = 2 \cdot m \cdot n \pm N \quad \text{equivalente a} \quad m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n - 2 \cdot n^2 = \pm N$$

che è conveniente scrivere come segue: $(m-n)^2 - 2 \cdot n^2 = \pm N$
posto $x = m\text{-}n$ *ed* $y = n$ risulta la seguente relazione:

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = \pm N$$

che rappresenta le due equazioni quadratiche indeterminate:

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = N \qquad (1)$$

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = -N \qquad (2)$$

Per ognuna di esse occorrerà trovare per le incognite x e y i valori numerici interi minimi che la soddisfano. Una volta trovati tali valori, essendo $\boldsymbol{m = x + y}$ **e** $\boldsymbol{n = y}$ si potrà risalire ai valori dei cateti C1 , C2 e della ipotenusa A tramite le formule sopra dette:
C1 = $(x+y)^2 - y^2$; C2 = $2 \cdot (x+y) \cdot y$; A = $(x+y)^2 + y^2$

2. 2 - Considerazioni sull'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$

Per trovare i più piccoli valori per x ed y che soddisfano l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$, dato che il coefficiente di y^2 è piccolo ed il valore di N da prendere in considerazione è relativamente piccolo (massimo valore di N preso in esame Nm = 10^{12} **)** si può fare ricorso alla ricerca esaustiva (brute – force search) dei suddetti valori impiegando anche così un tempo di calcolo breve in quanto, indicati con x_1 e y_1 rispettivamente il più piccolo valore positivo per x ed il più piccolo valore positivo per y che soddisfano l'equazione (1), essi devono trovarsi se esistono nel seguente campo limitato di interi [Fr], [Na], [Ro]:

per x $\quad 1 < x_1 < \sqrt{2 \cdot N}$

per y $\quad 1 < y_1 < \sqrt{\frac{N}{2}}$

Se entro i campi suddetti non si trovasse nessun valore di x o di y tali da soddisfare l'equazione (1) si può conclude che essa non è risolvibile. Si noti che la ricerca di y_1 anche per valori di N dell'ordine di 10^{12} è ristretta ad un valore non superiore a 707106
Ad esempio per N =10^{12} + 7 i valori di x_1 e y_1 che soddisfano la (1) sono i seguenti:
x_1= 1014955; y_1= 122747; come si può facilmente verificare.Il tempo di calcolo per trovare tali valori risulta al massimo di qualche decimo di secondo (vedi più sotto Esempio1) anche con l'utilizzo di un microprocessore non particolarmente sofisticato.
Se tuttavia si prende in considerazione un valore N per il quale non esistono terne primitive occorrerà esplorare per y tutto il suddetto campo: ad esempio pr N = 10^{12} + 3 si dovrà andare a saggiare y fino al valore $\sqrt{\frac{N}{2}}$ = 707106 con un tempo al massimo di qualche decimo di secondo (< 0.8 secondi) col normale computer commerciale utilizzato nei programmi sotto riportati.
Una volta trovati x_1 e y_1 per calcolare i successivi valori di x e y che soddisfano la (1) in modo da rendere molto veloce il loro calcolo si possono utilizzare le seguenti originali formule iterative:

$$x_k = x_{k-1} + 2 \cdot y_{k-1} \qquad (3)$$

$$y_k = x_{k-1} + y_{k-1} \qquad (4)$$

con k = 2, 3, 4 ……… e dove i valori iniziali x_1 e y_1 sono gli interi positivi più piccoli, trovati con la ricerca esaustiva che soddisfano la (1).
Non è infatti difficile dimostrare per induzione quanto segue :

a) *oltre i valori iniziali* x_1 *e* y_1, *i valori* x_k *e* y_k *trovati con le formule suddette relativi agli indici dispari di k, cioè i valori* x_3, x_5, x_7......... *ed i corrispondenti valori* y_3, y_5, y_7,..... *sono valori che soddisfano l'equazione* $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$ *(1)*

b) *i valori di* x_k *e* y_k *trovati con le formule suddette relativi agli indici pari di k, cioè ed i corrispondenti* y_2, y_4, y_6,..... *sono valori che soddisfano l'equazione* $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$

2. 3 - Considerazioni sull'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$

Analogamente per l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$ tramite sempre una ricerca esaustiva i più piccoli interi positivi x_1 e y_1 che soddisfano l'equazione, se esistono, devono trovarsi nel seguente campo di valori [Fr],[Na][Ro]:

per x $\quad 1 < x_1 < \sqrt{NA}$

per y $\quad \sqrt{\frac{NA}{2}} < y_1 < \sqrt{NA}$ dove NA = | -N |

Essendo il campo di ricerca anche qui abbastanza limitato si possono rapidamente trovare tali valori. (vedi esempio 1).
Prendendo in considerazione sempre le formule iterative (3) e (4) e considerando i valori positivi più piccoli di x e di y soddisfacenti la (2) quali valori iniziali x_1 e y_1 risulta anche qui che:

a1) oltre i valori iniziali x_1 *e* y_1, *i valori* x_k *e* y_k *trovati con le formule suddette relativi agli indici dispari di k, cioè i valori* x_3, x_5, x_7......... *ed i corrispondenti valori* y_3, y_5, y_7,..... *sono valori che soddisfano la* $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$

b1) i valori x_k *e* y_k *trovati con le formule suddette relativi agli indici pari di k, cioè* x_2, x_4, x_6........ *ed i corrispondenti* y_2, y_4, y_6,..... *sono valori che soddisfano l'equazione* $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$ **.**

2. 4 - Calcolo delle terne pitagoriche primitive

Tenendo ora presente le formule di Euclide e che ***m* = *x* + *y*** **ed n = y** , si possono innanzitutto trovare i valori dei cateti e dell'ipotenusa della **terna pitagorica più piccola** che presenta le caratteristiche 1) e 2) sopra enunciate:

$C1_1 = (x_1 + y_1)^2 - y_1^{\,2}$ $\qquad C2_1 = 2 \cdot (x_1 + y_1) \cdot y_1$ $\qquad A_1 = (x_1 + y_1)^2 + y_1^{\,2}$

Per controllare inoltre se la terna risulta avere anche caratteristica 3) , cioè se essa è primitiva, occorre verificare che i valori $(x_1 + y_1)$ e y_1 siano fra loro primi e non entrambi dispari [C.R] [Sh].
Poiché conosciamo, per quanto illustrato sopra, i successivi valori x_k e y_k soddisfacenti l'equazione, potremo ricavare con l'utilizzo delle formule iterative (3) e (4) tutte le altre terne pitagoriche anch'esse, come è facile dimostrare, tutte primitive, eseguendo i seguenti due cicli di istruzioni scritti qui linguaggio QBasic:
1° ciclo , relativo alla equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$ con x $= x_1$ e y $= y_1$ quali valori interi positivi più piccoli soddisfacenti tale equazione:

```
x = x1 : y =y1
FOR h = 2  to  n
     xo  = x
     x = x  +  2 · y
     y  = xo  +  y
     m = x + y : n = y
     A = m ^ 2  +  n ^ 2
     C1 =2 * m * n :
     C2 = m ^ 2  -  n ^ 2
  PRINT k ; x, y, A ; C1 ; C2
NEXT k
```

2° ciclo, relativo alla equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$ con $x = x_1$ e y $= y_1$ quali valori interi positivi più piccoli soddisfacenti tale equazione:

```
x = x1 : y =y1
FOR h = 2  to  n
     xo  = x
     x = x  +  2 · y
     y  = xo  +  y
     m = x + y : n = y
     A = m ^ 2  +  n ^ 2
     C1 =2 * m * n :
     C2 = m ^ 2  -  n ^ 2
  PRINT k ; x, y, A ; C1 ; C2
NEXT k
```

Si vuol mettere in evidenza che è necessario effettuare la ricerca dei valori di ***m*** e di ***n*** e quindi dei valori della ipotenusa e dei cateti sia per il valore +N che per il valore -N, in quanto, ad eccezione di N = ± 1 , si ottengono differenti valori nell'uno e nell'altro caso (vedasi per chiarire quanto detto i risultati riportati nell**'Esempio 3** relativo a N = ± 47)
Per N = ± 1 risulta però sufficiente effettuare la ricerca solo per il valore N = -1.
Può anche risultare che per il valore positivo di N esistono terne primitive mentre per il valore negativo di N non esistono terne primitive o viceversa. Ad esempio per N = 343 esistono terne primitive mentre per n = -343 non esistono. Viceversa per N = 3577 non ci sono terne primitive mentre per N = -3577 esistono terne primitive.
Per avere dei risultati concreti si sono sviluppati due programmi in linguaggio Qbasic che presentano le prestazioni desiderate.
Con il 1° programma (**ALLEGATO 1**), dove ci si limita ad utilizzare la aritmetica a doppia precisione offerta dal software del QBASIC, introducendo un N qualsiasi (N = differenza di valore fra i due cateti) entro il campo $1 \div 10^{12}$ di suoi possibili valori ed eseguendo il programma, si scopre innanzitutto se le terne relative a tale N sono primitive o meno: se non sono primitive si termina il programma.Se invece esistono terne primitive si trova un limitato numero di terne primitive relative sia al valore + N che al valore – N, partendo a presentare per ognuna delle due serie di terne i risultati numerici dalla terna avente **l'ipotenusa di più piccolo valore**.
In effetti ci si limita a trovare ed a mostrare solo quelle terne che presentano valori numerici esatti sino alla cifra delle unità in quanto con l'uso della l'aritmetica a doppia precisione si ottengono nei calcoli risultati esatti solo se essi sono costituiti da non più di 15 cifre.
Si riporta qui di seguito qualche esempio di quello che compare sullo schermo del monitor eseguendo il programma

esempio 1

```
Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 889701311
le terne relative a 889701311 sono primitive
valori iniziali: x = 31231   y = 6545

 1          1469863201    494487840    1384189151
 2          8166943585     6202592544   5312891233
 3          47531798309    33162262180   34051963491
 4          277023846269   196329785780  195440084469
 5          1614611279305   1141257647256  1142147348567
 6          9410643829561    6654774903000   6653885201689
 7          54849251698061   38783832965500   38784722666811
 8          319684866358805  226051781695244   226050891993933
TERNA        IPOTENUSA         CATETO        CATETO
-------------------------------------------------------------------
le terne relative a -889701311 sono primitive
valori iniziali: x = 18141   y = 24686
 1          2443550525   2114454644   1224753333
 2          14009067529   9451062360    10340763671
 3          81610854649    58150724760   57261023449
 4          475656060365   335894480956   336784182267
 5          2772325507541  1960774966220   1959885264909
 6          16158296984881  11425196511120  11426086212431
 7          94177456401745    66593962905744    66593073204433
 8          548906441425589    388135022118100  388135911819411
TERNA        IPOTENUSA         CATETO        CATETO

PRIME 16 TERNE CON DIFFERENZA FRA I CATETI PARI A 889701311
tempo di calcolo: 0 secondi
```

Esempio 2

```
Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 1000000000007
le terne relative a 1000000000007 sono primitive;
valori iniziali: x = 1014955   y= 122747
 1        1309432666813    1279299014788   1279299014795
 2        7045494059605     5456762378004    4456762377997
 3        40963531690817     28461275253208    29461275253215
 4        238735696085297     169310889141272   168310889141265
 5        1391450644820965     983404059594396     984404059594403
TERNA        IPOTENUSA          CATETO             CATETO
--------------------------------------------------------------------------
le terne relative a -1000000000007 sono primitive;
valori iniziali: x = 499521   y= 790418
 1        2288703238445    2039182009004    1039182008997
 2        13022837751337    8694952503888     9694952503895
 3        75848323269577     54130533014352    53130533014345
 4        442067101866125     312088245582196   313088245582203
TERNA        IPOTENUSA          CATETO             CATETO
PRIME 9 TERNE PRIMITIVE CON DIFFERENZA FRA I CATETI PARI A 1000000000007
tempo di calcolo: .21875 secondi
```

Esempio 3

```
Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 47
le terne relative a 47 sono primitive;
valori iniziali: x = 7   y = 1
 1         65   16   63
 2         353   272   225
 3         2053   1428   1475
 4         11965    8484   8437
 5         69737   49288   49335
 6         406457   287432  287385
 7         2369005   1675116  1675163
 8         13807573   9763452  9763405
 9         80476433   56905408  56905455
 10        469051025   331669184   331669137
 11        2733829717   1933109508  1933109555
 12        15933927277   11266988052  11266988005
 13        92869733945   65668818616   65668818663
 14        541284476393   382745923832   382745923785
 15        3154837124413   2230806724188   2230806724235
 16        18387738270085   13002094421484   13002094421437
 17        107171592496097   75781759804528   75781759804575
 18        624641816706497   441688464405872   441688464405825
TERNA       IPOTENUSA       CATETO        CATETO
--------------------------------------------------------------------
le terne relative a -47 sono primitive;
 valori iniziali: x = 5   y= 6
 1         157   132   85
 2         905    616   663
 3         5273   3752   3705
 4         30733   21708    21755
 5         179125   126684   126637
 6         1044017   738208   738255
 7         6084977    4302752   4302705
 8         35465845    25078116   25078163
 9         206710093    146166132   146166085
 10        1204794713    851918488   851918535
 11        7022058185    4965344984   4965344937
 12        40927554397    28940151228   28940151275
 13        238543268197   168675562572   168675562525
 14        1390332054785   983113224016   983113224063
 15        8103449060513    5730003781712   5730003781665
 16        47230362308293   33396909466068   33396909466115
 17        275278724789245   194651453014884   194651453014837
TERNA        IPOTENUSA       CATETO        CATETO

PRIME 35 TERNE CON DIFFERENZA FRA I CATETI PARI A 47
tempo di calcolo: .046875 secondi
```

Se per il valore |N| scelto quale differenza fra i due cateti non esistono terne pitagoriche primitive eseguendo il programma sullo schermo del monitor comparirà un risultato come quello qui presentato per |N| = 3

Esempio 4

```
Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 3
per N = 3 NON ci sono TERNE PRIMITIVE
```

Considerando sempre il programma in **ALLEGATO 1,** con semplici modifiche ed opportune istruzioni da effettuare su di esso si possono ricavare entro uno scelto campo di valori tutti e soli i valori di N per i quali esistono terne pitagoriche primitive, come pure il loro numero e la loro percentuale rispetto al totale dei valori esplorati. Ad esempio nel campo esplorato 40001 ÷ 5000 si può ottenere sullo schermo del monitor il riquadro sottostante in cui compaiono tutti e soli i valori positivi e negativi di N per i quali esistono terne primitive con una percentuale de 9.5 % per valori positivi di N e del 9.2% per valori negativi di N.

a quale N iniziale ? 4000
a quale N finale ? 5000
Valori di | N | fra 4000 e 5000 per i quali ci sono terne pitagoriche primitive:

4001 4007 4039 4049 4057 4063 4073 4079 4097 4111 4127 4129 4151
4153 4159 4177 4183 4193 4201 4207 4217 4223 4231 4241 4247 4249
4271 4273 4289 4297 4319 4327 4337 4361 4369 4391 4393 4409 4417
4423 4439 4441 4447 4457 4463 4471 4481 4487 4513 4519 4529 4559
4561 4567 4577 4583 4591 4607 4633 4639 4649 4657 4663 4673 4679
4681 4703 4711 4721 4729 4751 4753 4759 4777 4783 4793 4799 4801
4817 4831 4841 4871 4879 4889 4903 4913 4919 4937 4943 4951 4967
4969 4991 4993 4999
numero di valori positivi di N per i quali vi sono terne primitive: 95

-4001 -4007 -4039 -4049 -4057 -4063 -4073 -4079 -4097 -4111 -4127 -4129 -4151
-4153 -4159 -4177 -4183 -4193 -4201 -4207 -4217 -4223 -4231 -4241 -4247 -4249
-4271 -4273 -4289 -4297 -4319 -4327 -4337 -4369 -4391 -4393 -4409 -4417 -4423
-4439 -4441 -4447 -4457 -4463 -4471 -4481 -4487 -4513 -4519 -4529 -4559 -4561
-4567 -4577 -4583 -4591 -4607 -4633 -4639 -4649 -4657 -4663 -4673 -4679 -4681
-4703 -4711 -4721 -4729 -4751 -4759 -4777 -4783 -4793 -4799 -4801 -4817 -4831
-4841 -4871 -4879 -4889 -4903 -4919 -4937 -4943 -4951 -4967 -4969 -4991 -4993
-4999
numero di valori negativi di N per i quali vi sono terne primitive: 92
numero totale di valori positivi e negativi di N per i quali vi sono terne primitive: 187

con il 2° programma (**ALLEGATO 2**), dove le operazioni aritmetiche vengono eseguite con una adeguata aritmetica a precisione multipla anche qui introducendo un N qualsiasi (N = differenza di valore fra i due cateti) entro il campo 1÷10^9 di possibili suoi valori ed eseguendo il programma si scopre innanzitutto se le terne relative a tale N sono primitive o meno: se non sono primitive si termina il programma, se invece esistono si vanno a calcolare i valori anche molto grandi della ipotenusa e dei due cateti relativi alla **terna ennesima primitiva prescelta,** prendendo in considerazione per l'ordine delle terne il valore crescente della ipotenusa.
Qui di seguito si mostra nella TABELLA 4 qualche esempio riguardante i tempi necessari per il calcolo dei valori numerici dell'ipotenusa e dei cateti riguardanti la terna ennesima prescelta in relazione al valore N considerato, dando anche il numero di cifre di cui risulta composto il valore della ipotenusa.

TABELLA 4

N	TERNA	n° cifre ipotenusa	tempo di calcolo (secondi)
123457	100ª	44	immediato
123457	500ª	197	0. 06
123457	1000ª	388	0. 1
123457	5000ª	1919	1. 5
123457	10000ª	3833	5. 5
123457	15000ª	5747	11. 9
123457	20000ª	7661	20. 8
123457	30000ª	11489	45. 5
123457	40000ª	15316	80. 5
123457	50000ª	19144	124. 3

Nella TABELLA 5 vengono riportati per diversi valori di N il numero di cifre che compongono il valore numerico dell'ipotenusa ed il tempo impiegato per il calcolo dei valori dell'ipotenusa e dei cateti relativi alla 10000ª terna primitiva TABELLA 5

TABELLA 5

N	TERNA	n° cifre della Ipotenusa	tempo di calcolo (secondi)
1	10000ª	7656	20. 9
7	10000ª	3829	5. 49
41	10000ª	3829	5. 49
829	10000ª	3831	5. 49
6991	10000ª	3832	5. 5
49871	10000ª	3833	5. 49
123457	10000ª	3833	5. 5
1234567	10000ª	3834	5. 48
54267337	10000ª	3836	5. 5
94465519	10000ª	3836	5. 5
889701311	10000ª	3837	5 .5
1000000007	10000ª	3837	5. 54
57485271799199	10000ª	3847	7. 80

Si riportano alcuni risultati ottenibili con il programma dell'**ALLEGATO 2**

1° ESEMPIO: riguarda il calcolo dei valori dei cateti e della ipotenusa relativi alla 1000ª terna con differenza fra i cateti pari a N = ± 103

quale terna n -esima vuoi visualizzare? 1000 –esima
quale differenza N vuoi fra i cateti ? 103
per N = 103 si hanno terne primitive
valori iniziali per N = 103 : x = 11 y = 3
per N =-103 si hanno terne primitive
valori iniziali per N = -103 : x = 5 y = 8

valore del CATETO 1
1644201 5637823 9060551 1515357 4468539 1049083 0561460 5969490 1538214 4359910
2889365 3856094 6921009 9013590 9774860 5329182 0099160 5175905 0629035 6028735
3693480 2115155 7706243 9901304 9899228 6023473 7174635 5250427 6678436 2482503
6421106 7035065 8761392 4187496 8031438 1545012 4638040 7698016 9479649 4196608
5121192 9529669 2445022 9088390 4431030 4589031 5054645 8531511 0489618 4803549
4911660 4924233 0348447 2746021 0140584
numero di cifre del cateto 1: 385

valore del CATETO 2
1644201 5637823 9060551 1515357 4468539 1049083 0561460 5969490 1538214 4359910
2889365 3856094 6921009 9013590 9774860 5329182 0099160 5175905 0629035 6028735
3693480 2115155 7706243 9901304 9899228 6023473 7174635 5250427 6678436 2482503
6421106 7035065 8761392 4187496 8031438 1545012 4638040 7698016 9479649 4196608
5121192 9529669 2445022 9088390 4431030 4589031 5054645 8531511 0489618 4803549
4911660 4924233 0348447 2746021 0140687
numero di cifre del cateto 2: 385

valore dell'IPOTENUSA
2325252 1507761 0827377 4980904 2029816 2819676 8996621 8332120 4726288 2004174
0044324 1456420 5807270 0081609 1220733 0082069 2606560 5556111 7193162 9244254
5595893 4630823 1217341 1898932 6996158 3921470 8740126 0291884 3751341 2904564
4845349 1195895 9596652 7361972 8585828 4646977 7676020 7628168 9986979 0602651
1912006 2672002 1452076 4504238 2438561 1192231 8511338 4038987 1961459 5666901
4989701 6649695 6520050 1864493 4060305
numero di cifre dell'ipotenusa: 385

tempo di calcolo: 0. 05078125 secondi

2° ESEMPIO : riguarda il calcolo dei valori dei cateti e della ipotenusa relativi alla 2000 ^{a} terna con differenza fra i cateti pari a N = ± 7

quale terna n-esima vuoi visualizzare? 2000
quale differenza N vuoi fra i cateti? 7
le terne sono primitive ; valori iniziali per N = 7 : x = 3 y = 1
le terne sono primitive ; valori iniziali per N = -7 : x = 1 y = 2

valore del CATETO 1

718 1938478 8237243 9955152 7671394 5614062 3917917 1531055 9848138 2770597
7785888 1164096 6436498 3415616 9844018 6176412 9280191 6942875 7683967 8350633
9769508 2574673 4409251 2690549 6483646 3630090 7283649 2138464 9298984 5034896
4722689 8350308 3391193 9209655 1007210 2645582 2028974 0093524 4206256 5797181
6827706 3459290 2339492 6399239 0567629 2701261 7251199 3667102 5086182 7956428
9839174 1041758 6087409 0673114 0554256 3957060 4217857 1664157 9635455 7617180
4393078 7550201 7093375 8398900 1023223 5628914 4018126 6429805 3124482 0623105
2696136 2167541 4896509 9717260 3133125 3483191 6160913 7836830 5776318 0305096
7204442 5893198 3271796 0806959 6135579 6795238 2792111 4773690 7828297 9690485
3119118 5043088 9297639 1507827 0704520 7484193 4154621 1311714 0628401 4832064
8146373 7512702 4518012 2971098 7599015 5498809 9501922 1771191 9102319 3746612

numero di cifre del cateto 1: 766

valore del CATETO 2

718 1938478 8237243 9955152 7671394 5614062 3917917 1531055 9848138 2770597
7785888 1164096 6436498 3415616 9844018 6176412 9280191 6942875 7683967 8350633
9769508 2574673 4409251 2690549 6483646 3630090 7283649 2138464 9298984 5034896
4722689 8350308 3391193 9209655 1007210 2645582 2028974 0093524 4206256 5797181
6827706 3459290 2339492 6399239 0567629 2701261 7251199 3667102 5086182 7956428
9839174 1041758 6087409 0673114 0554256 3957060 4217857 1664157 9635455 7617180
4393078 7550201 7093375 8398900 1023223 5628914 4018126 6429805 3124482 0623105
2696136 2167541 4896509 9717260 3133125 3483191 6160913 7836830 5776318 0305096
7204442 5893198 3271796 0806959 6135579 6795238 2792111 4773690 7828297 9690485
3119118 5043088 9297639 1507827 0704520 7484193 4154621 1311714 0628401 4832064
8146373 7512702 4518012 2971098 7599015 5498809 9501922 1771191 9102319 3746605

numero di cifre del cateto 2: 766

valore dell'IPOTENUSA

1015 6794800 8817065 4044354 0685534 6479229 9657817 5518931 1237925 7420391
9267558 7315259 5545129 7997905 5108074 3559913 1340541 0669820 5683725 8283459
7661623 5338190 7465278 8042077 3757564 0211283 2873389 7438386 6688387 2655013
5942008 7976878 7475885 7108758 1899560 5759659 7257616 1234542 5286881 8993285
2463631 1028017 5422419 1137322 0446318 7422909 4334690 7146653 2805173 6032978
9648820 4950397 2369653 9651070 3516128 8365592 4938140 0670861 9302671 7648845
7521912 4360998 6018955 7433586 5483355 5292564 6111423 2311012 4376126 1326294
2467356 1404083 3700635 9871605 3040404 1041218 3189869 9758432 3613303 2614355
7712571 7533203 1395185 7799098 6215760 5178724 1794334 1756151 6123991 3527775
4032195 9250844 7641286 0954239 1433792 7205673 2308933 0231278 1803536 6540928
5813534 0496547 1721851 6014953 5501169 4459286 7430711 2746442 7916772 3159413

numero di cifre dell'ipotenusa: 767
tempo di calcolo : 0.28 secondi

3 °Esempio si visualizza sullo shermo del monitor innanzitutto quanto segue:

quale terna n -esima vuoi visualizzare? 15000 - esima
quale differenza N vuoi fra i cateti ? 329
per N = 329 si hanno terne primitive
valori iniziali per N = 329 : x = 19 y = 4
per N =-329 si hanno terne primitive
valori iniziali per N = -329 : x = 3 y = 13

vengono quindi calcolati in un tempo inferiore a 12 secondi i valori numerici relativi ai cateti ed alla ipotenusa della 15000-esima terna; questi valori molto grandi vengono mostrati sullo schermo del monitor tramite diverse visualizzazioni. Che non si ritiene opportuno allegare per non appesantire troppo il presente articolo ’eccessivo numero di pawriportare qui su suppordato per l’ingombro eccessivo i riportano Qui di seguito vengono dati solo i valori relativi al numero di cifre che compongono ciascun cateto e l’ipotenusa ed anche il tempo di calcolo impiegato per l‘ottenimento di tutte le loro relative cifre:

- numero di ciascun cateto:5744; numero di cifre dell'ipotenusa: 5744;
- tempo di calcolo: 11.28 secondi

Il tempo di 11,28 secondi è il tempo impiegato necessario per calcolare, trovare e mostrare sullo schermo del monitor sia i valori numerici dei due cateti sia quello dell’ipotenusa.

RIFERIMENTI

[Be] A.H. Beiler – Recreations in Theory of Numbers, Ch. XIV – Second Edition Dover Publications, Inc., New York 1966

[CR] R. Courant, H. Robbins – CHE COS’E’ LA MATEMATICA , pagg. 87 ÷ 89, Editore Boringhieri , Torino , 1964

[Da] H. Davenport – Aritmetica superiore, Cap.VII - Zanichelli Editore , Bologna 1999

[Fr] G.Frattini – *Dell’analisi indeterminata di secondo grado* –Periodico di Matematica per l’insegnamento secondario, anno VII – 1892 – Roma, Tipografia Elzeviriana

[HW] G.H. Hardy, E.M. Wrigth –An introduction to the theory of numbers , Fifth edition, Ch.XIII, Clarendon Press , Oxford

[Na] – T. Nagell, Introduction to NUMBER THEORY, Ch.VI – Chelsea Publishing Company, New York 1984

[Ro] – J. P. Robertson- *Solving the generalized Pell equation* $x^2 - D \cdot y^2 = N$ http://hometown.aol.com/jpr2718/pell.pdf

[Sh] - D. Shanks – Solved and Unsolved Problem in NumberTheory, Ch. III – Chelsea Publishing Company, New York 1985

SITI WEB interessanti e relativi alle terne pitagoriche (Pythagorean triples):

http://www.math.rutgers.edu/~erowland/pythagoreantriples.html

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Pythag/pythag.html#mnformula

http://www.londongt.org/mathsks3and4/documents/pythagoreanTriples.pdf

http://www.m-a.org.uk/docs/library/2065.pdf