I TRIANGOLI ARITMETICI

Antonio Salmeri

Qui di seguito si prenderanno in esame alcuni triangoli aritmetici. Essi sono nell'ordine i triangoli che forniscono i coefficienti dei polinomi generati dalle seguenti espressioni:

1. $(a + b)^n$ (in funzione delle potenze di a e di b);
2. $a^n + b^n$ (in funzione di $S = a + b$ e di $P = ab$):
3. $(a+1)\,(a + 2)\,(a + 3) \dots (a + n)$ (in funzione delle potenze di a):
4. $1^k + 2^k + 3^k + \dots n^k$ (in funzione delle potenze di n).

***

1\. Il triangolo di Tartaglia [1], come è noto, fornisce i coefficienti dello sviluppo delle potenze del binomio $(a + b)^n$.
Si ha:

$$(a + b)^n = c_{1,n}\, a^n + c_{2,n}\, a^{n-1}\, b + c_{3,n}\, a^{n-2}\, b^2 + \dots + c_{n-1,\,n}\, a^2\, b^{n-2} + c_{n,\,n}\, a\, b^{n-1} + c_{n+1,n}\, b^n,$$

o anche:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2\, b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n,$$

dove i coefficienti, chiamati appunto binomiali, sono dati nell'ordine dai numeri della riga n-esima del triangolo aritmetico qui di seguito riprodotto.

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
n									
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

In esso i termini della prima riga e della prima colonna sono uguali ad 1 ed i successivi si calcolano sommando il termine sovrastante con il precedente, in accordo con la nota proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Una proprietà del triangolo di Tartaglia è la seguente: la somma dei numeri della *n*-esima riga è uguale alla potenza *n*-esima di *2*, ovvero per esempio per la riga in corrispondenza di $n = 6$:

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

Un'altra proprietà è che la somma dei primi *n* termini della colonna *k*-esima è uguale all'*(n+1)*-esimo della *(k+1)*-esima riga, ovvero per esempio per la colonna quarta:

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70.$$

Ed ancora nelle potenze di 1001^n compaiono nell'ordine i termini della riga *n*-sima, per $n \leq 7$, del triangolo separati da zeri:

1001^6 = **1** 00**6** 0**15** 0**20** 0**15** 00**6** 00**1.**

Per ottenere righe successive all'ottava è necessario prendere in esame potenze di numeri con un numero maggiore di zeri , ad esempio 10001, e così via.

***

2. Il triangolo aritmetico che fornisce i coefficienti dello sviluppo del prodotto:

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)\ldots (x + n)$$

è dovuto[2] nella forma più generale ad Antonio Salmeri. Esso genera un polinomio di grado *n* in *x*:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

dove I coefficienti $a_k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ vengono chiamati coefficienti fattoriali e si calcolano come somma di tutti i possibili prodotti di *k* numeri scelti fra i primi *n* termini della serie naturale. A titolo di esempio calcoliamo il coefficiente fattoriale $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (1x2 + 1x3 + 1x4) + (2x3 + 2x4) + (3x4) = 9 + 14 + 12 = 35.$$

Poiché per i coefficienti fattoriali vale la relazione:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

il coefficiente della colonna k-esima e riga n-esima si ottiene sommando al numero della k-esima colonna e riga $(n-1)$-esima il prodotto del numero della $(n-1)$-esima riga e $(k-1)$-esima colonna per n.
L'ultimo termine della riga n-esima vale ovviamente $n!$.
Si può costruire il triangolo aritmetico che fornisce i coefficienti cercati.

n \ **k**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	1					
2	1	3	2				
3	1	6	11	6			
4	1	10	35	50	24		
5	1	15	85	225	274	120	
6	1	21	175	735	1624	1764	720

Pertanto, ad esempio, per $n = 4$:

$$(x + 1)(x + 2) (x + 3) (x + 4) = x^4 + 10 x^3 + 35 x^2 + 50 x + 24.$$

I numeri di ciascuna riga sono proprio i *Numeri di Stirling* di prima specie.

***

3. Il triangolo aritmetico che fornisce i coefficienti dello sviluppo di $x^n + y^n$ in funzione di $S = x + y$ e $P = xy$ è dovuto[(2)] a C. M. Martino.
Egli estende[(3)] i coefficienti binomiali al caso in cui n o k o entrambi siano negativi e stabilisce poi una formula in cui il secondo membro è un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti di P e decrescenti di S di due unità per volta, cioè della forma:

$$x^n + y^n = a_0 S^n + a_1 PS^{n-2} + a_2 P^2S^{n-2} + \dots + a_k P^kS^{n-2k}$$

Si ha così la relazione:

$$x^n + y^n = \sum_{k=0}^{n/2}\left(\binom{n-k+1}{k}-\binom{n-k-1}{k-2}\right) (-P)^k S^{n-2k}$$

nella quale k è intero, positivo o nullo ed in cui hanno valore zero i coefficienti binomiali con r positivo o nullo e s negativo.
Il coefficiente del termine generale della precedente formula porta alla costruzione

del seguente triangolo:

k / n	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	2			
3	1	3			
4	1	4	2		
5	1	5	5		
6	1	6	9	2	
7	1	7	14	7	
8	1	8	20	16	2

dove in questo triangolo aritmetico:
- i numeri della prima colonna sono uguali a 1,
- l'ultimo numero di ciascuna riga, quando n è pari, è uguale a 2,
- ciascun numero della riga n-esima e appartenente alla colonna k-esima è uguale alla somma del numero immediatamente sovrastante della riga $(n-1)$-esima con il numero della riga $(n-2)$-esima posto nella colonna $(k-1)$-esima. I numeri contenuti in ciascuna riga sono i coefficienti dei termini dello sviluppo di $x^n + y^n$ che è un polinomio omogeneo di grado n in x ed y e ordinato secondo le potenze decrescenti di $S = x + y$ di due unità per volta cominciando con S^n e crescenti di $P = xy$, con segni alternati. Ad esempio per $n = 7$ e per $n = 8$ si hanno rispettivamente le relazioni:

$$x^7 + y^7 = S^7 - 7\,PS^5 + 14\,P^2S^3 - 7\,P^3S,$$

$$x^8 + y^8 = S^8 - 8\,PS^6 + 20\,P^2S^4 - 16\,P^3S^2 + 2\,P^4S^0$$

ove: $S = x + y$ e $P = xy$.

***

4. Si vuole costruire il triangolo aritmetico che fornisce i coefficienti del polinomio che esprime la somma delle potenze k-esime dei primi numeri naturali[(5)]:

$$1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots + n^k.$$

La forma più conosciuta è la seguente:

$$S_{n,k} = \sum_{h=1}^{n} h^k = \left(\frac{1}{k+1}\right)\left\{(n+1)^{(k+1)} - (n+1) - \sum_{h=1}^{m-1}\binom{k+1}{h} S_{n,h}\right\}$$

che esprime la somma delle potenze m-esime in funzione delle somme delle potenze $(k-1)$-esime, $(k-2)$-esime,… .

Si ha la relazione:

$$S_{n,k} = \sum_{h=1}^{n} h^k = \sum_{h=1}^{k+1} a_{h,k} n^h$$

dove:

$$a_{h,k} = (k / h)\, a_{h-1,k-1} \; ; \; a_{1,0} = 1 \; ; \; a_{1,k} = 1 - \sum_{i=2}^{k+1} a_{i,k} \; .$$

Pertanto i coefficienti $a_{h,k}$ si deducono direttamente dai coefficienti del polinomio di ordine *k-1*. Si possono quindi calcolare i singoli coefficienti di ogni riga, a partire dall'ultimo termine:

$\mathbf{a_{1,0} = 1}$
$\mathbf{a_{2,1}} = (1 / 2)\, a_{1,0} = \mathbf{1 / 2}$; $\mathbf{a_{1,1}} = 1 – 1 / 2 = \mathbf{1 / 2}$;
$\mathbf{a_{3,2}} = (2 / 3)\, a_{2,1} = \mathbf{1 / 3}$; $\mathbf{a_{2,2}} = (2 / 2)\, a_{1,1} = \mathbf{1 / 2}$; $\mathbf{a_{1,2}} = 1 – (1 / 3 + 1 / 2) = \mathbf{1 / 6}$;

e così via.

Si costruisce in tal modo il triangolo aritmetico dei coefficienti del polinomio che esprime la somma delle potenze *k*-esime:

h / k	1	2	3	4	5	6
0	1					
1	$^1/_2$	$^1/_2$				
2	$^1/_6$	$^1/_2$	$^1/_3$			
3	0	$^1/_4$	$^1/_2$	$^1/_4$		
4	$^{-1}/_{30}$	0	$^1/_3$	$^1/_2$	$^1/_5$	
5	0	$^{-1}/_{12}$	0	$^5/_{12}$	$^1/_2$	$^1/_6$

Si hanno pertanto le seguenti relazioni:

$\mathbf{S_{n,1}} = {}^1/_2\, n + {}^1/_2\, n^2 = \mathbf{{}^1/_2\, n\, (n + 1)}$;
$\mathbf{S_{n,2}} = {}^1/_6\, n + {}^1/_2\, n^2 + {}^1/_3\, n^3 = \mathbf{{}^1/_6\, n\, (n + 1)(2n + 1)}$;
$\mathbf{S_{n,3}} = {}^1/_4\, n^2 + {}^1/_2\, n^3 + {}^1/_4\, n^4 = \mathbf{{}^1/_4\, n^2\, (n + 1)^2}$;
$\mathbf{S_{n,4}} = -\, {}^1/_{30}\, n + {}^1/_3\, n^3 + {}^1/_2\, n^4 + {}^1/_5\, n^5 = \mathbf{{}^1/_{30}\, n\, (n – 1)\, (2n – 1)\, (3n^2 + 3n – 1)}$;

e così via.
Queste stesse formule sono state ricavate anche con il metodo dell'induzione matematica[6] senza ricorrere alle relazioni qui esposte.

Note

(1) La costruzione del triangolo di Tartaglia era nota a matematici cinesi nel XIV secolo e forse anche in epoca anteriore. In Italia prese il nome da Niccolò Tartaglia, che lo descrisse in un suo diffuso trattato nella prima metà del XVI secolo, ma in Francia e successivamente anche nel mondo anglosassone prende il nome da Blaise Pascal, che un secolo dopo, nel 1654, ne fece grande uso nei suoi studi sulla probabilità. In Germania invece è comunemente attribuito a Stiefel che ne scrisse nel 1544.
(2) Antonio Salmeri, *Introduzione alla teoria dei coefficienti fattoriali*, Giornale di Matematiche del Battaglini, Vol. XC, Gennaio 1962. Questa Memoria è stata citata anche da:
- Gian-Carlo Rota (Dep. of Math., M. I. T.), *On the Foundations of Combinatorial Theory,* 1973.
- Donald E. Knuth, (Computer Science Dep., Stanford University), *Two Notes on Notation, 1992.*

Questo triangolo aritmetico è stato rinvenuto molto recentemente in una nota di Giuseppina Poato, *Il Bollettino di Matematica,* 1939, fasc. 1. Alcune proprietà dello stesso sono state evidenziate da Enrico Ducci in *Il Bollettino di Matematica,* 1940, fasc. 1.
(3) C. M. Martino, *Un triangolo aritmetico relativo ad una questione di formule ricorrenti*. Rendiconto del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Vol. LXXIII, Fasc. II 1939-1940.
(4) C. M. Martino, *Estensione del campo dei coefficienti binomiali del triangolo di di Tartaglia al campo cartesiano.* Rendiconto del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LXXIV, Fasc. II 1940-1941.
(5) La somma dei quadrati dei primi numeri naturali era nota ad Archimede e si trova anche presso gli indiani che conobbero pure la soma dei cubi; la somma delle quarte potenze si trova nella letteratura araba del XII secolo. La somma sino alla 17-esima potenza fu calcolata intorno al 1630 da J. Faulhaber. Pascal calcolò la formula delle potenze *k*-esime in funzione delle formule delle potenze *(k-1)*-esime, (k-2)-esime, … .
(6) Antonio Salmeri, *La somma di progressioni aritmetiche con l'ausilio dell'induzione matematica*, Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Anzio-Nettuno 2004.