Le equazioni di terzo grado nei « Quesiti et inventioni diverse » di Nicolò Tartaglia

« *Quando che li Francesi sacchegiorno Bressa .... essendo io fuggito nel domo con mia madre e mia sorella, credendone in tal modo esser salvi, ma tal pensiero ne andò fallito, perchè in tal chiesa mi furono date cinque ferite mortali fra le quali una ne aveva attraverso la bocca .... e stelli un tempo che io non poteva ben proferire parola, ma sempre balbuttava nel parlare per il che li putti della mià età me imposero per sopranome Tartaglia. Et perchè tal cognome me durò molto tempo m'è apparso de volermi chiamare Nicolò Tartaglia.*

All'epoca del sacco di Brescia (1512) la vittima di quel ferimento aveva circa dodici anni, cosicchè l'anno della sua nascita cade intorno al 1500. Queste notizie assieme ad altre sulla sua desolata giovinezza, il TARTAGLIA ce le fornisce nel Quesito VIII del sesto libro dei « Quesiti et Inventioni Diverse ». Altre informazioni autobiografiche le troviamo nel Ragionamento Terzo sopra la Travagliata Inventione [1], in cui si giustifica il titolo dato a quell'opera mettendolo in relazione con le avverse vicende che avevano turbato la sua esistenza durante il periodo in cui fece quelle scoperte.

A quelle pagine rimandiamo il Lettore desideroso di ragguagli sulla vita del Matematico Bresciano, di cui quest'anno ricorre il IV° centenario della morte, avvenuta in Venezia il 13 dicembre 1557. Questa ricorrenza ci ha indotto a scrivere

---

[1] Vedi in questo Periodico, vol. XXXIV (1956): A. Natucci, *Che cos'è la Trauagliata Invenzione di Nicolò Tartaglia?* L'articolo è anche riprodotto qui di seguito.

queste note in cui intendiamo riferire le vicende che condussero il TARTAGLIA alla scoperta della risoluzione delle equazioni di 3° grado, vicende che egli stesso ci descrive nei « Quesiti et Inventioni Diverse », pubblicati in Venezia da VENTURINO RUFFINELLI nel luglio del 1546 *ad istantia et requisitione et a proprie spese de Nicolò Tartalea Brisciano Autore.*

L'Opera è divisa in nove libri e, di questi, il nono è dedicato ai quesiti ed alle invenzioni *sopra la scientia Arithmetica, geometrica, et in la Pratica Speculativa de Algebra et Almucabala, volgarmente detta regola della cosa, over Arte Maggiore, et massime della inventione delli Capitoli de cosa e cubo equal a numero* [2], *et altri suoi aderenti et dependenti, et simelmente de censi e cubo equal a numer, et suoi dependenti, quali dalli sapienti sono stati giudicati impossibili.*

Le Questioni proposte dal Colla e la risoluzione dell'equazione $x^3 + px^2 = q$.

Il primo quesito, la cui risoluzione dipenda da un' equazione di terzo grado è il Quesito XIV, fatto nel 1530 mentre il TARTAGLIA risiedeva in Verona. Esso è proposto da quel Maestro ZUANNE DE TONINI da Coi, detto il Colla (da Collio, in provincia di Brescia), il quale, benchè non abbia apportato un contributo diretto alla risoluzione delle equazioni di 3° (e 4°) grado, tuttavia ha avuto il merito di avere spinto i più famosi matematici del suo tempo a dedicarsi a quelle ricerche che si conclusero con la risoluzione delle suddette equazioni.

Il quesito è fatto per lettera e contiene due problemi:

1°) *Trovatime un numero, qual multiplicato per la sua radice più tre faccia 5.*

2°) *Similmente trovatime tre numeri, ma ch'el secondo sia*

---

(2) Ricordiamo che a quell'epoca l'incognita veniva designata col termine « cosa » (abbreviato in co), il quadrato dell'incognita con « censo » (ce), la terza potenza con « cubo » (cu) etc., mentre i vari tipi di equazioni costituivano i Capitoli di Algebra.

2 più del primo, et ch' el terzo sia 2 più del secondo et che multiplicato il primo fia el secondo, et quel produtto fia el terzo faccia 1000.

Il TARTAGLIA, dopo aver notato che le due questioni conducono rispettivamente alle equazioni (cfr. ([2]))

1 cu più 3 ce equal a 5 $(x^3 + 3x^2 = 5)$

1 cu più 6 ce più 8 co equal a 1000 $(x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$

la cui risoluzione fino allora era ritenuta impossibile, rimprovera il TONINI per avergli proposto delle questioni che egli stesso non era in grado di risolvere e si dichiara disposto a scommettere sulla verità di questa affermazione. Tuttavia la questione non deve aver lasciato inoperoso il TARTAGLIA, perchè, come apprendiamo nel quesito XXV essa fu la causa di fargli ritrovare la regola di tal capitolo di cubo e censo equal a numero $(x^3 + px^2 = q)$ e in conseguenza quello di cubi e numeri equal a censi $(x^3 + q = px^2)$ « *Questo trovai per fin de l'anno 1530 quando stantiava a Verona* ».

La successiva questione su cui fermiamo l'attenzione, contenuta nel quesito XX, è attribuita ancora al COLLA (fatto copertamente da Maestro ZUANNE DE TONINI, l'anno 1535 il 12 settembre in Venezia); si tratta del famoso problema che fu poi risolto dal FERRARI e che rappresenta il primo caso di risoluzione di un'equazione di 4° grado:

« *Sono trei che hanno comprato lire 20 di carne et tante lire ne ha comprato uno di loro che moltiplicato tal numero di lire in se medesimo tal produtto è uguale alla moltiplicazione delle lire che hanno comprato li altri dui, cioè quelle dell'uno fia quelle dell' altro, et multiplicate li due menor quantità di lire l'una fia l'altra fanno precisamente 8* ».

Il TARTAGLIA si limita a riconoscere che in sostanza si tratta di dividere 20 in tre parti che formino una proporzione continua, tali che il prodotto dei primi due termini sia 8. La questione sarà oggetto di ulteriori discussioni fra il TARTAGLIA e il TONINI, ma nessuno dei due perverrà ad alcun risultato concreto.

Mentre il TONINI con le sue questioni continuava a mettere in imbarazzo or questo or quello, viene a conoscenza di una notizia dalla quale deduce che ormai il TARTAGLIA aveva scoperto la regola per risolvere le equazioni di 3° grado, e pertanto si reca a Venezia, sperando di esser messo a parte del segreto.

La disputa con Anton Maria Fior e la risoluzione della equazione $x^3 + px = q$.

Nel quesito XXV è riportato il dialogo che intercorre fra il TARTAGLIA e il TONINI durante il loro primo incontro, avvenuto in Venezia il 10 dicembre 1536. Preferiamo riportare interamente la prima parte del suddetto colloquio, data la grande importanza che esso ha per la storia delle equazioni di terzo grado.

Maestro Zuanne: Ho inteso che za molti giorni voi venesti in disputa con Maestro Antonio Maria Fior. Et che finalmente ne conveniste in questo che lui vi dovesse proponere 30 quesiti in scritto sotto bolla, realmente diversi, in mane di Iacomo di Zambelli notaro et che simelmente voi ne proponeste altri trenta a lui realmente diversi e così facesti, et assignasti 40 over 50 giorni di termine a cadauno di voi per solvere li detti quesiti .... Et m'è stato referto per fino a Bressa che voi risolvesti tutti li suoi trenta in termine di due ore, la qual cosa mi par dura da credere.

Nicolò: Egli è vero quanto vi è stato detto over referto. Et la causa che io risolse li suoi trenta con tanta brevità è questa che lui proposse tutti li suoi trenta quesiti che conducevano l'operante per l'Algebra in cosa e cubo equal a numero, credendosi che de quelli nonne dovessi risolvere alcuno perchè Frate Luca nella sua opera (3) *afferma essere impossibile a risolvere tal Capitolo con regola generale, et io per mia bona*

---

(3) LUCA PACIOLI, *Summa di Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità, Distinctio Octava, Tractatus sextus*; a car 149 (II ediz., stampata a Toscolano sul lago di Garda nel 1523), troviamo un elenco di otto tipi di equazioni, tra le quali compaiono, precedute dall'aggettivo « impossibile » le due seguenti:

censo de censo e censo equale a cosa $(x^4 + px^2 = qx)$

censo de censo e cosa equale a censo $(x^4 + qx = px^2)$

le quali « degradando le dignità de l'uno e de l'altro estremo equal-

sorte, solamente 8 giorni avanti al termine di portar li 30 et 30 quesiti sotto bolla del notaro, io aveva ritrovato la regola generale a tal Capitolo. Onde per esser tale inventione così di fresco me la trovai molta prompta et famigliar et per questo risolsi tutti quanti con tal celerità .... Lui medesimo mi indusse a quel tempo a recercare la regola di tal capitolo perchè lui si andava vantando che già trent' anni tal secreto gli era stato mostrato da un gran matematico (4), *il quale mi fece dubitare ch' el fusse il vero, e per questo io pose ogni mio studio, cura et arte per ritrovare regola a tal capitolo, et così per mia bona sorte la ritrovai 8 giorni avanti di dar li detti 30 quesiti al Notaro, et questo fu l' anno passato, cioè del 1535 adi 12 di febraro* (*vero è che in Venetia venera a esser del 1534* (5)) *et per alcuni avisi et accidenti di tal inventione il giorno sequente ritrovai anchora regola generale del capitolo di cose e numero equal a cubo.*

Abbiamo voluto riportare il passo precedente, perchè qualche storico (6) ha creduto di poter mettere in dubbio la scoperta del TARTAGLIA facendo nascere il sospetto che egli fosse a conoscenza della regola del dal FERRO, suffragando questa opinione con considerazioni varie che si possono riassumere nelle proposizioni seguenti:

1°) È molto improbabile che il TARTAGLIA sia riuscito a trovare *casualmente* la regola proprio otto giorni prima che scadesse il termine per depositare i quesiti.

---

mente, fin tanto che trovi il numero da qualche estremo » diventano rispettivamente

cubo e cosa equal numero $(x^3 + px = q)$

cubo e numero equal cosa $(x^3 + q = x)$.

(4) SCIPIONE DEL FERRO, insegnò a Bologna dal 1496 al 1526.

(5) A causa della consuetudine (More Veneto), protrattasi fino al 1797, di far cominciare l'anno il 1° marzo.

(6) CANTOR. I sei cartelli di matematica disfida, recensione, in Histhorisch-litterarische Abtheilung der Zeitschrift fuer Mathematik und Physik, XXII Jahrgang, Leipzig 1877. Di questa recensione fu pubblicata la traduzione italiana in Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, Tomo XI, Marzo 1878.

Vedi anche in questo Periodico, Vol. V (1925) ET. BORTOLOTTI, *L'Algebra nella scuola matematica bolognese del sec. XVI.*

2°) La regola di risoluzione, che ridotta in versi, sarà comunicata dal TARTAGLIA al CARDANO, riuscirà a questi incomprensibile fin tanto che non avrà appreso la risoluzione dal DELLA NAVE [7] (Bologna, 1542).

Risulta evidente, leggendo il brano sopra riportato, che la prima di queste supposizioni non ha fondamento, poichè la scoperta non fu casuale ma ricercata. Notiamo inoltre che tale ricerca era incoraggiata dal successo raggiunto per l'equazione $x^3 + px^2 = q$, la cui risolubilità con regola generale faceva cadere la qualifica di impossibile data da Frate LUCA per entrambi i tipi di equazioni. Ci riserviamo di fare più avanti qualche osservazione riguardo alla seconda supposizione e riprendiamo il colloquio tra i due Matematici.

Il TONINI chiede l'elenco delle questioni che i due contendenti si scambiarono nel corso della disputa e le relative soluzioni; ma il TARTAGLIA non è disposto a comunicare queste ultime, perchè da esse si potrebbero ricavare facilmente le regole per la risoluzione, regole che, per varie ragioni, per il momento, non intende comunicare ad altri.

L'elenco completo delle questioni proposte dal FIORE è riportato nel quesito XXXI e di esse ne trascriviamo solo qualcuna perchè in sostanza dal punto di vista risolutivo sono tutte eguali, conducendo l'operante per algebra al capitolo di cosa e cubo equal a numero.

Laus Deo 1534 adì 22 febraro in Venetia

Queste sono le 30 rasone proposte per mi Antonio Maria Fior a voi Maestro Nicolo Tartalea.

1) *Trovame uno numero che azontoli la sua radice cuba venghi 6* $(x^3 + x = 6)$;

2) *Trovame due numeri in dupla proportione che il quadrato del mazor numero moltiplicato per el menore, et a quella moltiplicazione zontoli li primi due numeri venga 40*

$(4x^3 + 3x = 40)$;

10) *Fame de 14 due parti che l'una parte sia la radice cuba dell'altra* $(x^3 + x = 14)$:

---

[7] ANNIBALE DELLA NAVE, genero di SCIPIONE DAL FERRO, a cui succedette nella cattedra, venendo inoltre in possesso dei suoi manoscritti.

19) *Egli è un triangolo orthogonio* abc, *la linea ab et la linea* bc *zonte insieme sono brazza 7 et la linea* ab *è radice cuba de* bc, *domando la linea* ac (ipotenusa) $(x^3 + x = 7)$;

20) *Sono doi quadrati che le lor superficie zonte insieme sono 26 e la menore superficie è radice cuba della maggiore. Domando la superficie menore* $(x^3 + x = 26)$; etc..

Delle questioni proposte dal TARTAGLIA solo le seguenti quattro dipendevano da equazioni di terzo grado (le rimanenti erano da risolvere geometricamente oppure con algebra comune e il testo di alcune di esse è riportato al quesito XXXII):

1) *Trovatime una quantità che sia irrazionale, che moltiplicata fia la sua radice più 40, faccia numero razionale e discreto*;

2) *Trovatime una quantità, che sia irrazionale, la qual multiplicata fia 30, men la radice di detta quantità, faccia numero razionale e discreto*;

3) *Trovatime una quantità, qual gionta con el quadruplo della sua radice cuba, faccia 13*;

4) *Trovatime una quantità che sottrattone tre delle sue radici cube resti 10.*

Le suddette questioni conducono rispettivamente alle equazioni seguenti:

1) $x^3 + 40x^2 = a$; 2) $30x^2 = x^3 + a$;

3) $x^3 + 4x = 13$; 4) $x^3 = 3x + 10$,

le quali si devono considerare sostanzialmente diverse, non potendosi far ricorso, in base alle conoscenze del tempo, all'uso di coefficienti negativi (8).

Della prima equazione, in seguito alle domande insistenti del TONINI, il TARTAGLIA si decide a dare la soluzione nel caso particolare $a = 2888$: la quantità cercata (x^2) è eguale a

(8) Il LORIA, *Storia delle Matematiche*, (Milano 1950, pag. 302), riportando queste equazioni fa notare che la data della loro scoperta, 1530, riferita dal TARTAGLIA, è in contraddizione con la data, 1535 o 1534, riportata nel terz'ultimo dei versi comunicati al CARDANO. Ora è evidente che questo disaccordo non esiste poichè nel 1530 furono scoperte le regole per risolvere le prime due equazioni, mentre la seconda data compete alle rimanenti.

$78 - \sqrt{308}$, mentre la sua radice è $\sqrt{77} - 1$. Il TONINI fa tesoro di questa comunicazione e in una lettera, data l'8 gennaio 1537 (Q. XXVIII) dimostra di aver trovato la regola generale per risolvere le equazioni del tipo 1) e 2). A conferma di ciò porta gli esempi

$$x^3 + 8x^2 = 72 \qquad \text{e} \qquad 8x^2 = x^3 + 72,$$

che ammettono rispettivamente le soluzioni

$$\sqrt{13} - 1 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{13} + 1 \qquad (^9).$$

Nella medesima lettera, e in altre successive, il TONINI chiede la risoluzione dell'equazione $x^3 + x = 8$, ma il TARTAGLIA dapprima non risponde, e quando si decide a scrivere lo fa per comunicare che non intende prolungare la relazione epistolare, poichè egli reputa che essa sia alimentata non da sincera amicizia ma dalla speranza di potere riuscire a carpirgli il segreto (3 marzo 1537).

L'amicizia col Cardano.

Dopo due anni circa da questa rottura, ebbe inizio la relazione con il CARDANO, anch'essa generata dalla risonanza della disputa col FIORE.

Questa seconda relazione, mentre nel campo affettivo ebbe conclusione più disastrosa della precedente, invece nel campo della matematica produsse risultati molto più soddisfacenti.

È narrato nel Quesito XXXI, che il 2 gennaio 1539, un tal Maestro ZUANANTONIO, libraio, si presenta al TARTAGLIA per incarico del Medico milanese *misser Hieronimo Cardano el quale è un grandissimo Mathematico, et legge publicamente*

---

(9) La prima equazione è del tipo

$$x^3 + px^2 = 2(p-2)^2,$$

la quale, oltre alla soluzione intera $-(p-2)$, ammette le soluzioni irrazionali $\sqrt{2p-3} - 1$ e $-\sqrt{2p-3} - 1$; quest'utima e quella intera non sono prese in considerazione perchè negative.

La seconda invece è del tipo

$$px^2 = x^3 + 2(p-2)^2,$$

la quale ammette le soluzioni

$$p - 2 \quad , \quad -\sqrt{2p-3} + 1 \quad . \quad \sqrt{2p-3} + 1 \, .$$

Euclide in Milano, et al presente fa stampare una sua opera in la pratica Arithmetica e Geometria et in Algebra, che sarà una bella cosa .... Et perchè egli ha inteso voi essere stato in disputa con Maestro Antonio Maria Fior .... Et che voi trovaste regola generale al Capitolo di cosa e cubo equal a numero .... et pertanto sua eccellentia vi prega che voi gli vogliate mandare di grazia tal regola da voi trovata, et s'el vi pare lui la darà fora in la presente sua opera sotto vostro nome, et se anchora el non vi pare che lui la dia fora la tenerà secreta. Chiede inoltre di poter conoscere testo e soluzioni delle questioni scambiate nella disputa e la risoluzione delle seguenti questioni:

1) *Partitime dieci in quattro parti continue proportionali che la prima sia 2;*

2) *Partime dieci in quattro parti continue proportionale che la seconda parte sia 2;*

3) *Trovatime quattro numeri continui proportionali chel primo sia 2 et el secondo e quarto gionti insieme facciano 10;*

4) *Trovatime quattro numeri continui proportionali ch'el primo sia 2 et il terzo e quarto giunti insieme facciano 10;*

5) *Trovatime quattro quantità continue proportionale che la seconda sia 2 et la prima e quarta gionte insieme facciano 10;*

6) *Fatime de 10 tre parti continue proportionale che multiplicata la prima nella seconda faccia 8;*

7) *Trovatime uno numero (che) nella sua radice più 3 faccia 21.*

Tali questioni conducono rispettivamente alle equazioni

$$1)\ x^3 + x^2 + x = 4\,; \qquad 2)\ x^3 + x^2 + 1 = 4x\,;$$

$$3)\ x^3 + x = 5\,; \qquad 4)\ x^3 + x^2 = 5\,;$$

$$5)\ x^3 + 1 = 5x\,; \qquad 6)\ x^4 + 8x^2 + 64 = 80x\,;$$

$$7)\ x^3 + 3x^2 = 21\,.$$

Risulta evidente la cura con cui sono state scelte le questioni che conducono ad una collezione di interessanti equazioni alcune delle quali sono meno semplici di quelle di cosa e cubo uguale a numero. Questa considerazione e il tenore delle ultime due inducono il TARTAGLIA a pensare che i suddetti quesiti siano stati proposti dal COLLA al CARDANO, il quale, non essendo in grado di risolverli, li ha inviati a lui.

Questa opinione, riferita dal messaggero al CARDANO, suscita il risentimento di questi, il quale replica con una lettera (12 febbraio 1539, Q. XXXII), che, iniziata con tono alquanto altezzoso, si conclude con una profferta di amicizia e con la richiesta di voler risolvere le seguenti questioni, le cui soluzioni sono state affidate al messo, che però le consegnerà al TARTAGLIA in cambio delle sue:

1) *Fatime di 10 quattro quantità continue proporzionale che li lor quadrati gionti insieme facciano 60* [10];

2) *Doi feceno compagnia, et posseno non so quanti ducati et guadagnarno el cubo della decima parte del suo capitale, et se avessero guadagnato 3 meno di quello che guadagnorno haveriano guadagnato tanto quanto fu il suo capitale. Se domanda el suo capitale e guadagno.*

In quest'ultima, che conduce all'equazione

$$x^3 = 1000x + 3000\,,$$

il TARTAGLIA ravvisa un'insidia ed esprime la sua incredulità riguardo al fatto che il messo ne possa avere la soluzione,

---

(10) La questione è di quarto grado ma è risolubile per radicali quadratici. Riportiamo il metodo di risoluzione seguito dal TARTAGLIA, per mostrare come i matematici di quel tempo ricorressero frequentemente all'uso di indeterminate. Indicate con x, y, z, t le quantità richieste si pone $y + z = u$, e quindi sarà $x + t = 10 - u$. Poi, essendo

$$x : y = y : z = z : t\,,$$

si ha

$$u^3 = y^3 + z^3 + 3yz(y + z) = x^2t + xt^2 + 3xt(y + z) =$$
$$= xt[x + t + y + z + 2(y + z)] = xt(10 + 2u).$$

Da cui

$$xt = yz = \frac{u^3}{10 + 2u}\,.$$

Sarà allora

$$y = \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{10 + 2u}}\,, \qquad z = \frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{10 + 2u}}\,.$$

Essendo poi $x + t = 10 - u$ e $xt = \dfrac{u^3}{10 + 2u}$, si possono ricavare x e t in funzione di u.

Trovate così « sordamente » le parti si calcola la somma dei quadrati, che si eguaglia a 60, ottenendo

$$u = \sqrt{29} - 1 \quad \text{etc.}$$

avendo la certezza che il CARDANO sia incapace a risolverla, considerato che appartiene al tipo di cui gli viene richiesta la regola con tanta insistenza.

Ma ormai il CARDANO per raggiungere lo scopo ha deciso di cambiare tattica e nella lettera successiva, lungi dal mostrarsi risentito per l'accusa di ignoranza, rivolge al TARTAGLIA l'invito a volersi recare a Milano, per poterlo presentare al Marchese DEL VASTO ([11]), dalla cui liberalità potrà ricavare grandi vantaggi.

In seguito a questo invito il TARTAGLIA si reca a Milano, ove il 25 marzo 1539 avviene l'incontro col CARDANO. Questi rinnova la sua richiesta (Q. XXXIIII) e, dopo essersi impegnato a mantenere il segreto sulle comunicazioni che gli saranno fatte *(Io vi giuro ad sacra Dei evangelia, et da real gentil'huomo non solamente da non pubblicar giammai tali vostre inventioni, ma anchora vi prometto, et impegno la fede mia da real cristiano, da notarmela in zifera, acciocchè da poi la mia morte alcuno non la possa intendere)* finalmente viene esaudito per mezzo dei versi famosi:

Quando chel cubo con le cose appresso	$x^3 + px =$
Se aguaglia a qualche numero discreto	$= q$
trovan dui altri differenti in esso.	$u - v = q$
Da poi terrai questo per consueto	
Ch'el lor produtto sempre sia uguale	$u \cdot v =$
Al terzo cubo delle cose neto	$= \left(\frac{1}{3}p\right)^3$
El residuo poi suo generale	(la differenza fra la radice
Delli lor lati cubi ben sottratti	cubica della maggiore e quella della minore:
Varrà la tua cosa principale.	$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$).
In el secondo de cotesti atti	
Quando chel cubo restasse lui solo	$x^3 = px + q$
Tu osservarai quest'altri contratti	
Del numero farai due tal part' a volo	$u + v = q$

([11]) ALFONSO D'AVALOS, governatore di Milano e protettore del CARDANO.

che l'una in l'altra si produca schietto	$u \cdot v =$
el terzo cubo delle cose in stolo.	$= \left(\frac{1}{3} p\right)^3$
Delle qual poi, per commun precetto	
Torrai li lati cubi insieme gionti	$\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} =$
E cotal summa sarà il tuo concetto.	$= x \cdot$
Il terzo poi de questi nostri conti	$x^3 + q = px$
Se solve col secondo se ben guardi	
Che per natura son quasi congionti. (12)	
Questi trovai, et non con passi tardi	
Nel mille cinquecent' e quattro e trenta	
Con fondamenti ben sald' e gagliardi	
Nella citta dal mar intorno centa.	

Il TARTAGLIA dopo qualche giorno di permanenza a Milano ritorna a Venezia senza che sia riuscito a incontrare il Marchese del Vasto. Intanto il CARDANO si dedica alacremente alla interpretazione dei versi sopra riportati, il cui senso non sempre gli deve riuscire chiaro, come possiamo rilevare da una lettera che si affretta (9 aprile 1539) a scrivere al TARTAGLIA per supplicarlo di volergli risolvere l'equazione

$$x^3 + 3x = 10.$$

La risposta (23 aprile 1539) contiene la soluzione richiesta corredata da una esauriente spiegazione:

« Bisogna trovare due numeri tali che la loro differenza sia 10 mentre il loro prodotto sia 1, cioè il cubo della terza parte del coefficiente della x; operando per algebra si troverà che essi valgono $\sqrt{26} - 5$ e $\sqrt{26} + 5$; di ciascuna di queste quantità bisogna trovare il suo lato cubo, cioè la sua radice cubica e sottrarre il minore dal maggiore, la differenza sarà il valore della x

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}. »$$

---

(12) Tenendo presente che le soluzioni accettabili erano solo quelle positive, l'equazione veniva presa in considerazione solo nel caso in cui $q < 0$, e quindi si riconduceva al caso precedente trasportando il termine noto al secondo membro.

A maggior chiarimento della regola esposta viene inoltre riportata l'equazione

$$x^3 + x = 11 \text{ con la soluzione}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(5 + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{30 + \frac{31}{108}}} - \sqrt[3]{\sqrt{30 + \frac{31}{108}} - \left(5 + \frac{1}{2}\right)}.$$

A noi sembra impossibile che il CARDANO dopo questa spiegazione abbia potuto avere ancora dei dubbi sulla regola espressa per mezzo dei versi sopra riportati e che, come dice il CANTOR, abbia dovuto attendere fino all'incontro col DELLA NAVE per comprenderne il significato: « Allora gli cadde il velo dagli occhi; allora egli comprese i versi del TARTAGLIA. Qui dobbiamo trattenerci un istante per dedurre le necessarie conseguenze dei fatti ora mentovati.

Il CARDANO e il FERRARI compresero subito la risoluzione del DAL FERRO, mentre avevano impiegato anni inutilmente per comprendere quella del TARTAGLIA; allora penetrarono il significato di quelle terzine (crf. ([6])) ».

Quali saranno state le cause che hanno indotto l'illustre Storico a formulare questo giudizio?

Evidentemente la lettura del secondo Cartello di matematica disfida inviato al TARTAGLIA da L. FERRARI il 1° aprile 1547 ([13]), in cui si cerca di sminuire l'importanza della comunicazione fatta al CARDANO. Inoltre dobbiamo pensare che il CANTOR non abbia avuto la possibilità di prender visione di tutte le lettere inviate dal CARDANO al TARTAGLIA; infatti in una di esse (18 ottobre 1539), il matematico milanese dà la dimostrazione di aver compreso il procedimento risolvendo la equazione

$$x^3 = 12x + 20 \quad (x = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}).$$

Fatta questa doverosa osservazione, riprendiamo l'esame della corrispondenza intercorsa fra i due matematici: pur-

---

([13]) « Cardanus ergo ex te accepit inventiunculam illam cubi et laterum aequalium numero.... Si Cardano non concedes, ut tua, num saltem permittes, ut aliorum inventa nos doceat. Anno ab hinc quinto, cum Cardanus Florentia proficisceretur, egoque ei comes essem, Bononiae Annibalem de Nave virum ingeniosum et humanum visimus, qui nobis ostendit libellum manu Scipionis Ferrei soceri sui.... »

troppo la loro amicizia volge alla fine, mentre ha inizio la parte polemica della loro relazione. Nell'animo del TARTAGLIA comincia a destarsi il sospetto che il CARDANO sia per pubblicare un'opera di Algebra, e pertanto le richieste di ulteriori chiarimenti restano senza alcuna risposta. Perciò ci viene a mancare l'opinione del TARTAGLIA sulla equazione

$$x^3 = 9x + 10,$$

nella quale «il cubo della terza parte delle cose eccede il quadrato della mità del numero» (trattasi del caso che oggi chiamiamo irriducibile ([14])). Le ultime richieste del CARDANO, riportate nei «Quesiti» sono commentate con giudizi così poco lusinghieri ([15]) sulle sue attitudini agli studi matematici da suscitare lo sdegno del FERRARI, il quale si leverà in difesa del Maestro, inviando il primo di quella serie di cartelli di «Matematica Disfida» che rappresentano un altro importantissimo documento per la storia delle matematiche del Rinascimento.

Altre notizie sulle equazioni di terzo grado le troviamo nell'ultimo dei quesiti, il XLII. Il TARTAGLIA, rispondendo ad alcune domande del VENTUORTH ([16]), oltre ad alcuni casi particolari che ammettono una soluzione intera, risolve la equazione

$$x^3 + 6x^2 = 100,$$

che nell'agosto del 1536 (Q. XXIII) aveva proposto ad un avversario, un tal VICENTI DI GAFFARI. La soluzione

$$x = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}} - 2,$$

è riportata senza alcuna delucidazione, ma è evidente che

([14]) Vedi su questo Periodico, Vol. XXIX, 1951: A. PROCISSI, *Il caso irriducibile dell'equazione cubica*; D. GIGLI, *Numeri complessi a due o più unità* (in «Questioni riguardanti le Matematiche elementari» a cura di F. ENRIQUES - P. I, vol. II - Bologna).

([15]) Ricordiamo che la pubblicazione dei «Quesiti» segue quella dell'«Ars Magna». Opera in cui il CARDANO espose le regole per la risoluzione delle equazioni di terzo grado, venendo così meno all'impegno assunto nei riguardi del TARTAGLIA.

([16]) Gentiluomo inglese, allievo ed amico carissimo del TARTAGLIA.

l'operante si riporta al Capitolo di cubo uguale a cose e numero, applicando, analogamente a quanto siamo soliti fare oggi, una trasformazione a radici aumentate.

Nell'ultimo dei Quesiti si trova anche l'annuncio della prossima pubblicazione di una grande opera di Aritmetica, Geometria e Algebra, in cui, tra l'altro saranno esposte tutte le scoperte relative alle equazioni cubiche. Ma, « essendo per compire l'ultima parte nella quale amplissimamante si trattava dell'Algebra, fu con infinito danno di tutti quei che delle buone lettere si dilettano, dalla morte rapito » ([17]).

LUIGI DI PASQUALE

([17]) Dalla dedica che l'editore CURZIO TROIANO fa precedere alla sesta parte del General Trattato, in cui sono raccolte le nozioni di algebra fino alle equazioni di secondo grado e riconducibili al secondo grado, pubblicata postuma nel 1560.