Un interessante problema di probabilità

Francesco Daddi [1]

In questo articolo si analizza il seguente problema:

Diamo un dado a 6 facce a ciascun abitante della Terra (7,7 miliardi di persone); dopo la prima sessione di lanci, chi ha ottenuto "1" viene eliminato dal gioco e gli altri continuano; dopo la seconda sessione di lanci, chi ha ottenuto "1" viene eliminato dal gioco e gli altri continuano, e così via, fino a che non ci sono più dadi da lanciare. ***Qual è la probabilità che siano necessarie esattamente 130 sessioni di lanci per finire il gioco?***

Iniziamo lo studio del problema con un esempio più semplice da trattare, studiando che cosa accade se prendiamo un solo dado e cerchiamo di rispondere alla domanda:

qual è la probabilità che, per ottenere "1", siano necessari ***al massimo k lanci****?*

Indicando con X_1 la variabile aleatoria che rappresenta il numero di lanci che occorrono per ottenere "1", la probabilità che occorra un solo lancio per eliminarlo è

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{6} \ .$$

La probabilità che occorrano al massimo due lanci per ottenere "1" si ottiene ragionando sull'evento contrario, ossia sull'evento *servono più di 2 lanci per ottenere "1"* (per due volte consecutive, cioè, non si deve ottenere "1"):

$$P(X_1 \leq 2) = 1 - P(X_1 > 2) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \ .$$

---

[1] *Liceo Scientifico "E. Fermi" Cecina (LI)*

Allo stesso modo possiamo ottenere la probabilità che, per ottenere “1”, occorrano al massimo k lanci: basta infatti considerare l’evento contrario (per k volte consecutive, cioè, non si deve ottenere “1”), ossia

$$P(X_1 \leq k) = 1 - P(X_1 > k) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Consideriamo ora due dadi: *qual è la probabilità che, per eliminare entrambi i dadi, siano necessari al massimo k sessioni di lanci?*

Indicata con X la variabile aleatoria che indica il numero delle sessioni di lanci necessarie ad eliminare entrambi i dadi, si tratta di calcolare la probabilità $P(X \leq k)$. Possiamo pensare di lanciare k volte il primo dado e, successivamente, lanciare k volte il secondo dado; se chiamiamo con X_1 e X_2 le variabili aleatorie **indipendenti** che indicano il numero di lanci che occorrono per ottenere “1” rispettivamente con il primo e il secondo dado, la probabilità che siano necessarie al massimo k sessioni di lanci è uguale a

$$P(X \leq k) = P(X_1 \leq k\ ,\ X_2 \leq k) = P(X_1 \leq k) \cdot P(X_2 \leq k) =$$

$$= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^2.$$

In generale, se i dadi sono n, la probabilità che siano necessarie al massimo k sessioni di lanci è uguale a

$$P(X \leq k) = P(X_1 \leq k\ , X_2 \leq k\ , \ldots , X_n \leq k) =$$

$$= P(X_1 \leq k) \cdot P(X_2 \leq k) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq k) =$$

$$= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^n.$$

Analizziamo ora la probabilità che siano necessarie **esattamente** k sessioni di lanci:

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) =$$

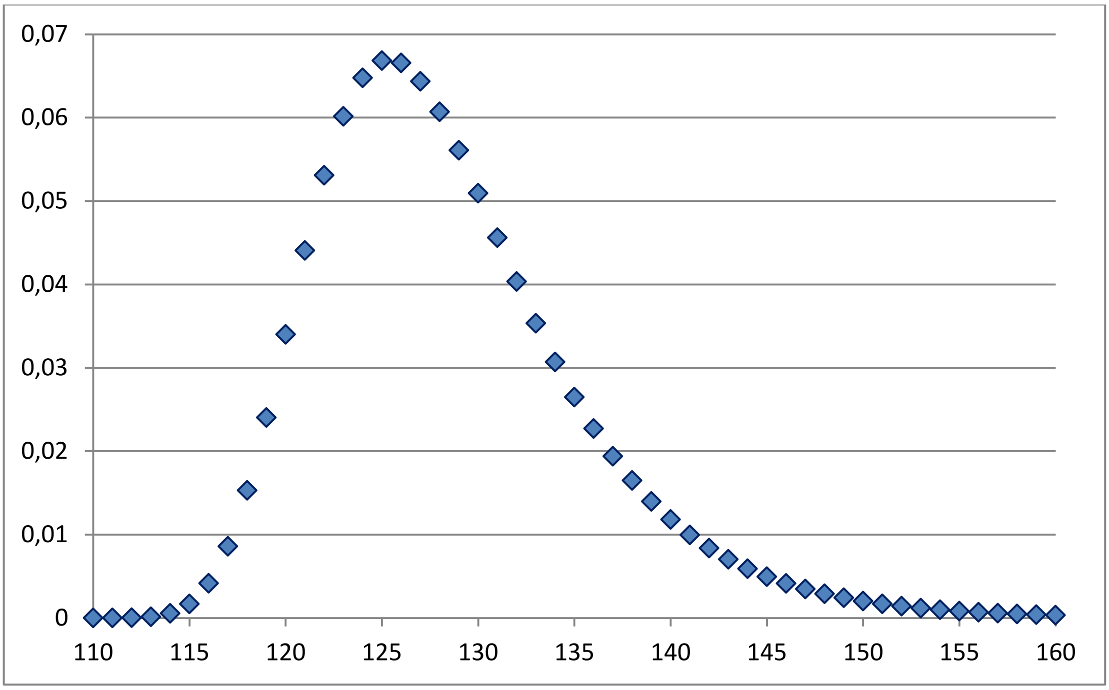
$$= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^n - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)^n.$$

Nel caso in cui vengano lanciati 7,7 miliardi di dadi, la probabilità che occorrano esattamente 130 sessioni di lanci è pari a

$$P(X = 130) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{130}\right)^{7{,}7\cdot 10^9} - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{129}\right)^{7{,}7\cdot 10^9} \approx 0{,}051$$

ossia al $5{,}1\ \%$.

Il grafico seguente rappresenta la probabilità di eliminare tutti i 7,7 miliardi di dadi con esattamente k sessioni di lanci. In ascissa troviamo k, mentre in ordinata la relativa probabilità.



Si nota come la probabilità $P(X = k)$ sia praticamente nulla prima di $k = 110$ sessioni di lanci, cresca rapidamente e raggiunga il massimo a $k = 125$ (probabilità $\approx 0{,}0668$) per poi decrescere tendendo a 0 per $k \to +\infty$.

Per avere un'idea, risulta

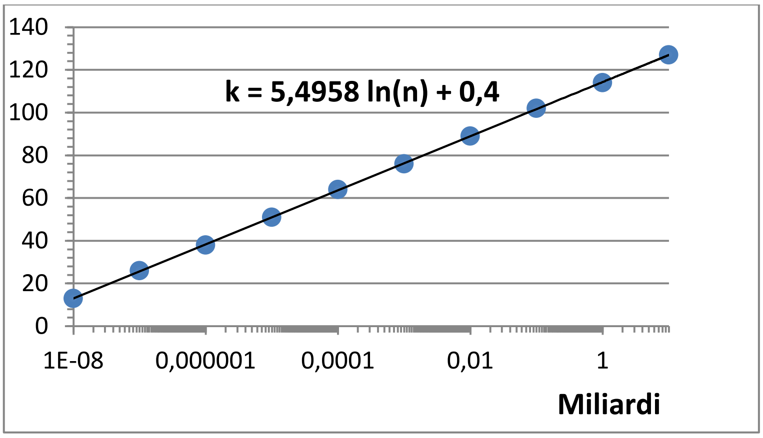
$$P(X \leq 110) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{110}\right)^{7{,}7\cdot 10^9} \approx 3 \cdot 10^{-7}$$

$$P(X > 160) = 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{160}\right)^{7{,}7\cdot 10^9} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ .$$

Conclusioni

Per problemi di questo tipo è difficile fare, a priori, anche una semplice stima dei possibili risultati. Se consideriamo un numero di dadi minore, ad esempio $n = 10$, la distribuzione di probabilità ha una forma analoga a quella rappresentata nel grafico analizzato in precedenza, anche se il "picco" si verifica comprensibilmente molto prima (cioè a sinistra), in corrispondenza di $k = 13$ sessioni di lanci. Occorre invece aumentare "drasticamente" il numero n dei dadi, se vogliamo che la curva "si sposti" verso destra. Nella tabella seguente sono indicati i valori di n fino a 10 miliardi, mentre il grafico successivo, in scala semilogaritmica, ne rappresenta la situazione, con la relativa formula ottenuta con i minimi quadrati.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{k}$ **tale che** $\boldsymbol{P(X = k)}$ **risulti max**
10	13
100	26
1000	38
10000	51
100000	64
1000000	76
10000000	89
100000000	102
1000000000	114
10000000000	127



Dal punto di vista strettamente didattico, ritengo costruttivo seguire lo schema descritto, iniziando cioè da un singolo dado per poi passare al caso (più delicato) di due dadi. Di sicuro interesse sono poi le simulazioni utilizzando, ad esempio, un foglio di calcolo. Il problema affrontato offre infine spunti per ulteriori indagini e approfondimenti, come ad esempio il seguente: ***qual è la probabilità che coloro che vengono eliminati all'ultimo lancio siano almeno due?***